

第3章 等方ニュートン流体の方程式

3.1 等方ニュートン流体の構成方程式

構成方程式とは、応力と連続体を記述する座標 (変形) および熱力学量などに関係づける法則である。

通常、流体では、応力は速度の空間微分の関数と考えるのが自然である。速度勾配テンソル (deformation rate tensor) $u_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$ を導入しておく。したがって、構成方程式は応力を速度勾配テンソルで表現したものとなる。

ここでは、ニュートン流体の構成方程式の表式について考える。

3.1.1 等方ニュートン流体とは

以下の仮定を満たす流体を等方ニュートン流体という。

- 速度勾配が十分小さい。よって、応力が速度勾配の1次式で表すことができると考える。つまり、応力は $u_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$ の1次関数であると仮定する。このような流体をニュートン流体 (Newtonian Fluid) と呼ぶ。そうでないものを非 Newton 流体 (Non-Newtonian Fluid) という。
- 流体が等方的である。

ニュートン流体として扱われるものとしては、地球の大気、海洋などが挙げられる。

3.1.2 σ_{ij} の速度勾配テンソル u_{kl} による展開

速度勾配が小さいので、 σ_{ij} を u_{kl} で展開し、2次以上の項を微小として無視する。

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_0 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} u_{kl} + O(u_{kl}^2). \quad (3.1)$$

速度勾配テンソル (velocity gradient tensor) u_{kl} は対称部分と反対称部分に分けることができる。

$$u_{kl} = \frac{1}{2} \cdot e_{kl} + \frac{1}{2} \cdot \Omega_{kl}, \quad (3.2)$$

ただし

$$e_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k},$$

$$\Omega_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} = -\varepsilon_{klm} \cdot \omega_m.$$

ここで, ε_{klm} はエディントンのイプシロンと呼ばれるもので,

$$\varepsilon_{klm} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1) \\ -1 & (i, j, k) = (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

e_{kl} は変型速度テンソル (rate-of-deformation tensor)¹, Ω_{kl} はスピテンソルである. 後でやるが, ω_m は渦度ベクトルである. ω_m は渦度の m 方向の成分である². したがって σ_{ij} はつぎのように表わされる.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (\sigma_{ij})_0 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} \left(\frac{1}{2} e_{kl} - \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} \omega_m \right) \\ &= (\sigma_{ij})_0 + a_{ijkl} e_{kl} + b_{ijm} \omega_m + O(u_{kl}^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

ただし, $a_{ijkl} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}}$, $b_{ijm} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} \varepsilon_{klm}$ である.

3.1.3 応力テンソルの表式

- $(\sigma_{ij})_0$ の表式

流体が静止している場合を考える.

流体中に働く応力は, 面に垂直な方向に押す向きに働く圧力 p だけである. よって, 応力テンソルは $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ となるべきである. 一方, 速度勾配による σ の展開式 (3.3) については, 流体が静止しているので $e_{kl} = 0, \omega_m = 0$ となり $\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_0$ となる. よって,

$$(\sigma_{ij})_0 = -p\delta_{ij}. \quad (3.4)$$

- b_{ijm} の表式

流体が剛体回転している場合を考える.

¹ひずみ速度テンソル (strain rate tensor) とも言う (異). $\frac{1}{2}e_{kl}$ を変型速度テンソルと定義する流儀も多い.

² $\omega_m \equiv \varepsilon_{ijm} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ よって,

$$-\varepsilon_{klm} \cdot \omega_m = -\varepsilon_{klm} \cdot \varepsilon_{ijm} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -(\delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{il}) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k}$$

速度のずれによる応力は存在せず、圧力だけである。応力テンソルは $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ となるべき。今、流体が x_1 軸を回転軸として角速度 Ω で剛体回転しているとする。剛体回転の速度場は、 $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$ より

$$\mathbf{v} = (0, \Omega \cdot x_3, -\Omega \cdot x_2)$$

$$\Omega = |\Omega|.$$

この速度分布では $e_{kl} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} = 0$, $\omega_1 = -2\Omega$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ である。したがって、応力テンソル $\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_0 + a_{ijkl}e_{kl} + b_{ijm}\omega_m$ は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - b_{ij1} \cdot 2\Omega. \tag{3.5}$$

となる。したがって、 $b_{ij1} = 0$ である。同様に、 x_2 軸、 x_3 軸回転について考えると、 ω_m の係数 b_{ijm} はすべて 0 となる。

$$b_{ijm} = 0. \tag{3.6}$$

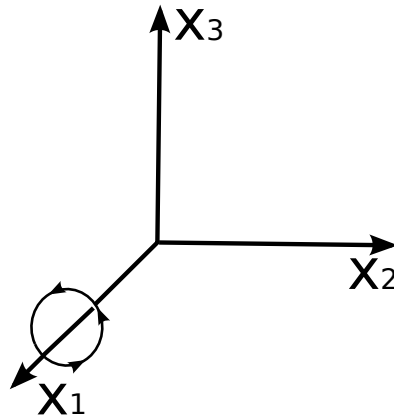


図 3.1: x_1 軸まわりの剛体回転.

• a_{ijkl} の表式

流体が等方的であるという仮定により、 e_{kl} の係数 a_{ijkl} は 4 階の等方性テンソルでなければならない。任意の座標回転 (より正確には、直交基底変換) により形が変わらないテンソルを等方性テンソルという。4 階の等方テンソルは次の形をもつ (次節参照)。

$$a_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{3.7}$$

以上を (3.3) に代入することにより、応力テンソルは次のように書ける。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (\sigma_{ij})_0 + a_{ijkl}e_{kl} + b_{ijm}\omega_m + O(u_{kl}^2) \\ &= -p\delta_{ij} + (A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk}) e_{kl} \\ &= -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + B e_{ij} + C e_{ji} \\ &= -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + (B + C)e_{ij}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

物質	密度 ρ [Kg/m ³]	粘性係数 μ [Pa · sec=Kg m ⁻¹ sec ⁻¹]	動粘性係数 ν [m ² / sec]
水 H ₂ O (280K)	996.93	1.4×10^{-3}	1.4×10^{-6}
水 H ₂ O (300K)	996.62	8.5×10^{-4}	8.6×10^{-7}
空気 (298K)	1.184	1.8×10^{-5}	1.5×10^{-5}
グリセリン C ₃ H ₅ (OH) ₃ (280K)	1267	5.5	4.3×10^{-3}
グリセリン C ₃ H ₅ (OH) ₃ (300K)	1257	7.8×10^{-1}	6.2×10^{-4}
水銀 (280K)	13.5877×10^3	1.6×10^{-3}	1.2×10^{-7}

表 3.1: 粘性流体の密度・粘性係数の値. 流体力学ハンドブックと理科年表による

ここであらためて $A = \frac{\lambda}{2}, B + C = \mu$ とおく. また, $e_{kk} = 2\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 2\text{div}\mathbf{v}$ と変型することにより応力テンソルの表現が得られる.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\text{div}\mathbf{v} + \mu e_{ij} \\ &= -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

μ を粘性係数 (率), λ を第2粘性係数 (率) という.

応力テンソルの表式は, さらに次のように変形されることも多い.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij} \cdot \text{div}\mathbf{v} \\ &= -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ij} \cdot \text{div}\mathbf{v}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

$\eta \equiv \mu$ は粘性係数 (率) である. $\zeta \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu$ は体積粘性率 (bulk viscosity) とされる. 体積粘性率は, 体積変化の程度によって平均圧力が静止状態での圧力からずれる効果の大きさを表す.

3.1.4 等方テンソルの表式の導出

等方テンソルの形の導出の例を以下に示す.

1. 1 階の等方性テンソル

座標の回転による座標変換を考える. 変換行列を β_{ji} とすると, 1 階テンソルの変換則により, ベクトル t_j は

$$t'_j = \beta_{ji}t_i$$

と変換される. t_j が等方だとすると t'_j は t_j に等しい. 回転変換として, x_1 軸まわりの 180° 回転 (x_2 軸と x_3 軸がひっくり返る) を考えると

$$\beta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$t'_1 = t_1, \quad t'_2 = -t_2, \quad t'_3 = -t_3$$

が得られる. よって, 等方性の条件 $t'_j = t'_j$ から

$$t_2 = 0, \quad t_3 = 0$$

が得られる. 同様に, x_2 軸まわりの 180° 回転を考えると $t_1 = 0$ が得られる. よって, $t_i = 0$ となる.

更に, 任意の座標回転に対して $(0,0,0)$ は形を変えない. したがって 1 階の等方性テンソルは $t_i = 0$ である.

2. 2 階の等方性テンソル

計算の便宜上, a_{ij} を成分とするテンソルを \mathbf{T}_2 と書くことにすると,

$$\mathbf{T}_2 = a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (3.11)$$

と表すことができる. ここで \mathbf{e}_i は x_i 軸に平行な単位ベクトルであり, $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ はテンソルの基底である³. 座標系を任意の向きに回転させるとき, 等方性テンソルの成分は回転前後で不変である. この条件を満たすように成分 a_{ij} を定める.

アインシュタインの規約を用いずに (3.11) を書き下すと,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 &= a_{xx} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + a_{xy} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y + a_{xz} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z \\ &\quad + a_{yx} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x + a_{yy} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + a_{yz} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \\ &\quad + a_{zx} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x + a_{zy} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y + a_{zz} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.12)$$

となる. 座標系を x 軸について反時計回りに π rad 回転させる. このとき \mathbf{T}_2 は (3.12) において単位ベクトルを $\mathbf{e}_y \rightarrow -\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z \rightarrow -\mathbf{e}_z$ と置き換えたもので表現される. すなわち

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 &= a_{xx} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x - a_{xy} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y - a_{xz} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z \\ &\quad - a_{yx} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x + a_{yy} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + a_{yz} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \\ &\quad - a_{zx} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x + a_{zy} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y + a_{zz} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.13)$$

³2 階テンソルに関して, (3.11) のように単位ベクトルを 2 つ併記して成分の位置付けを表す方法をダイアディック (dyadic) と呼ぶ. また 4 階テンソルに関して, (3.20) のように単位ベクトルを 4 つ併記して成分の位置付けを表す方法をテトラディック (tetradic) と呼ぶ.

となる. (3.12), (3.13) の \mathbf{T}_2 の各成分は互いに等しくなければならないので,

$$a_{xy} = 0, \quad a_{xz} = 0, \quad a_{yx} = 0, \quad a_{zx} = 0 \quad (3.14)$$

が得られる. 同様に座標系を y 軸について反時計周りに π rad 回転させると, \mathbf{T}_2 は (3.12) において単位ベクトルを $\mathbf{e}_x \rightarrow -\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z \rightarrow -\mathbf{e}_z$ と置き換えることで表現されるので,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 &= a_{xx}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x - a_{xy}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + a_{xz}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z \\ &\quad - a_{yx}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x + a_{yy}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y - a_{yz}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z \\ &\quad + a_{zx}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x - a_{zy}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y + a_{zz}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる. (3.12), (3.15) の各成分は互いに等しくなければならないので,

$$a_{yz} = 0, \quad a_{zy} = 0 \quad (3.16)$$

が得られる. また座標系を y 軸について反時計周りに $\pi/2$ rad 回転させた後, 新たな x 軸について時計周りに $\pi/2$ rad 回転させる. このとき \mathbf{T}_2 は (3.12) において単位ベクトルを $\mathbf{e}_x \rightarrow \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_y \rightarrow \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z \rightarrow \mathbf{e}_x$ と置き換えることで表現されるので,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 &= a_{xx}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + a_{xy}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z + a_{xz}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x \\ &\quad + a_{yx}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y + a_{yy}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z + a_{yz}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x \\ &\quad + a_{zx}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + a_{zy}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z + a_{zz}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x \\ &= a_{zz}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + a_{zx}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + a_{zy}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z \\ &\quad + a_{xz}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x + a_{xx}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + a_{xy}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z \\ &\quad + a_{yz}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x + a_{yx}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y + a_{yy}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる. (3.12), (3.17) の各成分は互いに等しくなければならないので,

$$a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} \quad (3.18)$$

が得られる. $a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} = A$ と置くと, (3.14), (3.16), (3.18) より,

$$a_{ij} = A\delta_{ij} \quad (3.19)$$

となる.

逆に, (3.19) なら任意の回転に対して不変となることが示せる (はず). よって, (3.19) が 2 階の等方テンソルである.

3. 4 階の等方性テンソルの導出

a_{ijkl} を成分とするテンソルを \mathbf{T}_4 と書くことにすると,

$$\mathbf{T}_4 = a_{ijkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l \quad (3.20)$$

と表すことができる。座標系の回転に対してテンソルの成分は回転前後で不変となるように成分 a_{ijkl} を定める。

T_4 は 81 個の成分を持つので、アインシュタインの規約を用いずに各項を陽に書き下すのはあまり現実的ではない。よりシステマティックに議論する為に、成分を以下のように分類する。

- (a) 添字が全て等しいもの。 a_{xxxx} など 3 成分が該当する。
- (b) 添字の種類が 2 種類で、一方の添字が 2 つのみ現れるもの。 a_{xxyy} など 18 成分が該当する。
- (c) 添字が奇数回現れるもの。 a_{xxyx}, a_{xxyz} など 60 成分が該当する。

座標系を 1 つの軸の周りに π rad 回転させるとき、単位ベクトルは $(e_x \rightarrow -e_x, e_y \rightarrow -e_y), (e_x \rightarrow -e_x, e_z \rightarrow -e_z), (e_y \rightarrow -e_y, e_z \rightarrow -e_z)$ のように置き換わる。この回転操作により、テンソルの基底は $e_x e_x e_x e_y \rightarrow -e_x e_x e_x e_y$ のように変換され、1 つの添字が奇数回現れる成分は自身に負号をつけたものと等しくなる。従って 3. に分類される成分は全てゼロとなる。

座標系を 1 つの軸の周りに $\pi/2$ rad 回転させるとき、単位ベクトルは $(e_x \rightarrow -e_y, e_y \rightarrow e_x), (e_y \rightarrow -e_z, e_z \rightarrow e_y), (e_z \rightarrow -e_x, e_x \rightarrow e_z)$ のように置き換わる。この回転操作により、テンソルの基底は $e_x e_x e_y e_y \rightarrow e_y e_y e_x e_x$ のように変換されるので、2. に分類される成分に関して以下の関係が得られる。

$$a_{xxyy} = a_{yyxx}, \quad a_{yyzz} = a_{zzyy}, \quad a_{zzxx} = a_{xxzz}, \quad (3.21)$$

$$a_{xyxy} = a_{yxxy}, \quad a_{yzyz} = a_{zyzy}, \quad a_{zxzx} = a_{xzxz}, \quad (3.22)$$

$$a_{xyyx} = a_{yxyx}, \quad a_{yzzy} = a_{zyyz}, \quad a_{zxzx} = a_{xzxz}. \quad (3.23)$$

座標系を 1 つの軸の周りに $\pi/2$ rad 回転させた後、新たな座標系におけるある軸の周りに $-\pi/2$ rad 回転させるとき、単位ベクトルは $(e_x \rightarrow e_y, e_y \rightarrow e_z, e_z \rightarrow e_x)$ と置き換わる。この回転操作により、テンソルの基底は $e_x e_x e_y e_y \rightarrow e_y e_y e_z e_z, e_x e_x e_x e_x \rightarrow e_y e_y e_y e_y$ のように変換される。従って、各成分に関して以下の関係が得られる。

$$a_{xxyy} = a_{yyzz} = a_{zzxx}, \quad (3.24)$$

$$a_{xyxy} = a_{yzyz} = a_{zxzx}, \quad (3.25)$$

$$a_{xyyx} = a_{yzzy} = a_{zxzx}, \quad (3.26)$$

$$a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz}. \quad (3.27)$$

(3.21) – (3.26) をまとめると、

$$a_{xxyy} = a_{yyzz} = a_{zzxx} = a_{yyxx} = a_{zzyy} = a_{xxzz} \equiv B, \quad (3.28)$$

$$a_{xyxy} = a_{yzyz} = a_{zxzx} = a_{yxxy} = a_{zyzy} = a_{xzxz} \equiv C, \quad (3.29)$$

$$a_{xyyx} = a_{yzzy} = a_{zxzx} = a_{yxyx} = a_{zyyz} = a_{xzxz} \equiv D \quad (3.30)$$

となる。但し B, C, D はスカラー量である。

更に z 軸の周りに微小角度 $\delta\theta$ だけ回転させる場合について考える。この場合は $\pi/2$ rad, π rad 回転させる場合とは異なり、基底を単純に置き換えることによって議論することが困難である。そこでテンソルの定義に立ち戻って、テンソルの変換法則を導く。4階のテンソル a_{ijkl} について、回転変換した後のテンソルを a'_{pqrs} とする。このときテンソルの定義より、 a_{ijkl} と a'_{pqrs} の間には以下の関係式が成り立つ。

$$a'_{pqrs}(x', y', z') = a_{ijkl}(x, y, z)\beta_{pi}\beta_{qj}\beta_{rk}\beta_{sl}. \quad (3.31)$$

但し x', y', z' は回転後の座標であり、 β_{pi} は回転行列の成分である。 z 軸の周りに角度 $\delta\theta$ だけ回転させる場合、

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta\theta) & \sin(\delta\theta) & 0 \\ -\sin(\delta\theta) & \cos(\delta\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

となる。(3.32)において、 $\sin(\delta\theta)$, $\cos(\delta\theta)$ を $\delta\theta = 0$ の周りで展開し、 $|\delta\theta| \ll 1$ であるとして $\delta\theta$ の2次以上の項を無視すると、

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

となる。(3.33)はクロネッカーのデルタ記号及びエディントンのイプシロン記号を用いて

$$\beta_{ij} = \delta_{ij} + \delta\theta\epsilon_{3ij} \quad (3.34)$$

と表される。(3.34)を(3.31)に代入すると、

$$\begin{aligned} a'_{pqrs} &\simeq a_{ijkl}(\delta_{pi} + \delta\theta\epsilon_{3pi})(\delta_{qj} + \delta\theta\epsilon_{3qj})(\delta_{rk} + \delta\theta\epsilon_{3rk})(\delta_{sl} + \delta\theta\epsilon_{3sl}) \\ &= a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{rk}\delta_{sl} \\ &\quad + (a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{rk}\epsilon_{3sl} + a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{sl}\epsilon_{3rk} + a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{rk}\delta_{sl}\epsilon_{3qj} \\ &\quad + a_{ijkl}\delta_{qj}\delta_{rk}\delta_{sl}\epsilon_{3pi})\delta\theta + O((\delta\theta)^2) \\ &\simeq a_{pqrs} + (a_{pqr}\epsilon_{3sl} + a_{pqks}\epsilon_{3rk} + a_{pjrs}\epsilon_{3qj} + a_{iqrs}\epsilon_{3pi})\delta\theta \end{aligned} \quad (3.35)$$

となる。 a_{pqrs} が等方性テンソルである為には、 $\delta\theta$ に依らず $a'_{pqrs} = a_{pqrs}$ でなければならぬ。従って(3.35)より

$$a_{pqr}\epsilon_{3sl} + a_{pqks}\epsilon_{3rk} + a_{pjrs}\epsilon_{3qj} + a_{iqrs}\epsilon_{3pi} = 0 \quad (3.36)$$

となる。(3.36)において $p = q = r = 1, s = 2$ と置くと、

$$\begin{aligned} &a_{1111}\epsilon_{321} + a_{11k2}\epsilon_{31k} + a_{1j12}\epsilon_{31j} + a_{i112}\epsilon_{31i} \\ &= -a_{1111} + a_{1122} + a_{1212} + a_{2112} \\ &= -a_{xxxx} + a_{xxyy} + a_{xyxy} + a_{yxyx} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

となる. (3.27) – (3.30) 及び (3.37) より

$$a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz} = A + B + C \quad (3.38)$$

となる. (3.28) – (3.30), (3.38) より,

$$a_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (3.39)$$

となる. (3.39) に関して, 任意の軸の周りの任意の回転に対して不変であることが示される.

以上で4階までの等方テンソルの一般形が得られた.

3.2 ニュートン流体の運動方程式

3.2.1 Navier-Stokes 方程式

流体の運動方程式

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

にニュートン流体の応力テンソルの表現

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ij} \cdot \text{div} \mathbf{v}$$

を代入することにより, Newton 流体の一般的な運動方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\zeta \cdot \text{div} \mathbf{v}) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) \right\} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

これを Navier-Stokes 方程式 という.

参考:円筒座標・球座標における表現

円筒座標系における応力テンソルの r, ϕ, z 成分は以下の通りである.

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \sigma_{\phi\phi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \sigma_{r\phi} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right), \\ \sigma_{\phi z} &= \eta \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right), \\ \sigma_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

Navier-Stokes 方程式の3成分と連続の式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0\end{aligned}$$

球座標系における応力テンソルの r, ϕ, θ 成分は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \sigma_{\phi\phi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\phi} &= \eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi \cot \theta}{r} \right), \\ \sigma_{\phi r} &= \eta \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right).\end{aligned}$$

Navier-Stokes 方程式の 3 成分と連続の式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta \right], \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right. \\ \left. - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0\end{aligned}$$

3.2.2 非圧縮の場合の Navier-Stokes 方程式

次の仮定が成り立つ場合を考える。

- 非圧縮流体である, すなわち $\frac{d\rho}{dt} = 0$ とみなせる. このとき, $\text{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = 0$ である.
- 粘性率 η が流体中で大きく変化しない.

Navier-Stokes 方程式は次のようになる.

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (3.41)$$

これが非圧縮での Navier-Stokes 方程式である.

ベクトル形式で書けば

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} \right) = -\text{grad} p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \rho \cdot \text{grad} \Phi. \quad (3.42)$$

あるいは ρ で割って

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \text{grad} \Phi. \quad (3.43)$$

$\nu \equiv \frac{\eta}{\rho}$ は動粘性係数 (率) と呼ばれる.

3.3 ニュートン流体のエネルギー保存則

ニュートン流体の熱力学の式の表式を与える. 力学的エネルギーの式 (2.46) と内部エネルギーの式 (2.47) を思い出そう.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho v_k \left[\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right] + p v_k - v_i \sigma'_{ik} \right\} &= p \text{div} \mathbf{v} - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \text{div} (\rho \varepsilon \mathbf{v}) &= -p \text{div} \mathbf{v} + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \text{div} \mathbf{q} + Q \end{aligned}$$

この $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ の表式を求めておく. これは粘性散逸項である.

3.3.1 粘性散逸項

等方的なニュートン流体の σ_{ik} の表式を用いると

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad (3.44)$$

右辺第1項は

$$\begin{aligned}
& \eta \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)} \\
&= \eta \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \frac{1}{2} \eta \cdot \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)} \\
& \hspace{15em} \text{前にある} \delta_{ik} \text{をかけると消える} \\
&= \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2
\end{aligned}$$

となる⁴ 右辺第2項は

$$\zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2.$$

よって

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \quad (3.45)$$

$\eta > 0, \zeta > 0$ ならともに正定値. 運動エネルギーの散逸を表現している.

⁴下から2つめの式の第2項は以下のようにして消える.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \eta \cdot \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{1}{2} \eta \cdot \frac{2}{3} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \cdot \left(\delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \delta_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{1}{2} \eta \cdot \frac{2}{3} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \cdot \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

3.3.2 熱力学の式

等方的な Newton 流体についての内部エネルギー・エンタルピー・エントロピーの式は次のようになる。

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\varepsilon\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2 - p\operatorname{div}\mathbf{v} - \operatorname{div}\mathbf{q} + Q, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho h\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2 - \operatorname{div}\mathbf{q} + \frac{dp}{dt} + Q, \quad (3.47)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) s = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2 - \operatorname{div}\mathbf{q} + Q. \quad (3.48)$$

特に、非圧縮流体 のとき、熱力学の式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho\varepsilon\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 - \operatorname{div}\mathbf{q} + Q, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 - \operatorname{div}\mathbf{q} + \frac{dp}{dt} + Q, \quad (3.50)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) s = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 - \operatorname{div}\mathbf{q} + Q. \quad (3.51)$$

この場合のエントロピーの式は、流体素片が持つ熱エネルギーの変化が粘性散逸による発熱と熱フラックスの収束発散によって決まることを表している。

また 粘性・熱流の効果を見捨てる 場合 ($\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\mathbf{q} = 0$, $Q = 0$)、は次のようになる (圧縮性があっても良い)。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho\varepsilon\mathbf{v}) = -p \cdot \operatorname{div}\mathbf{v}, \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h\mathbf{v}) = \frac{dp}{dt}, \quad (3.53)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) s = 0. \quad (3.54)$$

この場合、

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

となる。この式からエントロピーは Lagrange 不変量であることがわかる。