

第9章 乱流の開始

9.1 流体の無次元方程式

非圧縮の Navier-Stokes 方程式と連続の式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (9.1)$$

を無次元化する. 系の長さスケールを L , 速度スケールを U とする. 変数は以下のように無次元化される.

$$\mathbf{x}^* = L\mathbf{x}, \quad (9.2)$$

$$\mathbf{v}^* = U\mathbf{v}, \quad (9.3)$$

$$t^* = \frac{L}{U}t, \quad (9.4)$$

$$p^* = \rho U^2 p \quad (9.5)$$

ここで, $*$ を付けたものが有次元量.

長さスケールは場合によりけりで選ばれる. 円柱の半径だったり, 水槽の大きさだったり. U は一様流の場合なら簡単.

こうすると, 各演算子は以下のように無次元化される.

$$\text{grad}^* = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{L} \text{grad}, \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t} \quad (9.7)$$

よって, 連続の式は次のように無次元化される.

$$\text{div}^* \mathbf{v}^* = 0, \quad (9.8)$$

$$\frac{1}{L} \text{div}(U\mathbf{v}) = 0, \quad (9.9)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (9.10)$$

Navier-Stokes 方程式は以下のように無次元化される.

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \text{grad}^* \mathbf{v}^* = -\frac{1}{\rho^*} \text{grad}^* p^* + \nu \nabla^{2*} \mathbf{v}^*, \quad (9.11)$$

$$\frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t} (U\mathbf{v}) + U\mathbf{v} \cdot \frac{1}{L} \text{grad}(U\mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{L} \text{grad}(\rho U^2 p) + \nu \frac{1}{L^2} \nabla^2 (U\mathbf{v}), \quad (9.12)$$

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{U^2}{L} \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = -\frac{U^2}{L} \text{grad} p + \nu \frac{U}{L^2} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (9.13)$$

両辺を $\frac{U^2}{L}$ で割る.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = -\text{grad} p + \frac{\nu}{LU} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (9.14)$$

ここで, レイノルズ数 (Reynolds number)

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu} \quad (9.15)$$

を定義する. Re は無次元定数.

Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = -\text{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (9.16)$$

境界条件もしかるべく無次元化される.

以上が, 無次元の方程式系である.

- レイノルズ数の物理的意味

Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (9.17)$$

において, 左辺第二項の移流項と右辺第二項の粘性項の比をとると

$$\frac{|\mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{v}|} \sim \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} \sim \frac{UL}{\nu} \sim Re \quad (9.18)$$

となる. Re の大きい流れでは粘性項を無視しても良い. Re の小さい流れでは慣性項を無視しても良い.

- 無次元数

Re 以外にも多数存在する. 外力項が存在する場合には, その形に応じて複数の無次元数を定義することができる. その場合, 無次元数の組み合わせによって, 流れ場が決まる.

問題によって支配する無次元数が変わる. 自由表面があつてその上に波ができる場合は, Re と Fr が支配パラメータとなる.

流体が速く運動して圧縮性流体として振る舞う場合には, Re と Ma (マッハ数) が支配パラメータとなる.

9.2 レイノルズの相似則

無次元化された Navier-Stokes 方程式はただ 1 つのパラメータ Re を含む. 無次元数で流れを記述するとき, Re が等しい流れはまったく同形になる. これをレイノルズの相似則 (Reynolds's law of similarity) という.

無次元の Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = -\text{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (9.19)$$

を解けば, 解の速度は

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t; Re) \quad (9.20)$$

となる. これを有次元に戻すと

$$\mathbf{v}^* = U \mathbf{f}\left(\frac{1}{L} \mathbf{x}^*, \frac{U}{L} t^*; Re\right) \quad (9.21)$$

定常の場合なら, 速度場は $\frac{\mathbf{x}^*}{L}$ と Re で決まる. Re が等しければ, 境界の形が幾何学的に相似な 2 つの流れは, 流れの場全体が相似になる.

円柱のまわりの流れでは, Re が 1000 程度になると乱流的な後流が発生 (図 9.1).

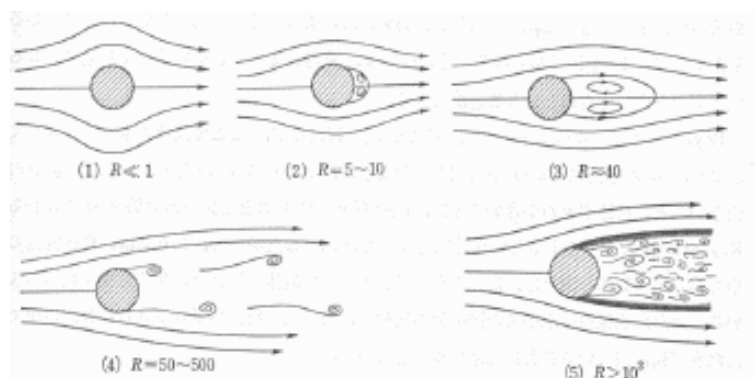


図 9.1: 様々な Re 数に対する円柱のまわりの流れ. 今井 (1973) の図 1-1 を転載.

9.3 乱れの開始

2次元ポアズイユ流を例に線形安定性の議論の大筋を紹介する.

直交直線座標 (x, y, z) で考える. x 軸を流れの方向にとる.

基礎方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = -\text{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (9.22)$$

流れ場を主流と擾乱部分に分ける.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{v}'. \quad (9.23)$$

主流の速度として

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = (U(y), 0, 0) \quad (9.24)$$

の場合を考える. あとで考えるのは2次元ポアゾイユ流
擾乱部分は小さいとして方程式を線形方程式を作る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{v}') + (\boldsymbol{U} + \boldsymbol{v}') \cdot \text{grad}(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{v}') &= -\text{grad}(P + p') + \frac{1}{Re} \nabla^2(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{v}'), \\ \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \text{grad} \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}' \cdot \text{grad} \boldsymbol{U} &= -\text{grad} p' + \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{v}', \end{aligned} \quad (9.25)$$

ここで主流に関しては, 以下の方程式が成り立っている.

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \text{grad} \boldsymbol{U} = -\text{grad} P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{U}.$$

擾乱の速度は

$$\boldsymbol{v}' = \sum_{\alpha} \tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{y}) \exp[i\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \sigma t] \quad (9.26)$$

ここで, α は擾乱の波数ベクトルである. σ は複素振動数であり,

$$\Re \sigma > 0 : \text{不安定}$$

$$\Re \sigma < 0 : \text{安定}$$

となる.

擾乱の方程式に境界条件を適用すると固有値問題に帰着される. 固有値方程式を形式的に書くと以下のようにになっている.

$$F(\alpha, Re, c) = 0 \quad (9.27)$$

この式を c について解くと

$$c_r + ic_i = G(\alpha, Re) + iH(\alpha, Re) \quad (9.28)$$

となる. $c_r = 0$ となる場合が安定と不安定の境目になるので,

$$0 = G(\alpha, Re) \quad (9.29)$$

を与える α と Re の組み合わせを求めておくと便利である. これは中立曲線と呼ばれる.
2次元ポアゾイユ流

$$U(y) = 1 - y^2 \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad (9.30)$$

の場合の中立曲線を 図9.2 に示す. この中立曲線の内側で不安定となり, 乱れが成長する.

参考:

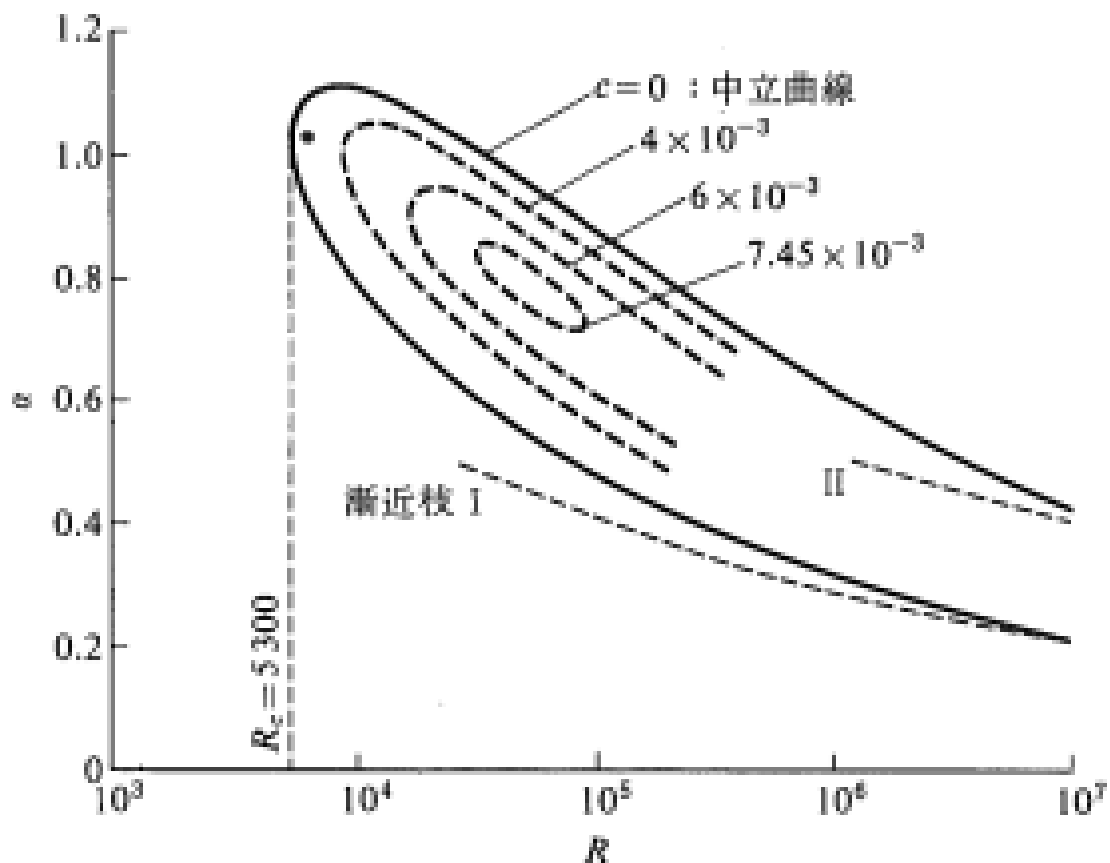


図 9.2: 2次元ポアズイユ流の安定性. 横軸はレイノルズ数, 縦軸は流れ方向の波数を表す. 太い実線が中立曲線であり, これは Lin (1945) によって求められた. 波線は成長率の等値線をあらわし, これらは Shen (1954) によって求められた. 原図は巽友正 (1982) 「流体力学」培風館.

- 円筒中の Couette 流の中立曲線は巽友正「流体力学」の図 16.5 (p.360)
- 2次元 Couette 流は常に安定. $U'' \neq 0$ が必要 (巽友正「流体力学」16-8-1節)