KYUSHU UNIVERSITY 100th 2011
知の新世紀を拓く

波と平均流の相互作用
- AN INTRODUCTION -

宮原　三郎 (九大・理)

日本気象学会春季大会専門分科会
2012.5.29

九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

1. 運動量・エネルギー保存則について
   - 保存則が成立する基本的背景
     - 空間・時間の一様性など
     - 平均場 – 波動場の相互作用
2. 作用・擬運動量・擬エネルギー保存則
   - 平均場の一様性と波動場の保存則
3. Eliassen-Palm fluxとその拡張
   - 3次元平均への拡張とTEM方程式
4. 擬エネルギー保存則は何故使われないのか
   - エネルギー保存則の曖昧性

1. 運動量・エネルギー保存則について

力学系における保存則の例

運動量保存則・エネルギー保存則・角運動量保存則など：　これらの法則が成り立つ背景は？

運動量保存則：　空間の並進一様性
エネルギー保存則：　時間の一様性
角運動量保存則：　空間の等方性

例えば
ランダウ・リフシッツ　力学

ネーターの定理

ラグランジュの方程式　デカルト座標で表現した場合

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial r_i}=0$$

空間が一様な場合に座標を平行移動する：$\mathbf{r}\to\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$　任意の　$\Delta\mathbf{r}$　に対して $\delta L=0$ でなければならない．

運動量保存則が導かれる．

時間の一様性より孤立系のラグランジアンは時間に陽に依存しない． $L=L(q_i,\ \dot{q}_i)$

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum_i\dot{q}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\right)=0, \qquad H=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L=E$$

エネルギー保存則

流体を力学系と考えると、同様に系全体に対して運動量保存則、エネルギー保存則が成立

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\mathbf{F}\right) = 0, \qquad F = momentum \;\; flux \;\; tensor$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla\cdot\left(energy \;\; flux\right) = 0 \;, \qquad \varepsilon = \rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + gz + U\right)$$

系を平均場と波動場に分離すると、それぞれの部分系では独立には保存則は成り立たない.

運動方程式 （ブシネスク流体系）

$$\frac{\partial \rho_m \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho_m \overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{v}} + \rho_m \overline{\Phi}\delta_{ij}\right) = -\rho_m \overline{r}\mathbf{k} - \nabla\cdot\left(\rho_m \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}\right)$$

$$\frac{\partial \rho_m \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho_m \overline{\mathbf{v}}\mathbf{v}' + \rho_m \mathbf{v}'\overline{\mathbf{v}} + \rho_m \Phi'\delta_{ij}\right) = -\rho_m r'\mathbf{k} - \nabla\cdot\left(\rho_m \mathbf{v}'\mathbf{v}' - \rho_m \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}\right)$$

r は浮力

これら２つは，平均場と波動の運動方程式（運動量変化を記述する式）である．
気象学の立場からすれば，レイノズルストレス項を規定することが可能な，波動に伴うfluxを定義したい．
あるいは，そのfluxが従う方程式（保存則）を知りたい．

回転系ではレイノルズストレスと波動による熱輸送がカップルしたfluxを考える．

エネルギー保存則［ブシネスク流体系、　波動については３次の項は無視（線形波動方程式を使用）］

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_m\overline{\mathbf{v}}^2+\frac{1}{2}\frac{\rho_m}{N^2}\overline{r}^2\right)+\nabla\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\rho_m\overline{\mathbf{v}}^2+\frac{1}{2}\frac{\rho_m}{N^2}\overline{r}^2\right)\overline{\mathbf{v}}+\rho_m\overline{\Phi}\,\overline{\mathbf{v}}\right\}+\nabla\cdot\left(\rho_m\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}\,\overline{\mathbf{v}}+\frac{\rho_m}{N^2}\overline{r'\mathbf{v}'}\,\overline{r}\right)=-\left[\overline{K}\to K'\right]-\left[\overline{P}\to P'\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_m\overline{\mathbf{v}'^2}+\frac{1}{2}\frac{\rho_m}{N^2}\overline{r'^2}\right)+\nabla\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\rho_m\overline{\mathbf{v}'^2}+\frac{1}{2}\frac{\rho_m}{N^2}\overline{r'^2}\right)\overline{\mathbf{v}}+\rho_m\overline{\Phi'\mathbf{v}'}\right\}=\left[\overline{K}\to K'\right]+\left[\overline{P}\to P'\right]$$

$$\left[\overline{K}\to K'\right]=-\rho_m\left(\overline{u'u'}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{u'v'}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{u'w'}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\overline{v'u'}\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\overline{v'v'}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\overline{v'w'}\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}+\overline{w'u'}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+\overline{w'v'}\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\overline{w'w'}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\right)$$

$$\left[\overline{P}\to P'\right]=-\frac{\rho_m}{N^2}\left(\overline{u'r'}\frac{\partial\overline{r}}{\partial x}+\overline{v'r'}\frac{\partial\overline{r}}{\partial y}+\overline{w'r'}\frac{\partial\overline{r}}{\partial z}\right)$$

以下では、平均場の等方性や時間的一様性を念頭において、波動場の保存則について考える．

2. 作用・擬運動量・擬エネルギー保存則

1自由度の振動系の作用変数

$J = \oint pdq$ 振動の１サイクルについて積分

周期運動する力学系：作用変数
q：一般化座標
p：一般化運動量
J：action variable (作用変数)

Jは系を支配する力学パラメタがゆっくり変動する場合不変となる（断熱不変量）

簡単な例： 振子

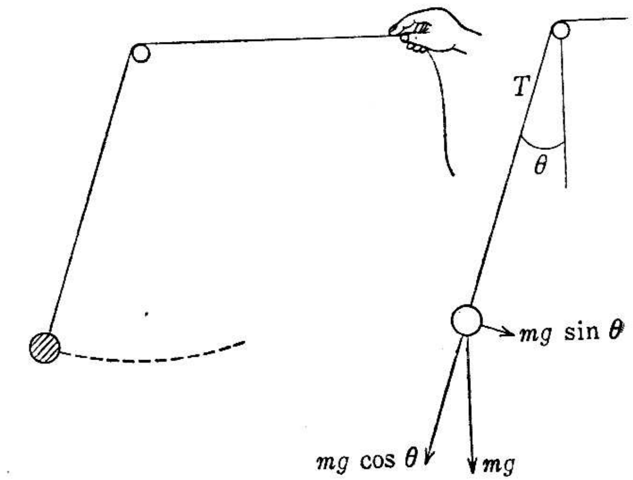


図７ 振子の振動とその断熱変形

朝永(1952) 量子力学I

$\dfrac{E}{\omega}$ は不変：断熱不変量

$$J = \oint pdq = \frac{1}{2\pi}\oint pq_{,\alpha} d\alpha = \frac{E}{\omega},$$

α: *phase of oscillation*

suffix: $,\alpha$

αによる偏微分

流体力学に適用

一般化座標、一般化運動量として $\vec{p} = \rho_0 \vec{u}, \quad \vec{q} = \vec{\xi}$ を用いる.

$\vec{\xi}$ ：流体粒子のラグランジュ的変位

$$A = \sum_j \xi_{j,\,\alpha} u_j \quad : \quad action$$

波作用: α 位相

$$p_i = -\sum_j \xi_{j,\,i} u_j \quad : \quad pseudomomentum$$

擬運動量: α 空間座標symmetryが存在
例えば解の東西方向並進不変

$$e = \sum_j \xi_{j,\,t} u_j \quad : \quad pseudoenergy$$

擬エネルギー: α 時間 symmetryが存在
解の時間並進不変

それぞれの物理量について保存則が導かれる.

$$\frac{\partial \rho_0 A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

Generalized Lagrangian-mean theory (GLM),
Andrews and McIntyre (1978) JFM, 89, 609-646.

Bühler(2009) Waves and Mean Flows, Cambridge Univ. Press.

3. Eliassen-Palm fluxとその拡張

力学理論はラグランジュ的変位を用いて記述されている.
実際のデータはオイラー的物理量で表現されている.
オイラー的物理量で表現された波活動度やfluxが、データ解析には実用的である.

3.1 Eliassen-Palm flux とTransformed Eulerian Mean equation (TEM)

東西方向に一様な基本場 (帯状平均場・ zonal mean fields)中の波動の帯状平均を考える.

基本場の東西方向の対称性より、東西方向の(擬)運動量保存に関した記述となる.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{F} = D + O(a^3) \quad , \qquad : \ \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Generalized Eliassen – Palm theorem

$$P \equiv \frac{\overline{E}}{\overline{u} - c} \ : \ wave\ \ activity\ (pseudomomentum),\ A \equiv \frac{P}{k} = -\frac{\overline{E}}{\hat{\omega}} \ : \ action,\ (WKB\ \ limit)$$

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\rho_m \overline{\mathbf{v}'^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho_m}{N^2}\overline{r'^2} : wave\ \ energy$$

$$\mathbf{F} \equiv \left[\overline{-u'v'} - \frac{1}{N^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\overline{v'r'} \ , \quad -\overline{u'w'} - (f - \frac{\partial \overline{u}}{\partial y})\frac{\overline{v'r'}}{N^2} \right], \qquad Eliassen - Palm\ \ flux$$

$$If\ \ D = 0\ \ and\ \ \overline{u} - c \neq 0,\ \nabla\cdot\mathbf{F} = 0,\ Eliassen - Palm\ \ theorem$$

Transformed Eulerian Mean equation (TEM)

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{v}^* \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w}^* \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - f\overline{v}^* = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\overline{u'v'} - \frac{1}{N^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\overline{v'r'}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[-\overline{u'w'} - \left(f - \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)\frac{1}{N^2}\overline{v'r'}\right] + \overline{X} \ ,$$

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial t} + \overline{v}^* \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} - N^2 \overline{w}^* = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{r'w'} - \frac{\partial \overline{r}}{\partial y}\frac{\overline{r'v'}}{N^2}\right] + \overline{J} \ ,$$

$$\mathbf{F} \equiv \left[\overline{-u'v'} - \frac{1}{N^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\overline{v'r'} \ , \quad -\overline{u'w'} - (f - \frac{\partial \overline{u}}{\partial y})\frac{\overline{v'r'}}{N^2}\right]$$

$If \quad D = 0 \quad and \quad \overline{u} - c \neq 0, \ \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \ ;$

Generalaized Charney – Drazin Nonacceleration theorem

Quasi-geostrophic case

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{\overline{q'^2}}{\overline{q}_y}\right)+\overline{v'q'}=\frac{\overline{s'q'}}{\overline{q}_y} \quad ,$$

Zonal mean QG potential vorticity

$$\overline{q}=f_0+\beta y-\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N_0^2}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right)=f_0+\beta y-\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0}{N_0^2}\overline{r}\right) \;,$$

Disturbance of QG potential vorticity

$$q'=\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N_0^2}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) \;,$$

$$\overline{v'q'}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{f_0}{N_0^2}\overline{v'r'}\right)=\nabla\cdot\mathbf{F} \;,$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{F}=D$$

$$A\equiv\frac{1}{2}\frac{\overline{q'^2}}{\overline{q}_y}=\frac{\overline{E}}{\overline{u}-c} \;:\; QG\ \ Wave\ \ activity\ \ (pseudomomentum),$$

$$and\ \ E-P\ \ flux=Wave\ \ activity\ \ (pseudomomentum)\ \ flux.$$

注意

We consider the WKB limt

$$\psi'(x,y,z,t) = \hat{\Psi}(x,y,z,t)\sin\chi(x,y,z,t) \ ,$$

χ: *phase function, and the local wavenumbers are defined by*

$$k = \frac{\partial\chi}{\partial x} \ , \quad l = \frac{\partial\chi}{\partial y} \ , \quad m = \frac{\partial\chi}{\partial z} \ ,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\overline{q'^2}}{\overline{q}_y} + \frac{\overline{E}}{\overline{u}-c} = \frac{1}{4}\hat{\Psi}^2\frac{\left(k^2+l^2+{f_0^2}/{N_0^2}\,m^2\right)^2}{q_y}\overline{\sin^2\chi} + \frac{1}{4}\hat{\Psi}^2\frac{\left(k^2+l^2+{f_0^2}/{N_0^2}\,m^2\right)^2}{q_y}\overline{\cos^2\chi}$$

$$= \frac{1}{4}\hat{\Psi}^2\frac{\left(k^2+l^2+{f_0^2}/{N_0^2}\,m^2\right)^2}{q_y}.$$

基本場のpotential vorticity

$$\overline{q}(y,z) = f_0 + \beta y - \frac{\partial\overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N_0^2}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right) = f_0 + \beta y - \frac{\partial\overline{u}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0}{N_0^2}\overline{r}\right)$$

対象としている空間は、東西方向に対称性を持っている.

東西方向の擬運動量保存則

ガリレー変換に対して不変　$\overline{u}-c$　は座標系に依存しない

3.2　東西方向に一様なmean zonal wind 中の stationary QG 3-dimensional flux Plumb (1985)

$$Mean\ \ zonal\ \ flow:\ \overline{U}(y,\ z)$$

考えている空間（基本場）が東西対称性を持つので、東西方向の擬運動量についての３次元保存則が導かれる.

$$A_s \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{q'^2}{q_y}+\frac{E}{U}\right)=\frac{1}{4}\hat{\Psi}^2\frac{\left(-k^2-l^2-{f_0^2}/{N_0^2}\,m^2\right)^2}{q_y}\sin^2\chi+\frac{1}{4}\hat{\Psi}^2\frac{\left(k^2+l^2+{f_0^2}/{N_0^2}\,m^2\right)}{U}\cos^2\chi=\frac{1}{4}\hat{\Psi}^2\frac{\left(k^2+l^2+{f_0^2}/{N_0^2}\,m^2\right)^2}{q_y},$$

$$\frac{\partial A_s}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{F}_s=\frac{\partial A_s}{\partial t}+\nabla\cdot(A_s\mathbf{c}_g)=C_s,$$

$$\mathbf{F}_s=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2-\psi'\dfrac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial\psi'}{\partial x}\dfrac{\partial\psi'}{\partial y}-\psi'\dfrac{\partial^2\psi'}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{f_0^2}{N_0^2}\left(\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}\dfrac{\partial\psi'}{\partial z}-\psi'\dfrac{\partial^2\psi'}{\partial x\partial z}\right)\end{pmatrix}.$$

Stationary waveの２次の量の位相依存性を平均を取らずに消している.

Plumb (1985) JAS, 42, 217-229.

3.3 東西方向に非一様なmean wind 中のQG 3-dimensional time mean fluxと3-D TEM equation (Plumb, 1986)

$$Time\ \ mean\ \ flow: \ \bar{\mathbf{u}} = \left\{ \bar{u}(x,\ y,\ z),\ \bar{v}(x,\ y,\ z) \right\}$$

考えている空間（基本場）が東西対称性を持たないので、東西方向の擬運動量についての３次元保存則は導けない.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2}\overline{q'^2}\right) + (\nabla\cdot \mathbf{B})\cdot(\nabla_H \bar{q}) = \overline{s'q'} \ ,$$

eddy enstrophy equation

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\overline{\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial y}} & \bar{E} - \overline{\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2} & -\frac{f_0^2}{N_0^2}\overline{\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial z}} \\ \overline{\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2} - \bar{E} & \overline{\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}} & \frac{f_0^2}{N_0^2}\overline{\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial z}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{u'v'} & \bar{E} - \overline{u'^2} & -\frac{f_0}{N_0^2}\overline{u'r'} \\ \overline{v'^2} - \bar{E} & -\overline{u'v'} & -\frac{f_0}{N_0^2}\overline{v'r'} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

これ以上の変形はできない.

擬運動量３次元保存則の形には変形できない.

ある条件の下では、近似的に保存則の形が導かれる.

$$\overline{u'q'} = -\overline{\frac{\partial\psi'}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N_0^2}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\right\}} = \frac{\partial B_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial B_{xz}}{\partial z} = (\nabla\cdot \mathbf{B})_x \ ,$$

$$\overline{v'q'} = \overline{\frac{\partial\psi'}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N_0^2}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\right\}} = \frac{\partial B_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial B_{yz}}{\partial z} = (\nabla\cdot \mathbf{B})_y \ .$$

Plumb (1986) JAS, 43, 1657-1678.

条件１．平均渦位勾配は擾乱に比べてゆっくり変化:　擾乱はWKB的

条件2.　平均流は保存的

$$\frac{1}{\left|\nabla_H \bar{q}\right|}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2}\overline{q'^2}\right)+\mathbf{n}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{B}\right)=\frac{\overline{s'q'}}{\left|\nabla_H \bar{q}\right|}\ ,$$

where

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla_H \bar{q}}{\left|\nabla_H \bar{q}\right|}\ .$$

Assuming that the basic QG potential vorticity gradient is slowly varying, we may write,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\overline{q'^2}}{\left|\nabla_H \bar{q}\right|}\right)+\nabla\cdot\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}\right)=\frac{\overline{s'q'}}{\left|\nabla_H \bar{q}\right|}\ ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)M+\nabla\cdot\mathbf{M}_R=S_M\ ,$$

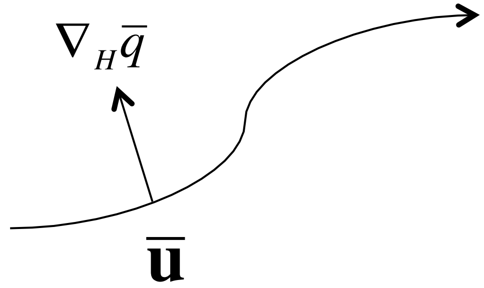
where

$$M=\frac{1}{2}\frac{\overline{q'^2}}{\left|\nabla_H \bar{q}\right|}\ ,\ \ and\ \ S_M=\frac{\overline{s'q'}}{\left|\nabla_H \bar{q}\right|}\ ,\ and\ \ \mathbf{M}_R=\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix} n_x B_{xx}+n_y B_{yx} \\ n_x B_{xy}+n_y B_{yy} \\ n_x B_{xz}+n_y B_{yz} \end{pmatrix}\ .$$

Approximately conservative basic state, $\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla_H\overline{q}\cong 0.$

$\mathbf{n}\cong(-\overline{v},\ \overline{u})/|\overline{\mathbf{u}}|$, *if the mean flow is pseudoeastward,*

$$\mathbf{M}_R\cong\frac{1}{|\overline{\mathbf{u}}|}\begin{bmatrix}\overline{u}\left(\overline{v'^2}-\overline{E}\right)-\overline{v}\,\overline{u'v'}\\ \overline{v}\left(\overline{u'^2}-\overline{E}\right)-\overline{u}\,\overline{u'v'}\\ \dfrac{f_0^2}{N_0^2}\left(\overline{v}\,\overline{u'r'}-\overline{u}\,\overline{v'r'}\right)\end{bmatrix}.$$



等ポテンシャ渦度線の接線方向の局所的な擬運動量についての近似法則

Utilizing $\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}}=0,$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)M+\nabla\cdot\mathbf{M}_R=S_M\quad,$$

may be written

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{M}_T=S_M\quad,$$

where

$$\mathbf{M}_T=\mathbf{M}_R+\overline{\mathbf{u}}M.$$

Under the WKB limit,

$$\mathbf{M}_T=\mathbf{c}_gM.$$

$$\mathbf{M}_R=\mathbf{M}_T-\overline{\mathbf{u}}M=\left(\mathbf{c}_g-\overline{\mathbf{u}}\right)M=\hat{\mathbf{c}}_gM,$$

where $\hat{\mathbf{c}}_g\equiv\mathbf{c}_g-\overline{\mathbf{u}}$:

intrinsic group velocity.

3D TEM方程式の一形式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - f\overline{v}^{*} = -\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x} + \overline{v'q'} = -\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x} + \left(\nabla\cdot \mathbf{B}\right)_y,\\
&\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + f\overline{u}^{*} = -\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y} - \overline{u'q'} = -\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y} - \left(\nabla\cdot \mathbf{B}\right)_x,\\
&\frac{\partial \overline{r}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{r}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{r}}{\partial y} - N_0^2\overline{w}^{*} = J.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - f\overline{v}^{*} = -\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x} + \left(\nabla\cdot \mathbf{F}\right)_x,\\
&\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + f\overline{u}^{*} = -\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y} + \left(\nabla\cdot \mathbf{F}\right)_y,\\
&\frac{\partial \overline{r}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{r}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{r}}{\partial y} - N_0^2\overline{w}^{*} = J.
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{F} = -\begin{pmatrix}
\frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} - \overline{v'^2} + \frac{\overline{r'^2}}{N_0^2}\right) & \overline{u'v'} & \frac{f_0}{N_0^2}\overline{v'r'} \\
\overline{v'u'} & \frac{1}{2}\left(\overline{v'^2} - \overline{u'^2} + \frac{\overline{r'^2}}{N_0^2}\right) & -\frac{f_0}{N_0^2}\overline{u'r'} \\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
\left(\nabla\cdot \mathbf{F}\right)_x = \left(\nabla\cdot \mathbf{B}\right)_y \;, \quad \left(\nabla\cdot \mathbf{F}\right)_y = -\left(\nabla\cdot \mathbf{B}\right)_x \quad .
$$

3 − D residual circulation

$$
\begin{aligned}
\overline{u}^{*} &= \overline{u} + \frac{1}{f}\frac{\partial \overline{S}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\overline{u'r'}}{N_0^2}\right),\\
\overline{v}^{*} &= \overline{v} - \frac{1}{f}\frac{\partial \overline{S}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\overline{v'r'}}{N_0^2}\right),\\
\overline{w}^{*} &= \overline{w} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overline{u'r'}}{N_0^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overline{v'r'}}{N_0^2}\right),
\end{aligned}
$$

where

$$
\overline{S} = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} - \frac{\overline{r'^2}}{N_0^2}\right).
$$

3.4　東西方向に非一様なmean wind 中のQG 3-dimensional fluxと3-D TEM equation (Takaya and Nakamura, 2001)

Plumb (1985)：time mean は必要としないが、stationary QG waveにのみ適用可

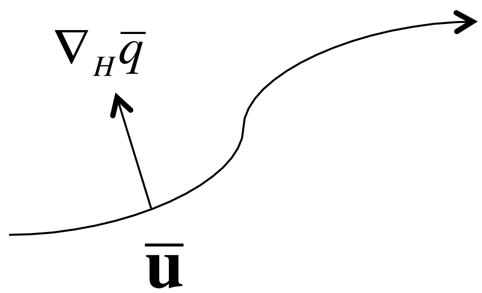
Plumb (1986) : time mean をとるので stationary QG waveには適用できない (擾乱の位相が消えない）

Takaya and Nakamura (2001): time mean を必要とせず、stationary QG waveにも適用可能な 3-D fluxとTEM 方程式系

$$streamfunction:$$

$$\psi'(x,y,z,t) = \hat{\Psi}(x,y,z,t)\sin\chi(x,y,z,t)\ ,$$

$$\chi:\ \ phase\ \ function,\quad \sin^2\chi + \cos^2\chi = 1.$$



等ポテンシャ渦度線の接線方向の局所的な擬運動量についての近似法則

Takaya and Nakamura (2001) JAS, 58, 608-627.

3.5　東西方向に非一様なmean wind 中の慣性重力波に適用可能な 3-dimensional fluxと3-D TEM equation (Miyahara, 2006)

$$Time\ \ mean\ \ flow:\ \mathbf{\bar{u}} = \left\{\bar{u}(x,\ y,\ z),\ \bar{v}(x,\ y,\ z),\ \bar{w}(x,y,z)\right\}$$

考えている空間（基本場）が空間対称性を持たないので、擬運動量についての３次元保存則は導けない.

$$F \equiv -\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} - \overline{v'^2} - \overline{w'^2} + \frac{\overline{r'^2}}{N^2}\right) & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} + \frac{f}{N^2}\overline{v'r'} \\ \overline{u'v'} & \frac{1}{2}\left(\overline{v'^2} - \overline{u'^2} - \overline{w'^2} + \frac{\overline{r'^2}}{N^2}\right) & \overline{v'w'} - \frac{f}{N^2}\overline{u'r'} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \hat{c}_{gx}\frac{E}{\hat{c}_x} & \hat{c}_{gy}\frac{E}{\hat{c}_x} & \hat{c}_{gz}\frac{E}{\hat{c}_x} \\ \hat{c}_{gx}\frac{E}{\hat{c}_y} & \hat{c}_{gy}\frac{E}{\hat{c}_y} & \hat{c}_{gz}\frac{E}{\hat{c}_y} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} - f\bar{v}^* = -\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x} + \nabla\cdot F_x$$

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} + f\bar{u}^* = -\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y} + \nabla\cdot F_y$$

$$\frac{D\bar{r}}{Dt} - N^2\bar{w}^* = -\frac{\partial\overline{r'w'}}{\partial z}$$

$$\bar{u}^* = \bar{u} + \frac{1}{f}\frac{\partial\bar{S}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\overline{u'r'}}{N^2}\right) \approx \bar{u} + \bar{u}_S$$

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{1}{f}\frac{\partial\bar{S}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\overline{v'r'}}{N^2}\right) \approx \bar{v} + \bar{v}_S$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overline{u'r'}}{N^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overline{v'r'}}{N^2}\right) \approx \bar{w} + \bar{w}_S$$

WKB limit

擬運動量flux

ストークスドリフト

Miyahara (2006)SOLA, 2, 108-111.

4. エネルギー保存則・擬エネルギー保存則は何故使われないのか

Plumb (1985)の擬エネルギー保存則 (Quasi-Geostrophic)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{E}_T = S_E$$

$$\varepsilon = p\left(e + \frac{1}{2} \frac{\nabla_H \overline{\psi} \cdot \nabla_H \overline{q}}{\left| \nabla_H \overline{q} \right|^2} \overline{q'^2} \right)$$

$$where \quad e \quad denotes \quad energy \quad of \quad QG-wave.$$

$$\nabla_H \overline{\psi} = \left(-\overline{V},\ \overline{U} \right)$$

が含まれておりガリレー変換に対して不変ではない.

Plumb (1985) JAS, 42, 298-300.

その他の例

Andrews (1983) JAS, 40, 85-90.
Shaw and Shepherd (2008) JFM, 594, 493-506.

簡単なブシネスク系

平均流の運動量の式

$$\rho_m \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_m \overline{u'w'}\right)$$

平均場の運動エネルギーの式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_m \overline{u}^2\right) = -\overline{u}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_m \overline{u'w'}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho_m(\overline{u}+u_0)^2\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_m \overline{u}^2\right) + \rho_m u_0 \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$$

$$= -\overline{u}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_m \overline{u'w'}\right) - u_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_m \overline{u'w'}\right)$$

$$= -(\overline{u}+u_0)\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_m \overline{u'w'}\right)$$

運動エネルギーの変化率が $\overline{u}$ に依存：
ガリレー変換に対して不変でない　座標系に依存

Lindzen (1973) Bound.-Layer Met., 4, 327-343，Lindzen(1990) Dynamics in atmospheric physics

もちろん，法則自身はガリレー変換に対し不変

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho_m(\overline{u}+u_0)^2\right] = -(\overline{u}+u_0)\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_m \overline{u'w'}\right)$$

波動のエネルギーを $\overline{E} = \frac{1}{2}\rho_m \overline{\mathbf{v}'^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho_m}{N^2}\overline{r'^2}$ で定義すると，

波動のエネルギーは，ガリレー変換に対し不変

波動のエネルギーは不変であるが
平均場の運動エネルギー変化率は座標系に依存

平均場の運動エネルギーの式を

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_m \overline{u}^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_m \overline{u'w'}\,\overline{u}\right) = \rho_m \overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$$

と変形しても同様

擬エネルギー：ガリレー変換に依存　　Bühler(2009)　Waves and Mean Flows

擬エネルギーで考えれば納得できる？

$$Plane\ \ wave\ \ case$$

$$A:\ \ action,\ \ \bar{e}:\ \ pseudoenergy,\ \ \ \bar{p}:\ \ pseudomomentum$$

$$A = \frac{\overline{E}}{\hat{\omega}},\quad \bar{p} = kA = \frac{k}{\hat{\omega}}\overline{E},$$

$$\bar{e} = \omega A = \frac{\omega}{k}\bar{p} = \frac{\omega}{\hat{\omega}}\overline{E} = \overline{E} + \bar{u}\bar{p} = \frac{1}{2}\rho_m \overline{\mathbf{v}'^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho_m}{N^2}\overline{r'^2} + \bar{u}\bar{p}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \rho_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

となる場合には、つじつまが合う．

物理法則：全ての慣性系で同等に成り立つ．

波動と平均場のエネルギー論はその点で，物理法則としては気持ちが悪い．