減衰性2次元乱流の普遍的赤外領域スペクトル

岩山隆寛（神戸大・理）
iwayama@kobe-u.ac.jp
渡邊威（名工大・工）
watanabe@nitech.ac.jp

ある日の研究室での会話

Yさん:「岩山（先生）の研究ってGFDなんですか？」

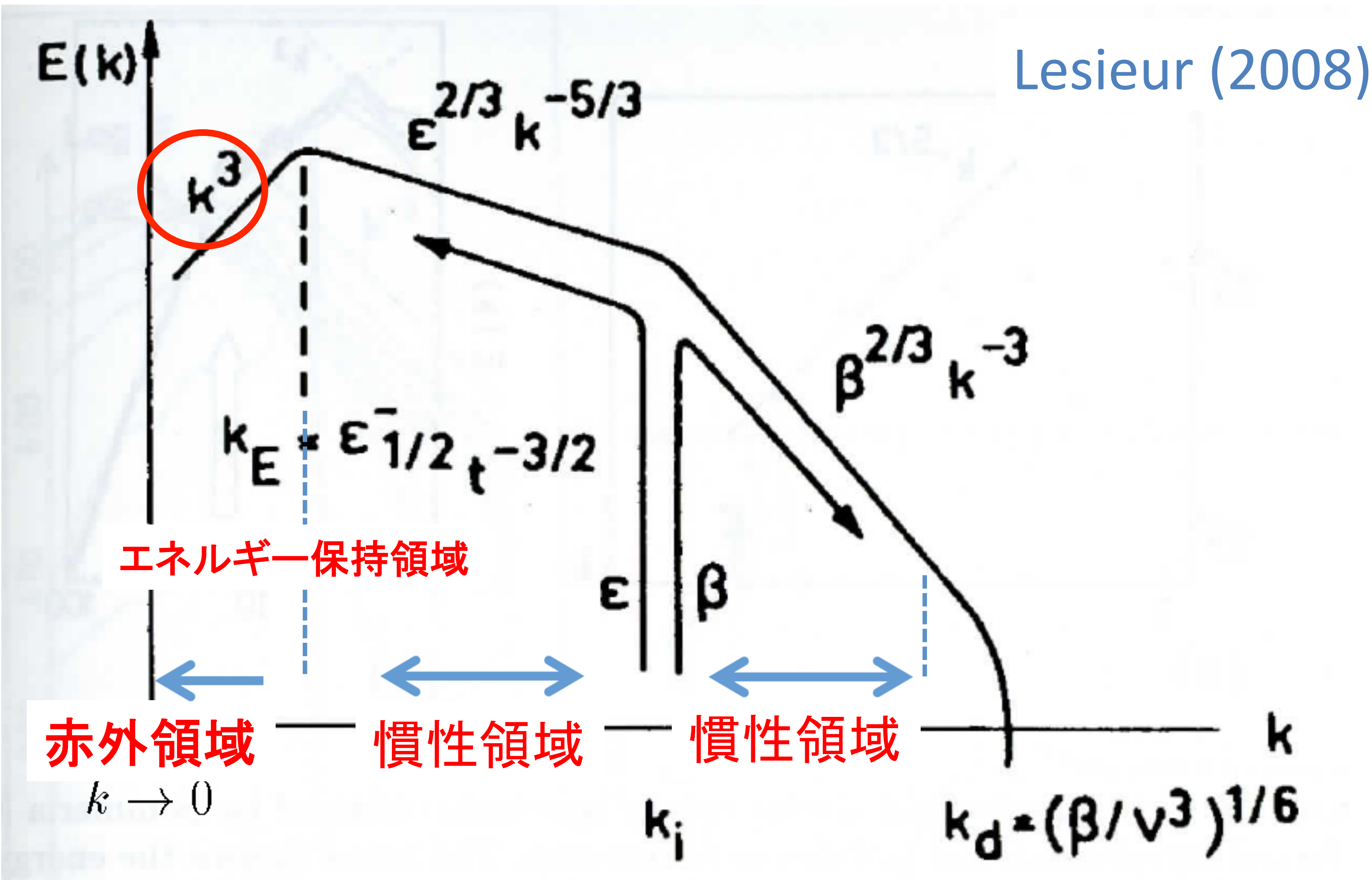
私:・・・そういえば授業でGFDは「回転成層流体の力学」ってしゃべっているな・・・

・・・ 回転（β効果）入っていないな～

・・・ 密度成層も当然入っていないな～

:「・・・」

2次元NS乱流のエネルギースペクトル



赤外領域スペクトルに関する過去の研究（減衰性Navier-Stokes乱流）

- Kraichnan (1976), Basdevant *et al*. (1978) 他
  - 狭い幅のエネルギースペクトルを初期値にした場合

$$E(k) \sim Ik^3$$

- Davidson (2007)
  - 初期値に依存して3つのケースがある

$$\left.\begin{array}{l} E(k) \sim Jk^{-1} \\ E(k) \sim Lk \end{array}\right\} \text{過渡的に存在}$$

$$E(k) \sim Ik^3 \quad \cdots \text{高波数側から浸食}$$

  - 不変量の存在：

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0, \ \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$$

赤外領域スペクトルに関する過去の研究（減衰性CHM-AM乱流）

- Yanase & Yamada (1984), Fox & Davidson (2008)
  - 狭い幅のエネルギースペクトルを初期値にした場合

$$E_{\mathrm{kinetic}}(k) \sim N k^7$$

- Iwayama, Watanabe & Shepherd (2001)
  - 狭い幅のエネルギースペクトルを初期値にした場合

$$E_{\mathrm{total}}(k) \sim N k^5$$

  - DNSによる検証
  - YY84 とIWS01は等価

$$E_{\mathrm{kinetic}}(k) = k^2 E_{\mathrm{total}}(k)$$

本研究の目的

- 減衰性α乱流系の赤外領域スペクトルを求める
  - α乱流系（一般化された2次元流体系）

(Pierrehumbert, *et al.*, 1994)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi,\, q) = \nu \nabla^2 q$$

$$q = -(-\nabla^2)^{\alpha/2}\psi, \qquad \alpha \leq 3$$

（Iwayama & Watanabe, 2010)

- $\alpha = 2;\mathrm{NS}$
- $\alpha = 1;\mathrm{SQG}$
- $\alpha = -2;\mathrm{CHM\text{-}AM}$

- エンストロフィースペクトル $Q_\alpha(k)$ に注目

$$Q_\alpha \equiv \frac{1}{2}\int q^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \int_0^\infty Q_\alpha(k)\,\mathrm{d}k$$

赤外領域スペクトルの導出

- エンストロフィースペクトルの発展方程式
  - EDQNM 完結方程式 (Burgess & Shepherd, 2013)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) Q_\alpha(k) = T_\alpha^Q(k)$$

- 赤外領域スペクトルは, エネルギー保持領域との非局所相互作用で形成される (K76, BLS78, IWS01)
  - $k \ll l \sim m$ となるtriad interactionの効果を取り出す
  - 微小パラメタ $\epsilon \equiv k/l$ による $T_\alpha^Q(k)$ の展開
- エンストロフィースペクトルの赤外領域での級数展開

$$\begin{aligned} Q_\alpha(k) &= \int \langle q(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\rangle \, kr J_0(kr) \, \mathrm{d}r \\ &= Jk + Lk^3 + Ik^5 + \ldots \end{aligned}$$

赤外領域スペクトルの導出

- エンストロフィースペクトルの発展方程式

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}k + \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}k^3 + \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}k^5 \ldots \simeq \frac{\alpha^2}{4}\left\{\int l^{-(2\alpha+1)}\theta_{kll}Q_\alpha(l)^2\,\mathrm{d}l\right\}k^5$$

- 不変量の存在

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad J = \int \langle q(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\rangle\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad L = -\frac{1}{4}\int r^2\langle q(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\rangle\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

- 3つのケース

$$\underbrace{Q_\alpha(k) \sim Jk\,,\ Q_\alpha(k) \sim Lk^3}_{\text{過渡的に存在}},\ \underbrace{Q_\alpha(k) \sim Ik^5}_{\text{高波数側から浸食}}$$

- 急峻な初期スペクトルからの発展では

$$Q_\alpha(k) \sim Ik^5$$

数値実験による検証

- 数値実験の概要
  - 計算領域： $8\pi \times 8\pi$
  - 周期境界条件
  - 解像度： 4096^2
  - スペクトル法（位相シフト法によるエリアジング除去）
  - 2次のAdams-Bashforth法（Courant数　0.1）
  - 初期スペクトル
    - $s = 1,\ 3,\ 5,\ 7$

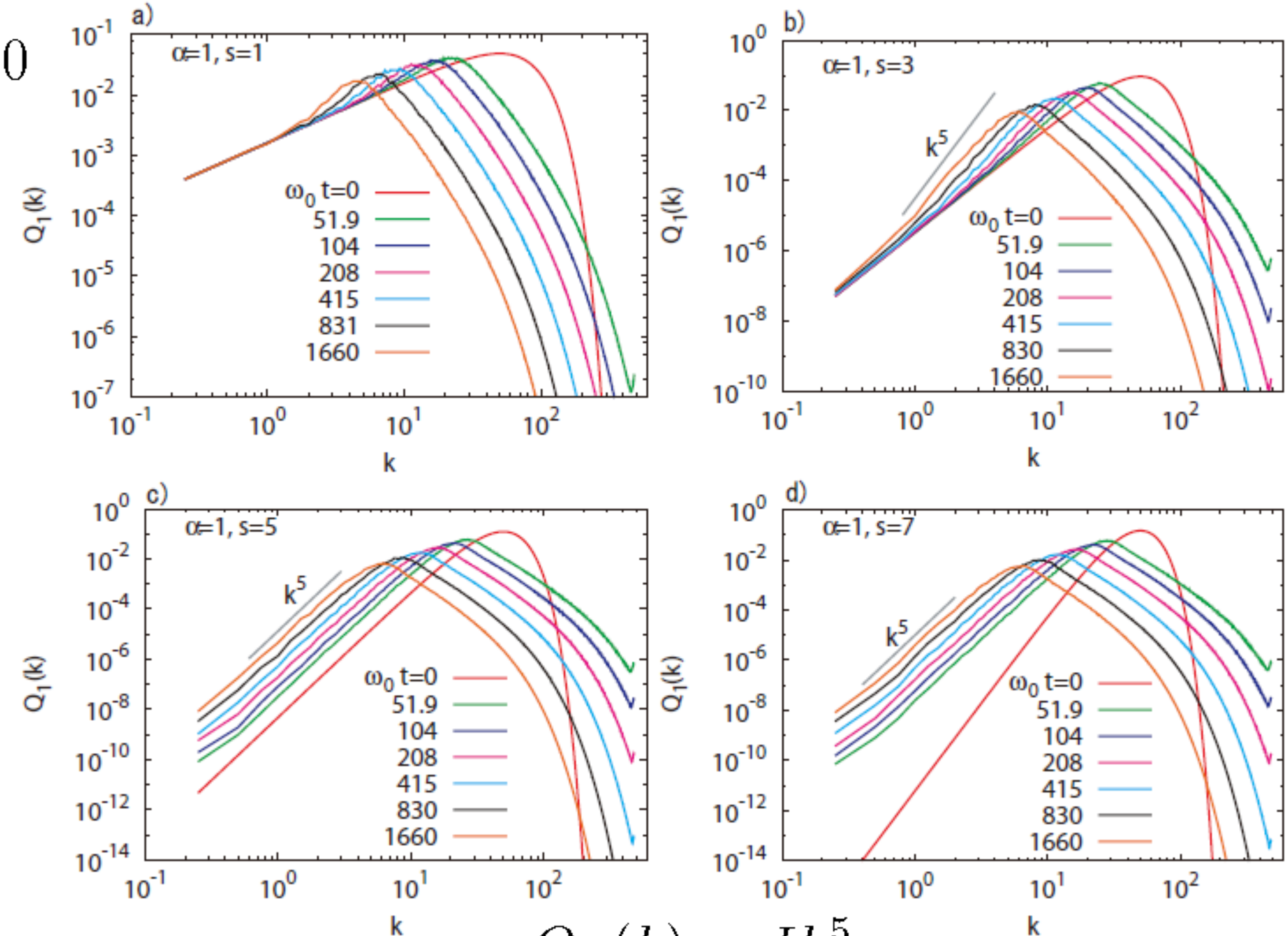
$$Q_\alpha(k) \sim k^s \exp\left[-\frac{|s|}{2}\frac{k^2}{k_{\mathrm{p}}^2}\right]$$

  - 8アンサンブル平均
  - $Re = 100$
  - $\alpha = 1,\ 2,\ 3$

数値実験による検証 (α=1)

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$$

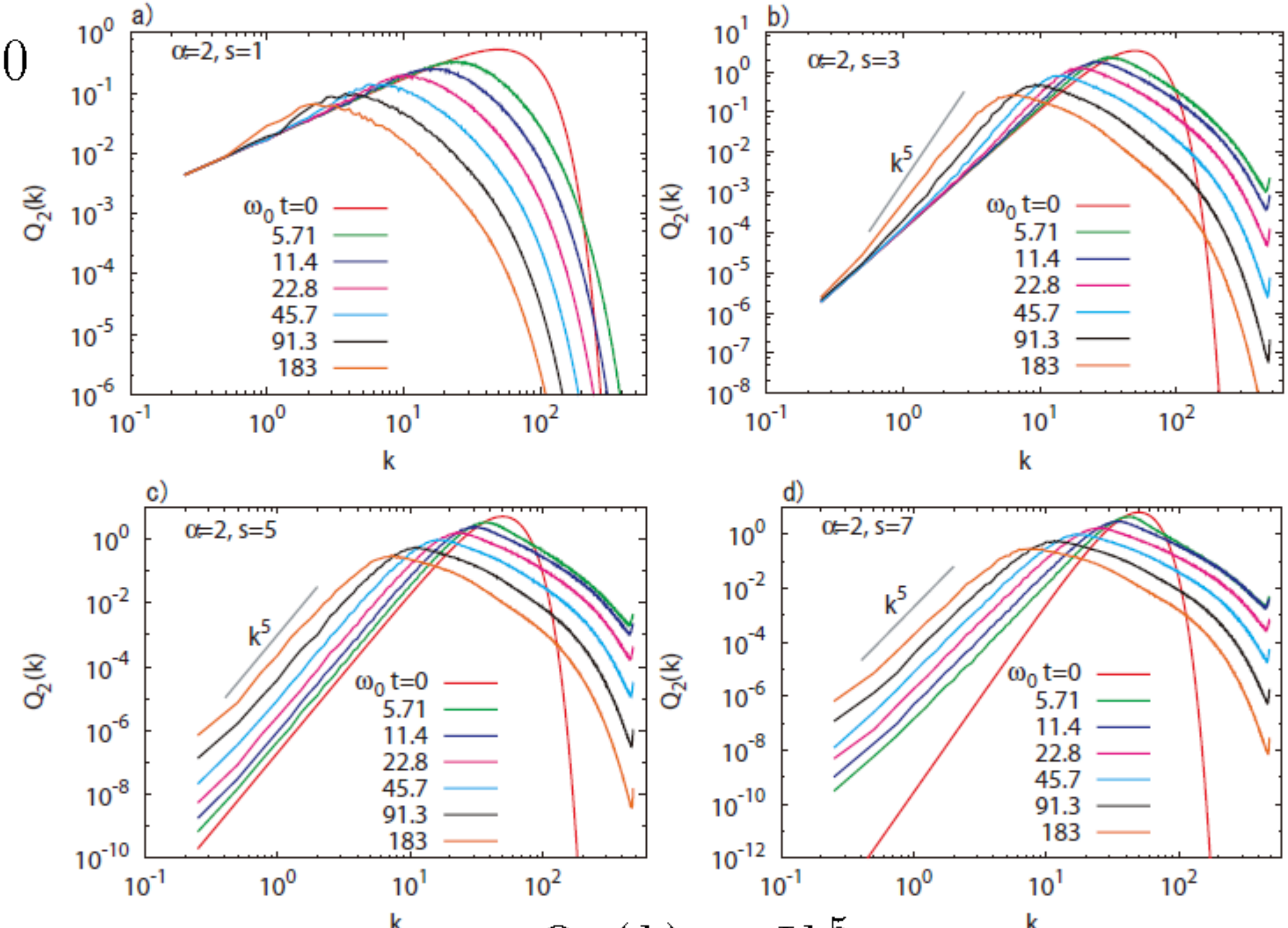


$$Q_\alpha(k) \sim I k^5$$

数値実験による検証 (α=2)

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$$

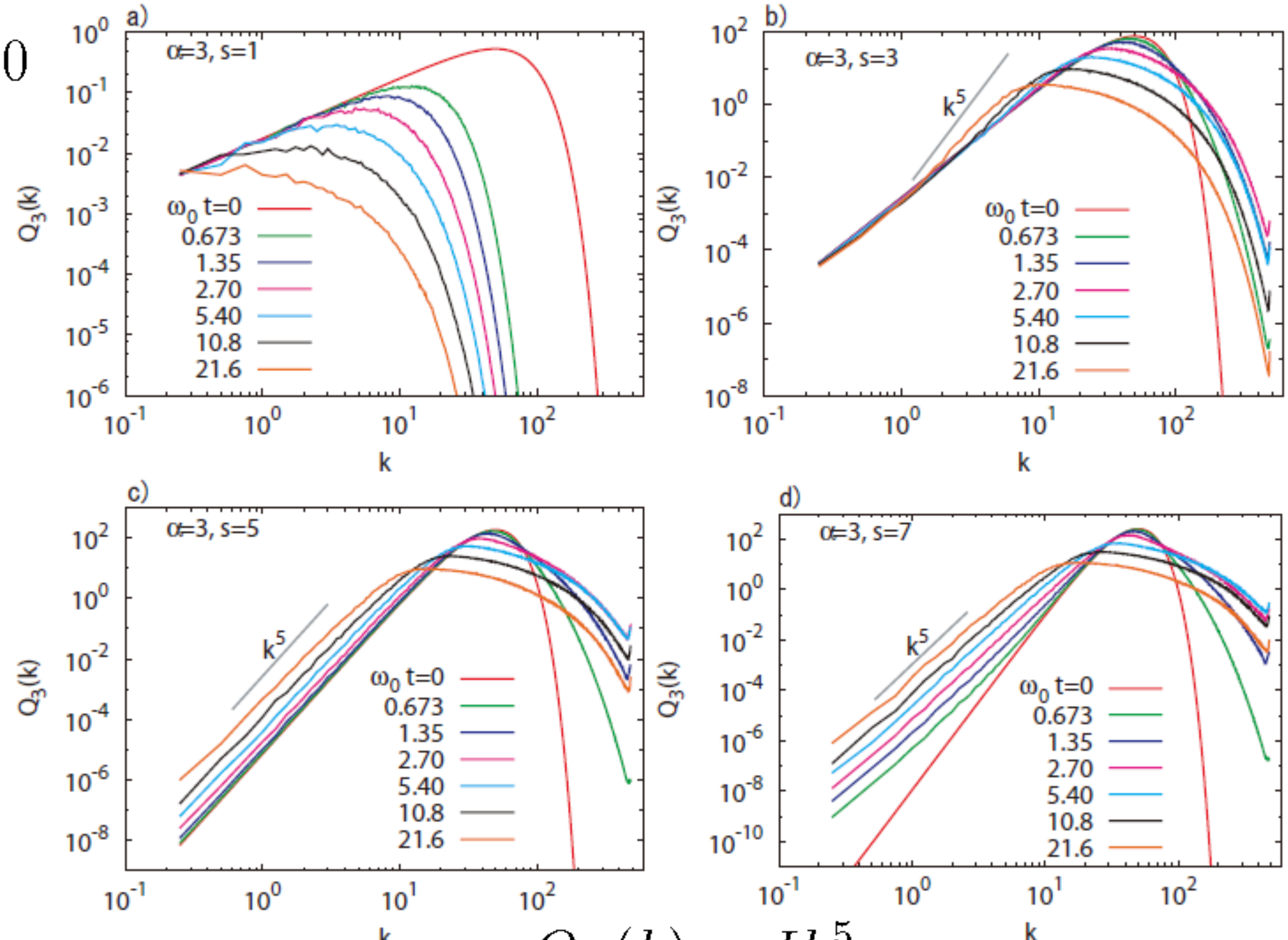


$$Q_\alpha(k) \sim I k^5$$

数値実験による検証 (α=3)

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$$



$$Q_\alpha(k) \sim I k^5$$

結論

- 減衰性α乱流の赤外領域の力学
  - 普遍的なスペクトルの存在

$$Q_\alpha(k) \sim Ik^5$$

  - 過渡的なスペクトル

$$Q_\alpha(k) \sim Jk, \; Q_\alpha(k) \sim Lk^3$$

  - 不変量の存在

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad J = \int \langle q(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\rangle \,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad L = -\frac{1}{4}\int r^2 \langle q(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\rangle \,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

  - 不変量の物理的意味は？