

# 2次元乱流における異常渦粘性

岩山隆寛, 村上真也 (神戸大・理)

[iwayama@kobe-u.ac.jp](mailto:iwayama@kobe-u.ac.jp)

渡邊威 (名工大・工)

[watanabe@nitech.ac.jp](mailto:watanabe@nitech.ac.jp)

2014. 7. 7 第65回惑星大気研究会オンラインセミナー

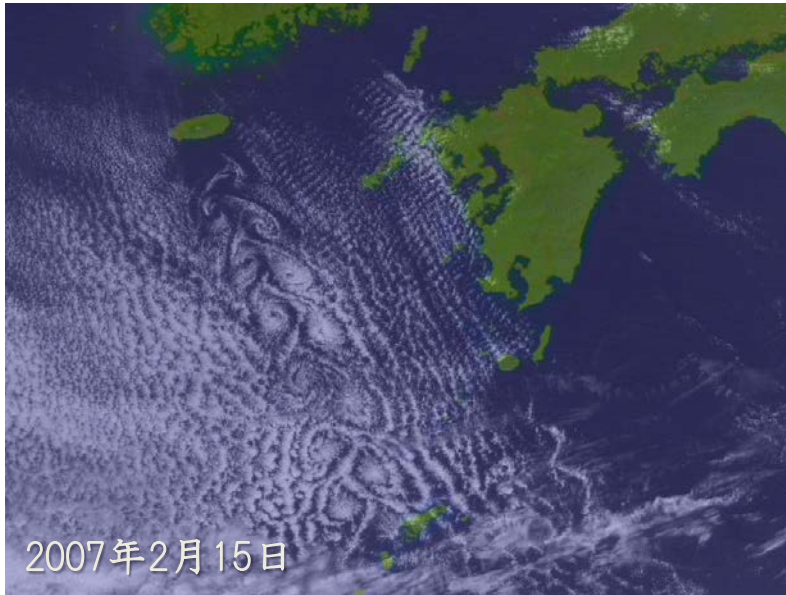
# 目次

1. はじめに
  - 渦粘性とは
2. 研究対象：一般化された2次元流体系
  - 支配方程式
  - 基本的性質
  - 過去の研究
  - 本研究の目的
3. 一般化された2次元流体系の渦粘性
  - 定式化
  - EDQNM完結近似方程式の解析・数値計算
  - DNSによる検証
4. 考察
  - ・・・未完成
5. まとめ

はじめに

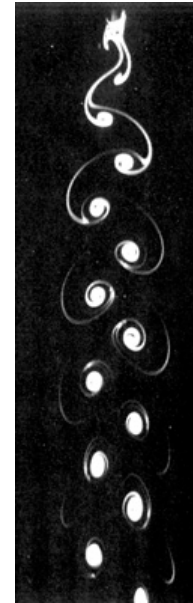
# 渦粘性の物理的例

- 濟州島の風下にできるKarman渦列



高知大学気象情報頁

[http://weather.is.kochi-u.ac.jp/wiki/inwxhome/20070215karman\\_e6\\_b8\\_a6](http://weather.is.kochi-u.ac.jp/wiki/inwxhome/20070215karman_e6_b8_a6)



Reynolds数

$$Re = \frac{UD}{\nu}$$

$U$ : 流速

$D$ : 円柱の直径

$\nu$ : 粘性係数

Karman渦ができる条件

$$Re \approx 10^2$$

- 濟州島の条件では、粘性係数が空気の粘性係数の  $10^8$  倍...

**渦粘性**

$$\nu = \frac{UD}{Re} \approx \frac{10 \text{ [m/s]} \times 10^4 \text{ [m]}}{10^2} = 10^3 \text{ [m}^2\text{/s]}$$

# 数値計算における渦粘性

- 支配方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 格子サイズ  $\Delta x$

- 格子サイズ以上の現象と格子サイズ以下の現象に分離

$$A = \bar{A} + A'$$

- 上付き線：格子サイズで平均。

$$\overline{A'} = 0$$

- 格子で表現できる現象の支配方程式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \overline{u'u'} \right)}$$

格子で表現できる現象と格子サイズ以下の現象との相互作用

しばしば  $\nu_{\text{eddy}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$  とおく

# 乱流の特徴

- 微小擾乱に対する不安定性
- 巨大自由度
- 大きな輸送能力
- 強い非線形性
- 散逸性

乱流理論の基礎知識（後藤俊幸，朝倉書店，1998）

# 本研究の目的

- 一般化された2次元流体系における渦粘性を求める

一般化された2次元流体系



# 本研究の対象

- 一般化された2次元流体系 ( $\alpha$  乱流系)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = \nu \nabla^2 q \quad (\text{Pierrehumbert, et al., 1994})$$

$$q = -(-\nabla^2)^{\alpha/2} \psi$$

$q$ : (一般化) 渦度,  $\alpha$ : 実数 ( $\alpha \leq 3$ , Iwayama & Watanabe, 2010)

$\psi$ : 流れ関数,  $J(f, g) = \partial_x f \partial_y g - \partial_y f \partial_x g$ : Jacobian

- $\alpha = 2$  : Navier–Stokes系
- $\alpha = 1$  : Surface-Quasi-Geostrophic (SQG) 系 (Held, 1995)
- $\alpha = -2$  : Charney-Hasegawa-Mima方程式系の漸近モデル  
(CHM-AM) (Larichev & McWilliams, 1991)

地球流体力学的2次元系

# 一般化された2次元流体系の研究目的

- 地球流体力学的2次元流体系を統一的な観点から研究・理解する
- 2D Euler/NS 系のもつ普遍性や特殊性を明らかにする
  - $\alpha$  の値に依存しない性質 . . . 普遍性
  - $\alpha$  の値に対して連続的に変化する性質 . . . 特殊性
    - ある  $\alpha$  の値での性質の転移

# 一般化された2次元流体系の非粘性保存量

- 2次元NS系と同様に2つの非粘性保存量が存在する。

- (一般化) エネルギー

$\langle \cdot \rangle$ : 空間平均

$$\mathcal{E}_\alpha \equiv -\frac{1}{2} \langle \psi q \rangle$$

- (一般化) エネルギースペクトル:  $E_\alpha(k)$

$$\mathcal{E}_\alpha \equiv \int_0^\infty E_\alpha(k) dk$$

- (一般化) エンストロフィー

$$\mathcal{Q}_\alpha \equiv \frac{1}{2} \langle q^2 \rangle$$

- (一般化) エンストロフィースペクトル:  $Q_\alpha(k)$

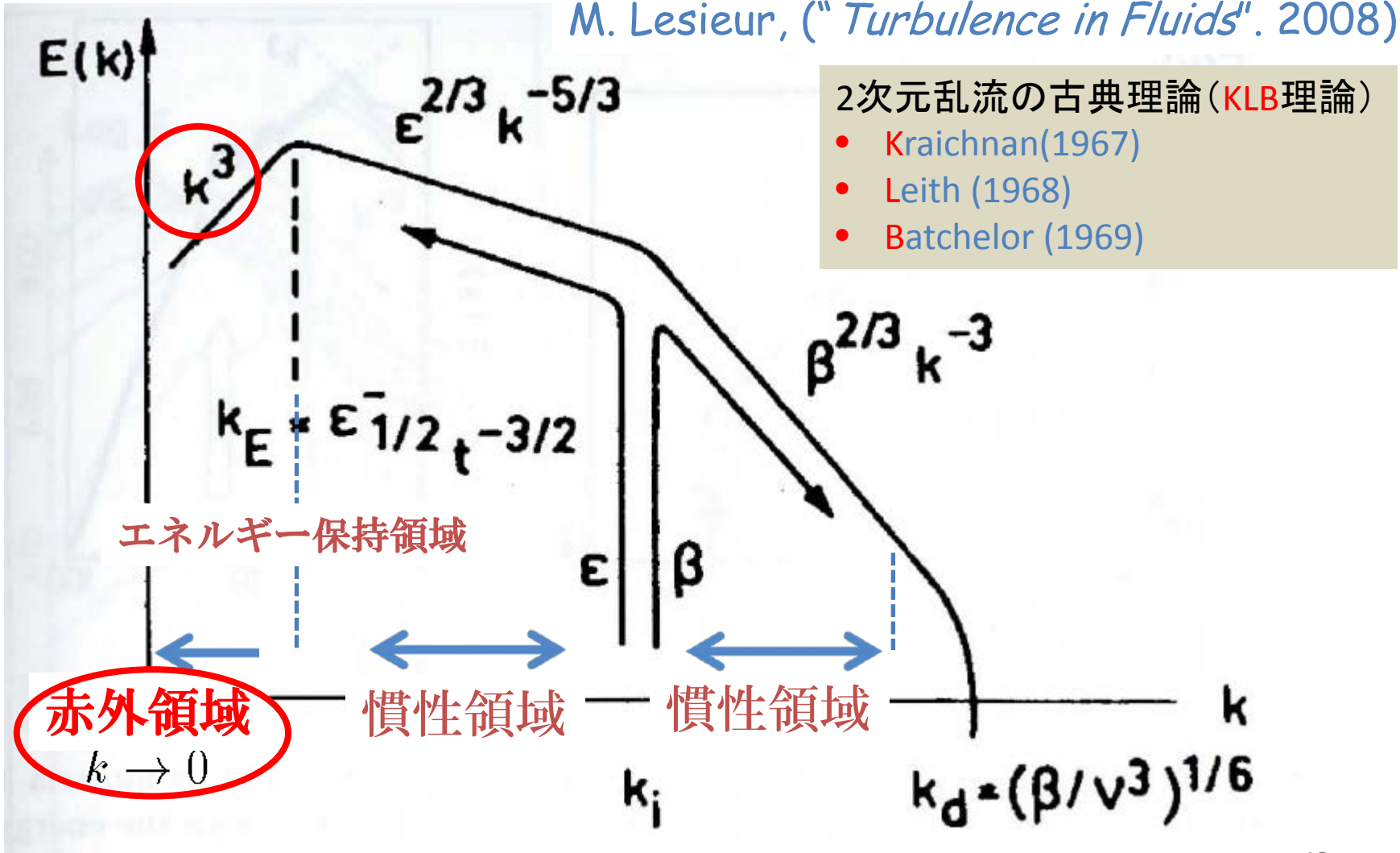
- スペクトルの関係

$$\mathcal{Q}_\alpha \equiv \int_0^\infty Q_\alpha(k) dk$$

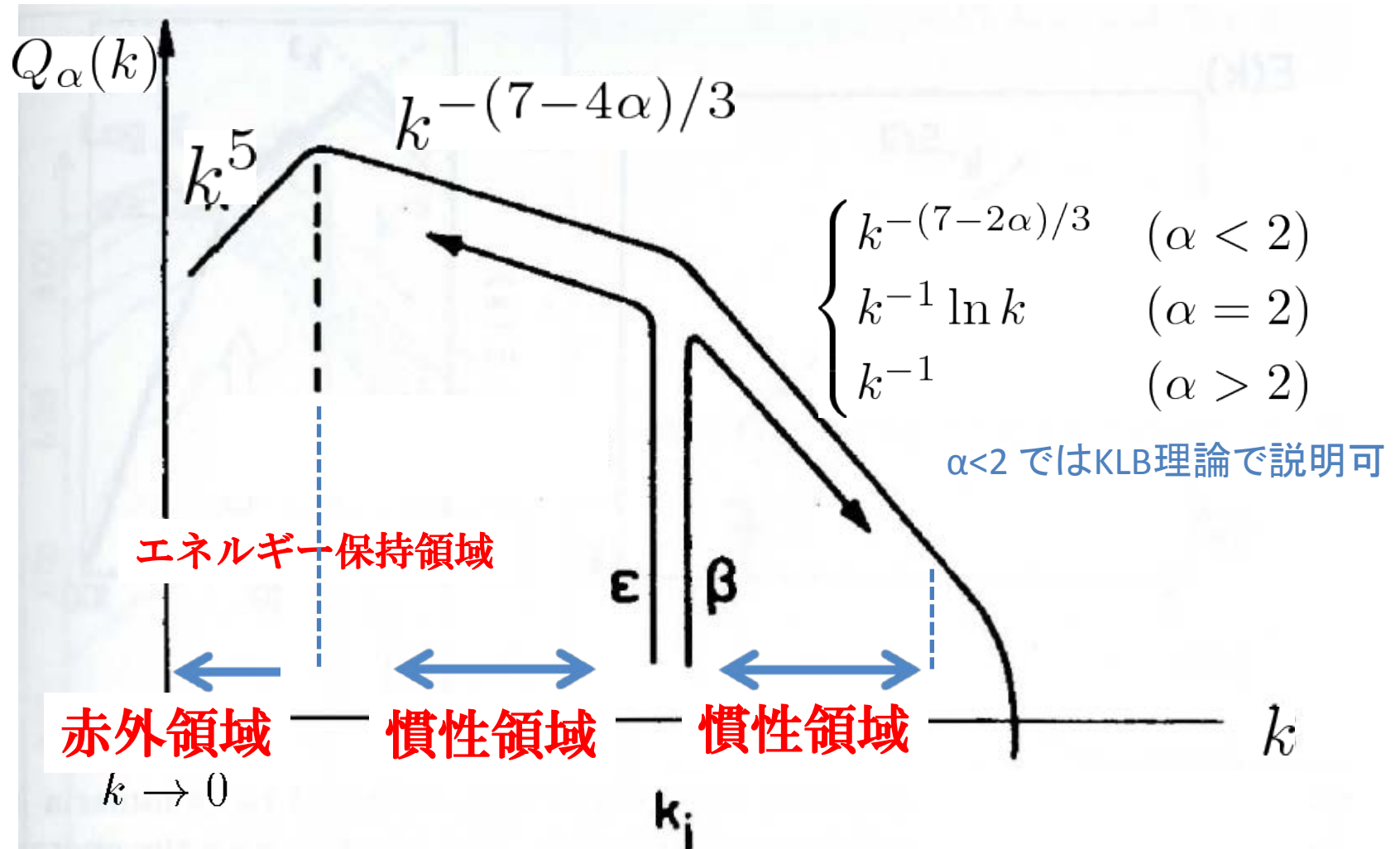
$$Q_\alpha(k) = k^\alpha E_\alpha(k)$$

# 強制2次元NS乱流のエネルギースペクトル

M. Lesieur, ("Turbulence in Fluids". 2008)



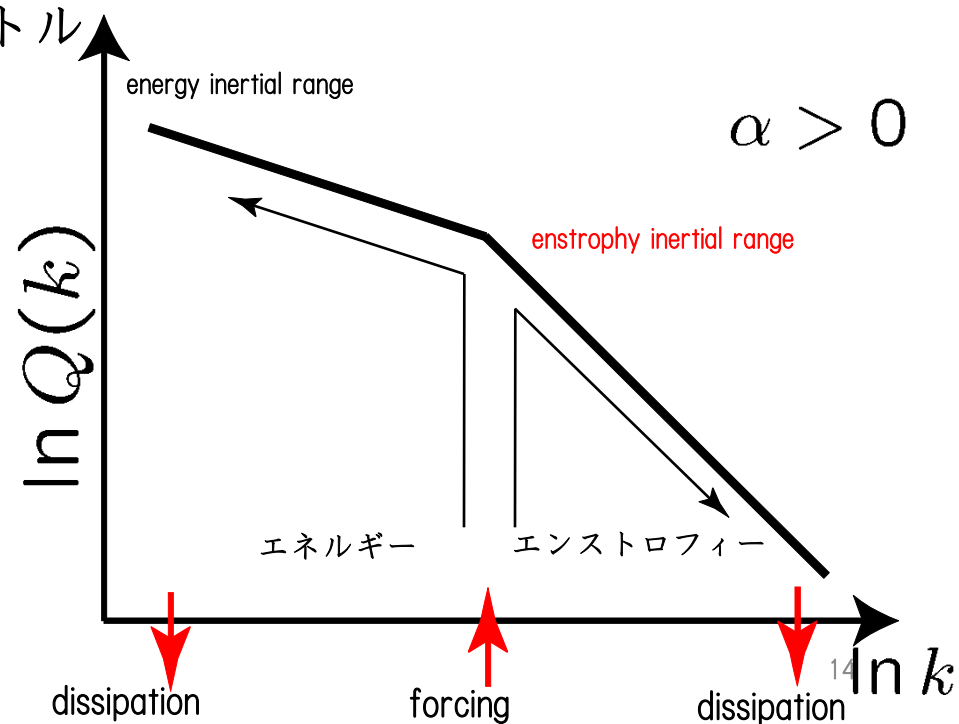
# 一般化された2次元流体系のスペクトル



# 一般化された2次元流体系の過去の研究

乱流研究が精力的に行われてきた

- 強制散逸一様等方性乱流
  - エンストロフィー慣性領域のスペクトル
    - Pierrehumbert *et al.* (1994)
    - Schorghofer (2000)
    - Watanabe & Iwayama (2004, 2007)
    - Tran *et al.* (2010)
  - エネルギー慣性領域のスペクトル
    - Smith *et al.* (2002)
    - Burgess & Shepherd (2013)
- 非等方乱流
  - Sukhatme & Smith (2009)
- 二重カスケード過程
  - Tran (2004)
  - Gkioulekas & Tung (2007)
  - Burgess & Shepherd (2013)
- 赤外領域スペクトル
  - Iwayama & Watanabe (2014)



# 本研究の目的

- 一般化された2次元流体系における渦粘性を求める
  - ある波数  $k_c$  (切断波数) よりも大きな波数で系を切断した時の,  $k < k_c$  のモードの発展に与える影響 (渦粘性) を調べる
  - 任意の  $\alpha$  で渦粘性は研究されていない.  
NS系 ( $\alpha=2$ ) ではKraichnan (1976) で研究されている
  - 渦粘性の  $\alpha$  依存性を調べる.
- 方法
  1. 完結近似方程式の解析的計算
  2. 完結近似方程式の数値計算
  3. 直接数値シミュレーション

# 一般化された2次元流体系の渦粘性



# 定式化

- 支配方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = \nu \nabla^2 q, \quad q = -(-\nabla^2)^{\alpha/2} \psi$$

- 領域：無限平面

- ：または正方形領域2重周期境界条件

- 波数空間内の方程式を用いて議論

$$q(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{q}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}$$

- 切断波数  $k_c$  で波数空間を分割

$$\hat{q}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \hat{q}^{(<)}(\mathbf{k}), & (k \leq k_c) \\ \hat{q}^{(>)}(\mathbf{k}), & (k > k_c) \end{cases}$$

- $\hat{q}^{(<)}(\mathbf{k})$  の発展に注目

- 特に  $k_c$  以下のエンストロフィースペクトルの発展に注目

# 定式化

- 支配方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = \nu \nabla^2 q, \quad \hat{q}(\mathbf{k}) = -|\mathbf{k}|^\alpha \hat{\psi}(\mathbf{k})$$

- 領域：無限平面

- ：または正方形領域2重周期境界条件

- 波数空間内の方程式を用いて議論

$$q(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{q}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}$$

- 切断波数  $k_c$  で波数空間を分割

$$\hat{q}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \hat{q}^{(<)}(\mathbf{k}), & (k \leq k_c) \\ \hat{q}^{(>)}(\mathbf{k}), & (k > k_c) \end{cases}$$

- $\hat{q}^{(<)}(\mathbf{k})$  の発展に注目

- 特に  $k_c$  以下のエンストロフィースペクトルの発展に注目

# 定式化

- エンストロフィースペクトルの発展方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) Q_\alpha(k) = T_\alpha(k)$$

– エンストロフィー伝達関数:  $T_\alpha(k)$

- $k + l + m = 0$ を満たすあらゆる波数のモード  $\hat{q}(l)$ ,  $\hat{q}(m)$  との相互作用によりエンストロフィー  $Q_\alpha(k)$  は発展

# 定式化

- エンストロフィースペクトルの発展方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) Q_\alpha(k) = T_\alpha^{(<)}(k|k_c) + T_\alpha^{(>)}(k|k_c)$$

- $q^{(<)}(k)$  のみの相互作用によるエンストロフィー伝達関数:

$$T_\alpha^{(<)}(k|k_c)$$

- $q^{(>)}(k)$  を含む相互作用によるエンストロフィー伝達関数:

$$T_\alpha^{(>)}(k|k_c)$$

- $T_\alpha^{(>)}(k|k_c)$  をどのように表現するか/できるか

- 通常の渦粘性表現

$$T_\alpha^{(>)}(k|k_c) = -2\nu_{\text{eddy}} k^2 Q_\alpha(k)$$

- 渦粘性係数は  $\nu_{\text{eddy}}$  は定数か？
- 常識 (?) : スケール分離が十分  $k \ll k_c$  なら拡散型で  $\nu_{\text{eddy}}$  は定数

- EDQNM完結近似方程式で理論的な見積もりを行う

# EDQNM完結近似方程式の解析

- エンストロフィーの発展方程式

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) Q_\alpha(k) = T_\alpha(k)$$

$$T_\alpha(k) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty T_\alpha(k, l, m) dl dm$$

- Eddy-Damped Quasi-Normal Markovianized 近似

$$T_\alpha(k, l, m) = \frac{2k^{\alpha+2}}{\pi l m} \theta_{klm} \times \quad (\text{Burgess \& Shepherd, 2013})$$

$$\left[ \begin{aligned} & 2a_{klm} \frac{k}{(lm)^\alpha} Q_\alpha(l) Q_\alpha(m) \\ & - \left\{ b_{klm} \frac{l}{(mk)^\alpha} Q_\alpha(m) + b_{kml} \frac{m}{(lk)^\alpha} Q_\alpha(l) \right\} Q_\alpha(k) \end{aligned} \right]$$

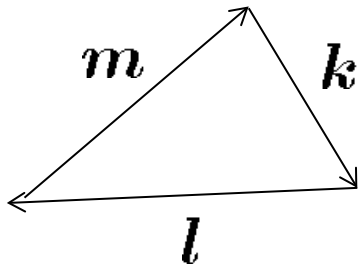
$a_{klm}, b_{klm}$ : 幾何学的因子

$\theta_{klm}$ : 3次モーメントの緩和時間

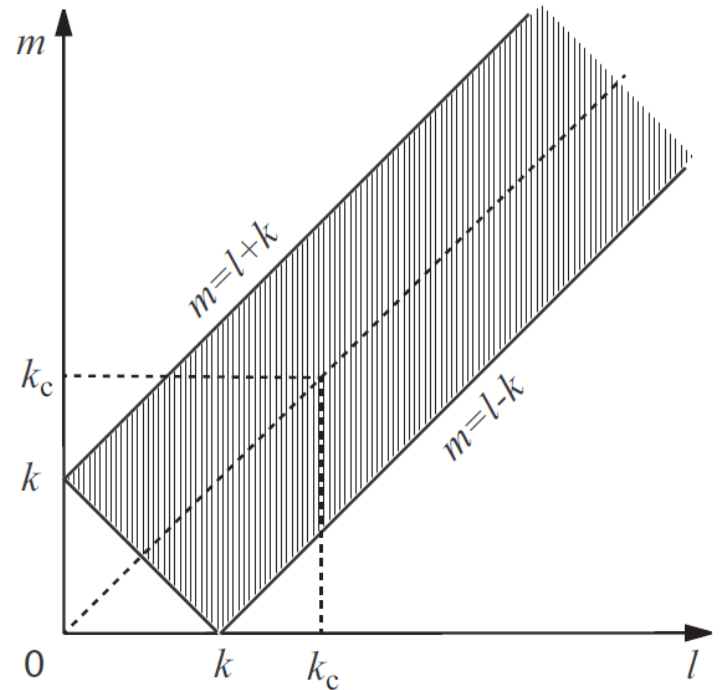
# EDQNM完結近似方程式の解析

- エンストロフィー伝達関数の表現

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha}^{(>)}(k|k_c) &= \int_{k_c}^{\infty} dl \int_{l-k}^l dm T_{\alpha}(k, l, m) \\
 &= \int_{k_c}^{\infty} dl \int_{k/(2l)}^1 dz \frac{kl}{m} T_{\alpha}(k, l, m)
 \end{aligned}$$



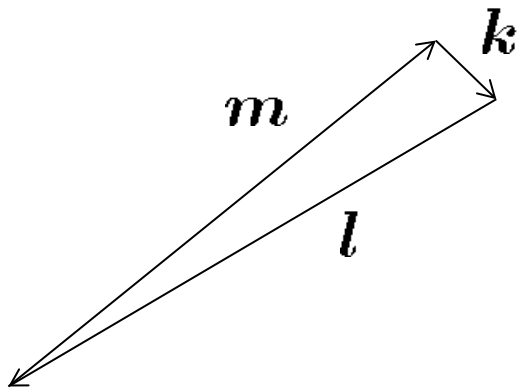
$m$ の向かい側の角度の余弦  $z = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}}{kl}$



$k + l + m = 0$ を満足する波数

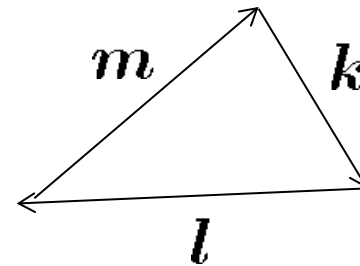
# EDQNM完結近似方程式の解析

- $k \ll k_c$  に注目
- エンストロフィー伝達関数のうち,  $k \ll l \simeq m$  のモードの寄与を計算
  - 微小パラメター  $\epsilon \equiv k/l$  による  $T_\alpha(k, l, m)$  の展開



non-local triad

$$k + l + m = 0$$



local triad

# EDQNM完結近似方程式の解析

- エンストロフィー伝達関数の展開の最低次の項
  - 詳しい計算は Iwayama & Watanabe (2014)を参照

$$\begin{aligned}
 T_\alpha(k, l, m) \simeq & \frac{4z^2 \sqrt{1-z^2}}{\pi} \theta_{kll} \times \\
 & \left[ \alpha^2 l^{-(2\alpha+1)} Q_\alpha(k)^2 k^4 \quad \leftarrow \text{赤外領域で重要} \right. \\
 & - \alpha l^{-\alpha} \left\{ \frac{\partial l Q_\alpha(l)}{\partial l} - 2Q_\alpha(l) \right\} k^{3-\alpha} Q_\alpha(k) H(\alpha) \\
 & \left. + \alpha l^{-2\alpha} \left\{ \frac{\partial l Q_\alpha(l)}{\partial l} - (\alpha + 2)Q_\alpha(l) \right\} k^3 Q_\alpha(k) H(-\alpha) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_\alpha^{(>)}(k|k_c) &= \int_{k_c}^{\infty} dl \int_{k/(2l)}^1 dz \frac{kl}{m} T_\alpha(k, l, m) & H(\alpha) &= \begin{cases} 1 & (\alpha > 0) \\ 0 & (\alpha < 0) \end{cases} \\
 &\simeq \int_{k_c}^{\infty} dl \int_0^1 dz \frac{kl}{m} T_\alpha(k, l, m)
 \end{aligned}$$

$kT_\alpha(k, l, m)$  が伝達関数の波数依存性



# EDQNM完結近似方程式の解析

- $k \ll k_c$ においてエンストロフィー伝達関数の表現

$$T_{\alpha}^{(>)}(k|k_c) = \begin{cases} -2\nu_{\text{eddy}}^{(+)}(k|k_c)k^{4-\alpha}Q_{\alpha}(k), & (\alpha > 0) \\ -2\nu_{\text{eddy}}^{(-)}(k|k_c)k^4Q_{\alpha}(k), & (\alpha < 0) \end{cases}$$

–  $k \ll k_c$ において渦粘性は拡散型ではない

- NSのときにのみ拡散型

– 渦粘性係数

$$\nu_{\text{eddy}}^{(+)}(k|k_c) = \frac{\alpha}{8} \int_{k_c}^{\infty} \theta_{kll} l^{-\alpha} \left[ \frac{\partial \{lQ_{\alpha}(l)\}}{\partial l} - 2Q_{\alpha}(l) \right] dl$$

$$\nu_{\text{eddy}}^{(-)}(k|k_c) = \frac{|\alpha|}{8} \int_{k_c}^{\infty} \theta_{kll} l^{-2\alpha} \left[ \frac{\partial \{lQ_{\alpha}(l)\}}{\partial l} - (\alpha + 2)Q_{\alpha}(l) \right] dl$$

- 渦粘性係数の符号は[ $\cdot$ ]の中の符号できまる
- $Q_{\alpha}(l) \propto l^{-n}$  のとき  $n > -1$  であれば  $\nu_{\text{eddy}}^{(+)}(k|k_c) < 0$

# EDQNM完結近似方程式の数値計算

- EDQNM完結近似方程式のエンストロフィー伝達関数を具体的に計算

$$T_{\alpha}^{(>)}(k|k_c) = \int_{k_c}^{\infty} dl \int_{l-k}^l dm T_{\alpha}(k, l, m)$$

$$T_{\alpha}(k, l, m) = \frac{2k^{\alpha+2}}{\pi lm} \theta_{klm} \times \left[ 2a_{klm} \frac{k}{(lm)^{\alpha}} Q_{\alpha}(l) Q_{\alpha}(m) - \left\{ b_{klm} \frac{l}{(mk)^{\alpha}} Q_{\alpha}(m) + b_{kml} \frac{m}{(lk)^{\alpha}} Q_{\alpha}(l) \right\} Q_{\alpha}(k) \right]$$

- 仮定：エネルギー慣性領域のKraichnan-Leith-Batchelorスペクトルを仮定

$$Q_{\alpha}(k) \propto k^{-(7-4\alpha)/3}$$

- EDQNMの解析からの示唆を考慮して以下をプロット

$$\begin{cases} -T_{\alpha}^{(>)}(k|k_c) / \{2k^{4-\alpha} Q_{\alpha}(k)\}, & (\alpha > 0) \\ -T_{\alpha}^{(>)}(k|k_c) / \{2k^4 Q_{\alpha}(k)\}, & (\alpha < 0) \end{cases}$$

# EDQNM完結近似方程式の数値計算

- $k \ll k_c$  において渦粘性係数は一定値に近づく

$$T_{\alpha}^{(>)}(k|k_c) = \begin{cases} -2\nu_{\text{eddy}}^{(+)}(k|k_c)k^{4-\alpha}Q_{\alpha}(k), & (\alpha > 0) \\ -2\nu_{\text{eddy}}^{(-)}(k|k_c)k^4Q_{\alpha}(k), & (\alpha < 0) \end{cases}$$

– NSのときにのみ拡散型。それ以外の $\alpha$ では異常拡散型

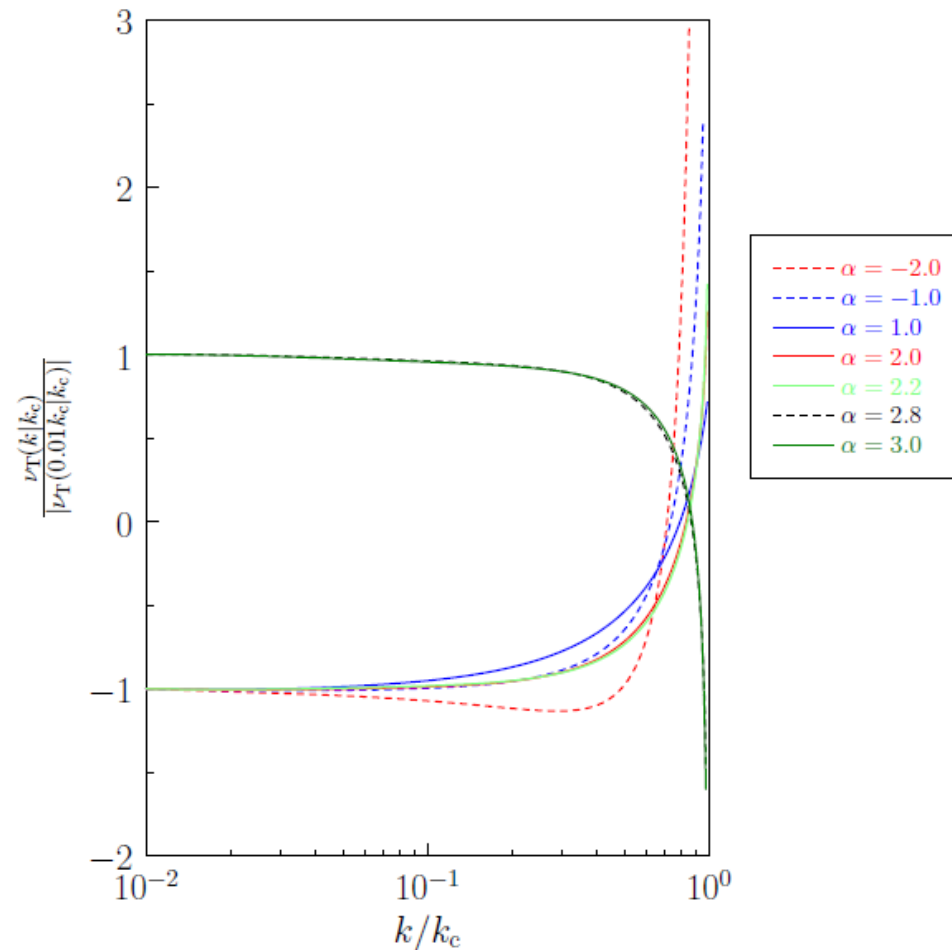
- $k \ll k_c$  における渦粘性係数の符号

- $\alpha < 2.5$  のとき負
- $\alpha > 2.5$  のとき正

$\alpha > 2.5$  のときにはEDQNM方程式のエネルギー慣性領域におけるエネルギーフラックスは高波数に向く

(Burgess & Shepherd, 2013)

- $k \simeq k_c$  では渦粘性表現はよい近似でない



# EDQNM完結近似方程式の数値計算

- Kraichnan (1976) との比較

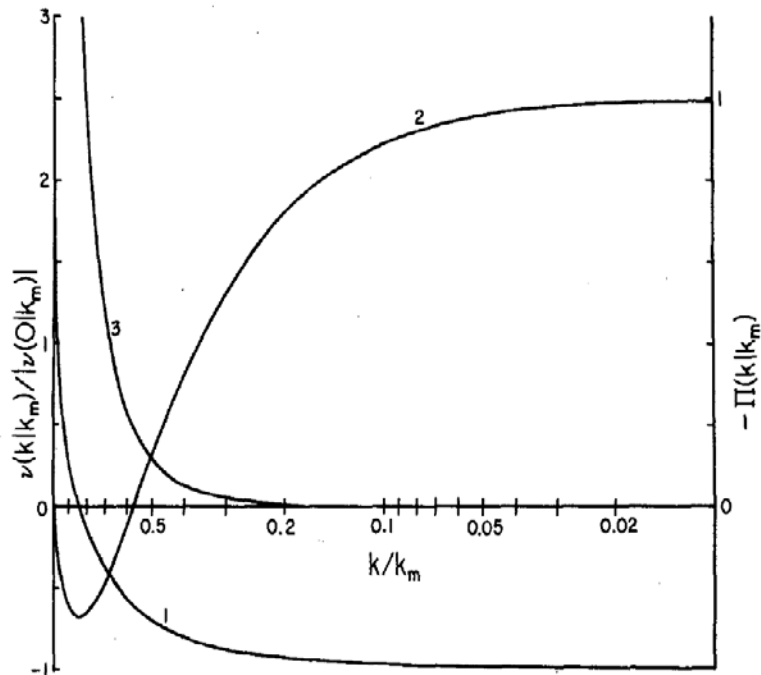
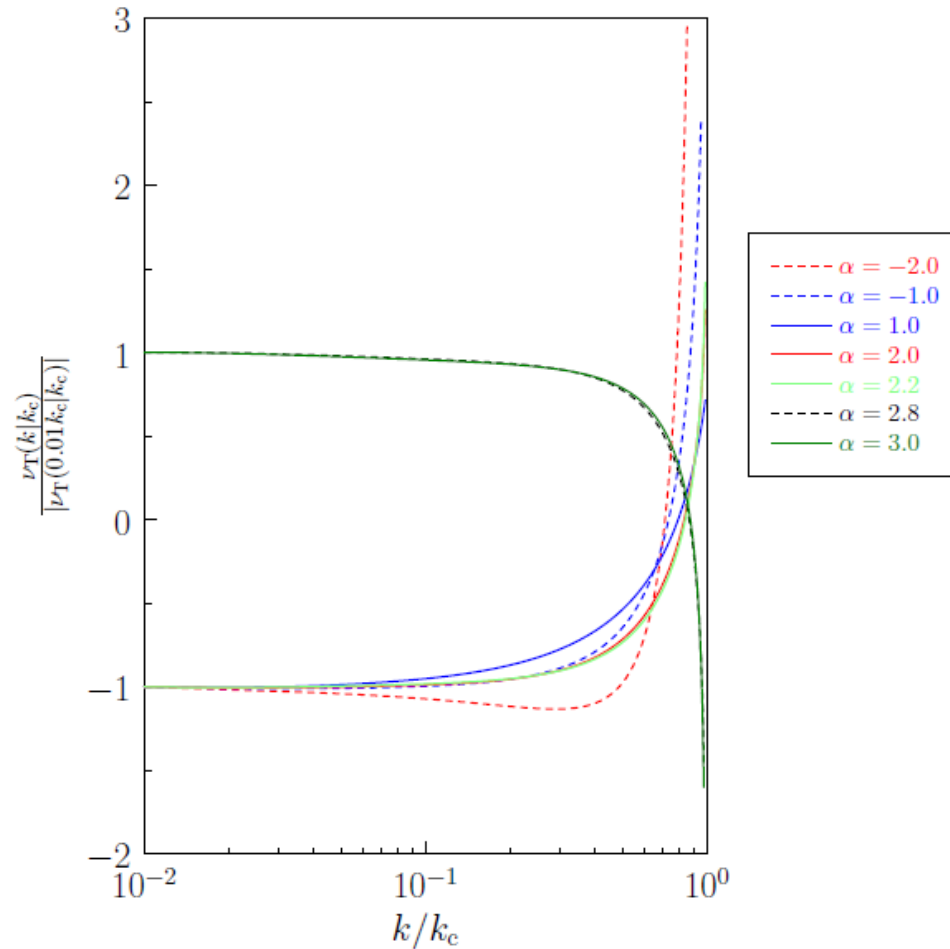


FIG. 2. Energy transfer across  $k_m$  in the two-dimensional energy inertial range. Curve 1, normalized eddy viscosity  $\nu(k|k_m)/|\nu(0|k_m)|$ ; curve 2, integrated transfer  $-\Pi(k|k_m)$ ; curve 3, input contribution  $-\nu_i(k|k_m)/|\nu(0|k_m)|$ .

Kraichnan (1976)

NS系. TFMでの計算



# 直接数値計算による検証

- 支配方程式の直接数値シミュレーションで先の結果を確かめる
- 完結近似方程式は，渦構造や間欠性を取り込めていない理論
- 渦構造が渦粘性の波数依存性，符号を変えるか？
  - 特に  $\alpha > 2.5$  のときの符号は？

# 直接数値実験による検証

- 数値実験の概要

- 計算領域：  $2\pi \times 2\pi$

- 周期境界条件

- 解像度：  $2048^2$

- スペクトル法: 切断波数 682

- 3次のAdams-Bashforth法

- 強制散逸乱流

- Markov的強制. 強制波数(  $k_f = 280$  を中心に波数  $\pm 2$  の幅)

- 超粘性による散逸：  $D \equiv -\nu_4(\nabla^2)^4 q$

- エネルギー慣性領域を実現

- エンストロフィー慣性領域も狭いながら実現

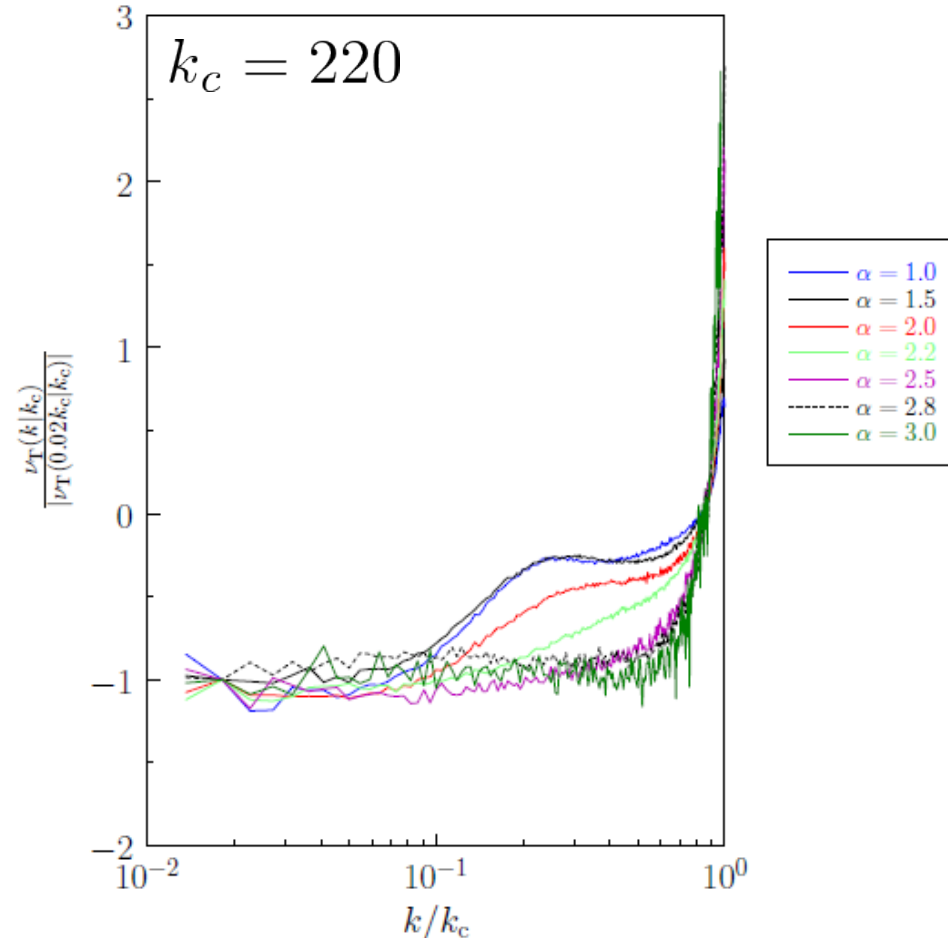
- $\alpha = 1, 1.5, 2, 2.2, 2.5, 2.8, 3$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = D + \mathcal{F}$$

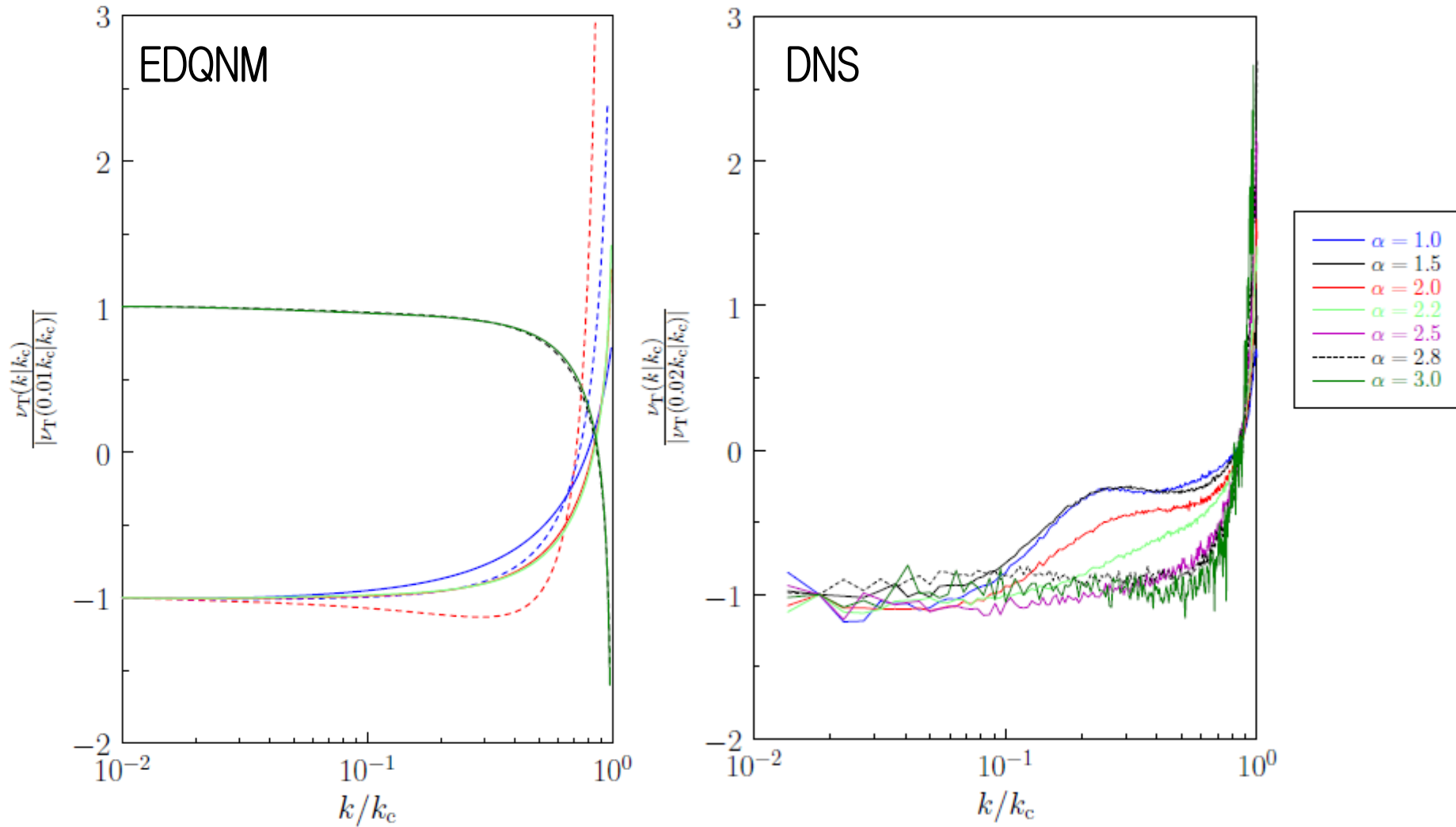
$$q = -(-\nabla^2)^{\alpha/2} \psi$$

# 直接数値実験による検証

- $k \ll k_c$  において渦粘性係数は一定値に近づく
- $k \ll k_c$  における渦粘性係数の符号
  - $\alpha > 2.5$  のときも負
  - $\alpha > 2.5$  でもエネルギー慣性領域におけるエネルギーフラックスは低波数側に向く(Burgess & Shepherd, 2013)
- $k \simeq k_c$  では渦粘性表現はよい近似でない
- $k_c$  を変えても結論は変わらない
  - $k_c = 220, 300, 600$



# EDQNM と DNS の比較





# 考察

## 疑問点

- なぜ渦粘性係数は負なのか？
- なぜ渦粘性の波数依存性は  $k^{4-\alpha}$  なのか？
- $k^{4-\alpha}$  となる微視的プロセスの物理モデルは？
- 他の方法で同じ結果が示せるか？

## なぜ渦粘性係数は負なのか？

- Fjortoftの定理で説明

- 3つの波数間でエネルギーとエンストロフィーを分配
- ただし，エネルギーとエンストロフィーを保存するという条件のもとで

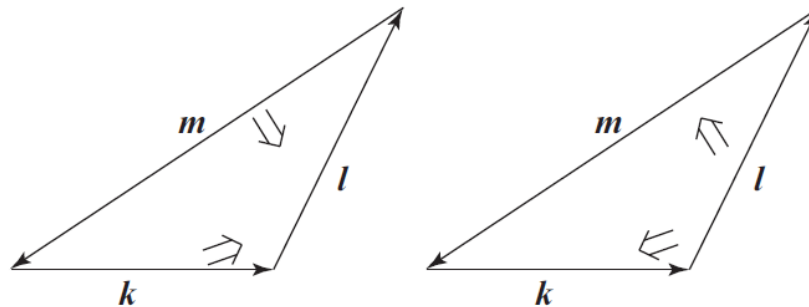


図 5.1  $k + l + m = 0, k < l < m$  を満たすモード間でのエネルギーやエンストロフィーの輸送.  $\leftarrow$  がエネルギーやエンストロフィーの輸送される方向を表す.

- 中間の波数から高波数側，低波数側へ向けてエネルギー，エンストロフィーが輸送されているとする
- $k \ll k_c \leq l \simeq m$  ではエネルギー/エンストロフィーフラックスは常に低波数向き

# なぜ渦粘性の波数依存性は $k^{4-\alpha}$ なのか？

- 流れ関数と（一般化）渦度の関係式から説明できないか？

$$q = -(-\nabla^2)^{\alpha/2} \psi$$

- 点渦によって作られる流れ関数(Green関数)

$$G_\alpha(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \propto \begin{cases} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|, & (\alpha = 2) \\ 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{2-\alpha}, & (\alpha \neq 2) \end{cases}$$

Iwayama & Watanabe (2010)

- D次元Poisson方程式のGreen関数

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \propto 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{D-2}$$

- したがって，距離依存性を眺めると

$$D = 4 - \alpha \quad \dots \text{フラクタル次元}$$

- 特性指数  $\beta$  の対称な安定分布に従うランダムウォークの変位を記述する確率方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{p}(k, t) = -\kappa k^\beta \hat{p}(k, t) \quad \dots \text{特性指数はフラクタル次元}$$

とみなせることができる (高安, 1986)

$k^{4-\alpha}$ となる微視的プロセスの物理モデルは？

- 最近接格子へのランダムな移動の物理的モデルは拡散方程式になる

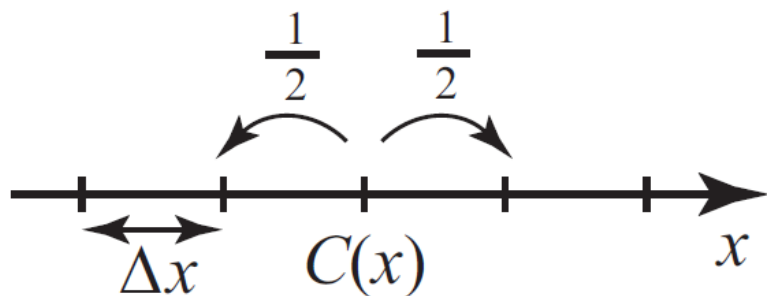


図 6.1 拡散現象の確率論的モデル

$$\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) = -\kappa \nabla^2 C(x, t)$$

- ? ? ?

# 他の方法で同じ結果が示せるか？

- 他の方法としての候補
  - － 繰り込み群

まだ具体的計算はしていない。

# まとめ

- 一般化された2次元流体の乱流状態の渦粘性を理論的・数値実験的に調べた。
  - 系をある波数  $k_c$  で切断したとき，切断が切断波数よりも低波数のモードに及ぼす影響を調べた
  - スケール分離が十分  $k \ll k_c$  であっても
    - $\alpha > 0$  のとき波数の  $4 - \alpha$  乗に比例
    - $\alpha < 0$  のとき波数の  $4$  乗に比例
    - NS系 のときのみ渦粘性は拡散型
  - $k \ll k_c$  のとき渦粘性係数は負である