

修士論文

自転軸対称な大気大循環に関する研究  
—ハドレー循環とスーパーローテーション—

山本博基

京都大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻

2009年2月

# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	ハドレー循環	2
1.2	スーパーローテーション	8
1.3	本研究の着眼点・目的	16
第 2 章	支配方程式系	19
2.1	軸対称ブシネスク流体プリミティブ方程式系	19
2.2	無次元化	20
第 3 章	実験設定	23
3.1	スweepパラメータ	23
3.2	数値モデル	24
第 4 章	実験結果	25
4.1	定常解	26
4.2	非定常解	29
第 5 章	力学的解析	31
5.1	スーパーローテーション強度	31
5.2	剛体回転率	33
5.3	軸対称 2 次元のまとめ	36
第 6 章	2 次元・3 次元比較	37
6.1	3 次元計算	37
6.2	2 次元解と 3 次元解の比較	41
6.3	3 次元解の解析	49

第7章	まとめ	57
	謝辞	59
付録 A	ヘルド・ハウモデルの解説	60
	A.1 支配方程式系	60
	A.2 境界条件	61
	A.3 非粘性厳密解	61
	A.4 ハイドの定理	62
	A.5 ヘルド・ハウモデルの仮定	63
	A.6 ハドレーセルの幅	64
	A.7 熱フラックス分布	66
	A.8 地表付近の風速分布	66
付録 B	数値モデルの構築	69
	B.1 スペクトル法基礎	69
	B.2 スペクトル法による非線形浅水方程式系の離散化	76
	B.3 ブシネスク流体プリミティブ方程式系の離散化	83
	B.4 角運動量を保存する水平拡散	93
	B.5 実装	94
	B.6 モデルテスト	96
	B.7 高拡散係数時の数値計算法	99
付録 C	変形オイラー平均方程式系とエリアッセン・パームフラックスに関する 補足	104
	C.1 伝統的な変形オイラー平均方程式系とエリアッセン・パームフラックス	104
	C.2 Vallis (2006) による導出	107
	C.3 一般化した変形オイラー平均方程式系とエリアッセン・パームフラックス	110
付録 D	図集	112
	参考文献	131
	参考論文	136

# 第1章

## 序論

ハドレー循環は地球の大気大循環を理解する上で重要である。その基本的なメカニズムは Held and Hou (1980, 以後 HH80) が自転軸対称の単純なモデルで説明しており、これはヘルド・ハウ (Held-Hou, HH) モデルと呼ばれている。一方、金星やタイタン (土星の衛星) の大気は地表面の何倍もの速さで回転している。このような現象はスーパーローテーションと呼ばれており、そのメカニズムは未解明である。Gierasch (1975) は自転軸対称性および無限大の水平拡散という仮定のもとでスーパーローテーションのメカニズムの説明を試みており、これはギーラシメカニズムと呼ばれている。Matsuda (1980, 1982; 以後 M80/82) はギーラシメカニズムを研究し、有限の水平拡散の場合への拡張をおこなった (以後これをギーラシ・松田 (Gierasch-Matsuda, GM) モデル<sup>\*1</sup> と呼ぶ)。

このように、自転軸対称を仮定してモデル化した大気大循環の研究は、地球に限らず広く行われている。これは自転軸対称を仮定することで、複雑な大気大循環を大幅に単純化することができ、理解が容易になるためである。また、軸対称な大気大循環を考えることで、非軸対称な擾乱の役割についての洞察を得ることも出来、軸対称を仮定して大気大循環を研究することは、今日的にも非常に意義深いことである。

以上を踏まえ、序論では、ハドレー循環とスーパーローテーションに関して、観測事実と過去の研究について述べ、HH モデル、ギーラシメカニズム、松田の研究を紹介する。その後、HH80 と M80/82 の共通点と相違点を示し、本研究の目的を述べる。

---

<sup>\*1</sup> M80 は東西風速場をルジャンドル多項式展開して、剛体回転を表すモードと差動回転を表すモードの和で表して解析的に研究を行っている。すなわち、M80 の理論は東西風速場が剛体回転から大きくずれた場合も含んでおり、適用範囲が広い。ただし、M80 の理論ではスーパーローテーションが実現するときには東西風速場は剛体回転モードが卓越すると結論づけている。本研究では、スーパーローテーションのメカニズムを説明したギーラシメカニズムの“無限大の水平拡散”という仮定を、“有限の非常に大きい水平拡散”に緩和した理論を GM モデルと呼ぶ。

## 1.1 ハドレー循環

### 1.1.1 観測事実

図 1.1 はヨーロッパ中期気象予報センター (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, ECMWF) の再解析データ 20 年分をもとにした, 年平均の平均子午面循環を表している (James, 2002). 最も顕著な特徴は赤道付近の強い上昇流と南北それぞれ  $25^{\circ}$  付近での下降流であり, 両半球にそれぞれ循環セルを形成している. これがハドレー循環である. ハドレー循環は暖かい低緯度側で上昇し, 冷たい高緯度側で下降する直接循環である. ハドレー循環の極側に位置する間接循環 (高緯度側で上昇し, 低緯度側で下降する循環) はフェレル循環と呼ばれ, そのさらに極側に位置する弱い直接循環が極循環と呼ばれている. ハドレー循環の極側上空のジェット気流は亜熱帯ジェット (subtropical jet) と呼ばれ, ハドレー循環とフェレル循環の作用で形成されている.

図 1.2 は米国国立環境予報センター/米国国立大気研究センター (National Centers for Environmental Prediction/ National Center for Atmospheric Research, NCEP/NCAR) の再解析データ (Kalnay et al., 1996) 15 年分をもとにした月平均の平均子午面循環を表している (Satoh, 2004). 夏・冬季の平均子午面循環は赤道非対称性が強く, 特に冬半球のハドレー循環が強化されている. しかし, 春・秋季の平均子午面循環の様子は, 年平均のそれと非常に似ている. それゆえに, ハドレー循環のメカニズムを考えるとときに赤道対称性を仮定することは妥当である.

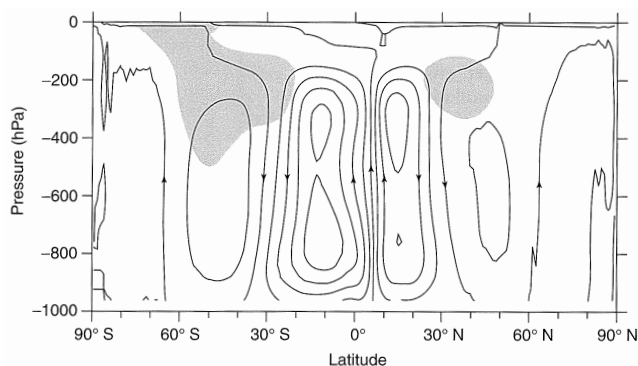


図 1.1 年平均子午面流線関数. 等値線間隔は  $2 \times 10^9 \text{kg/s}$ . 暗部は東西風が  $20 \text{m/s}$  以上の領域を示す. ECMWF 再解析データ 20 年分に基づく. James (2002).

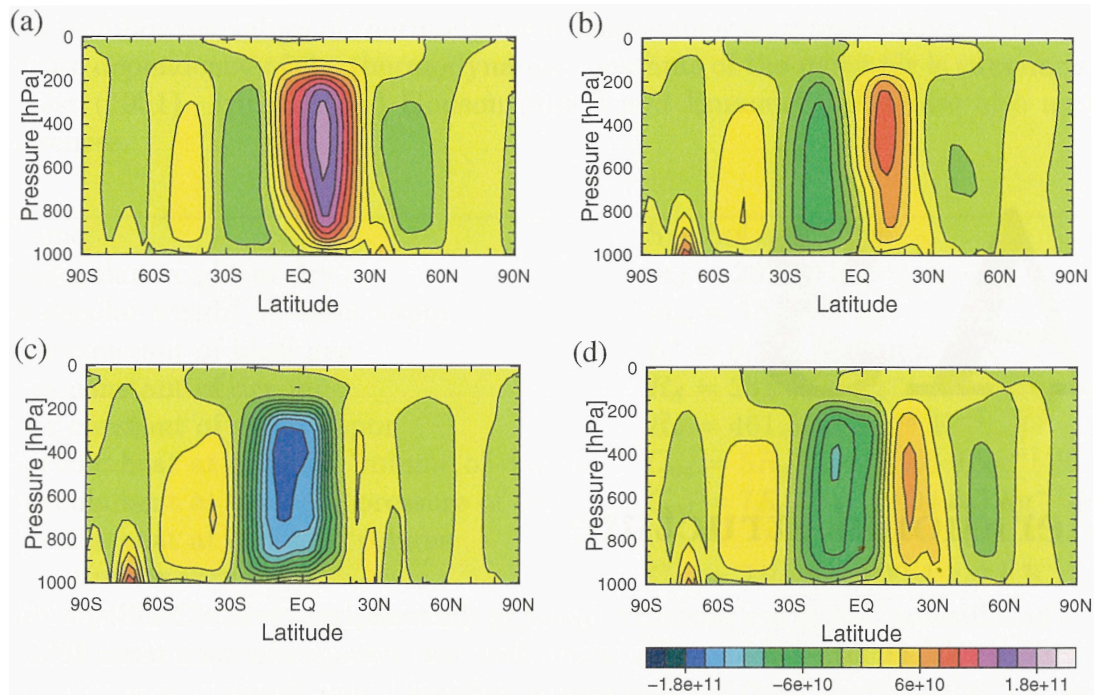


図 1.2 月平均子午面流線関数. (a) 1 月, (b) 4 月, (c) 7 月, (d) 10 月. 等値線間隔は  $10^{10}$ kg/s. NCEP/NCAR 再解析データ 15 年分に基づく. Satoh (2004).

### 1.1.2 過去の研究

ハドレー循環の研究史は佐藤 (1992) に詳しく述べられている. 本節はこれを参考に簡単にハドレー循環の過去の研究について述べる.

ハドレー循環は, 大航海時代に経験的事実として知られていた貿易風を説明するために Halley (1686) や Hadley (1735) らによって考えられた. しかし, Halley の説は自転の効果を無視した不適切なものであった. 一方, Hadley は自転の効果を考慮して, 赤道から極まで延びる 1 セルの循環を考え, 貿易風を説明していた (図 1.3). もちろん, ハドレー循環 (Hadley circulation) という名はこの Hadley に由来している. Hadley の業績およびこれに関する歴史は Persson (2006) に詳しい.

Hadley の主張は 19 世紀に入ると, 観測事実をもとに批判されるようになったが, その後もハドレー循環の研究に著しい発展は見られなかった. 第 2 次世界大戦後, 気象学は線形論や大気大循環モデルを中心に飛躍的な進歩を遂げたが, ハドレー循環の理解に関してはさほど進まなかった.

Charney (1973) は温度風の関係とエクマン層の理論を応用して, 線形論でハドレー循

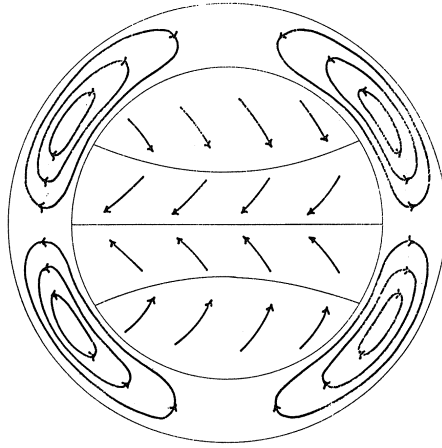


図 1.3 Hadley の考えた大気大循環. Lorenz (1967).

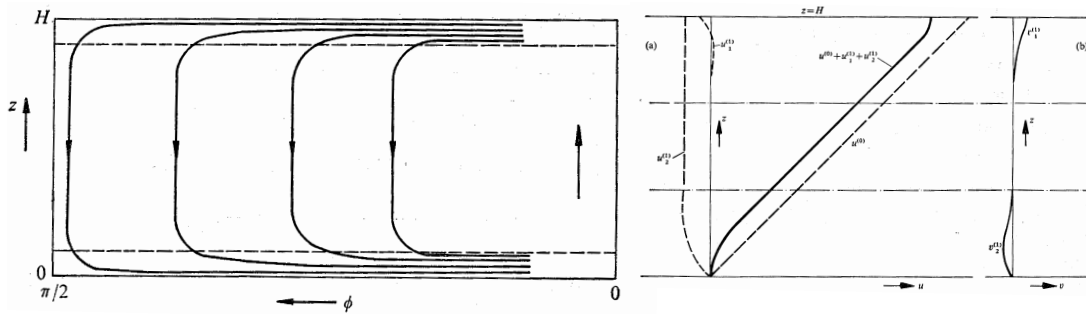


図 1.4 Charney の理論の模式図. ホートン (1979).

環の定式化を試みている. しかし, 彼の理論では赤道での上昇流を説明しておらず, またハドレー循環が極まで伸びていた (図 1.4). Charney の理論についてはホートン (1979) にも述べられている. また, 山本 (2007) では Charney の理論を流線関数で記述している.

Schneider (1977) は自転軸対称を仮定した単純な 2 次元モデルを用いた数値実験により現実的な (ハドレーセルが極まで伸びていない) ハドレー循環を再現している. これに理論的な解釈を与えたのが HH80 である. 彼らの理論は現実的なハドレーセルの幅を説明しており, HH モデルとして現在でも支持されている (詳しくは次節と付録 A 参照).

HH80 以後, HH モデルを応用した研究が数多くなされてきた. Lindzen and Hou (1988) は赤道非対称な加熱を与えて計算し, 冬季のハドレーセルが夏季のそれよりも強くなることを示した. さらに Hou and Lindzen (1992) は加熱が赤道に集中するとハドレー循環が強化されることを示した. また, Schneider (1983) は火星に, Hou (1984) は金星, Williams (2003) は木星にそれぞれ HH80 の枠組みを応用している. Satoh (1994) では圧

縮性大気の軸対称モデルを用いて、灰色大気による放射過程を導入した計算を行い、HH80とは異なり、角運動量収支を考慮した理論でハドレーセルの幅を求めることに成功している。Caballero et al. (2008) は軸対称モデルに波長依存性を考慮した放射過程を用いて計算を行い、夏・冬季のハドレーセルの幅を求める理論を導出している。また、大気大循環以外への応用として Wirth (2006) では、HH モデルのアイデアを  $f$  平面円柱座標系で用いて、ハリケーンからモンスーンまで幅広いスケールの回転軸対称渦の鉛直構造を扱っている。

### 1.1.3 ヘルド・ハウモデル

HH モデルに関する定式的な詳しい解説は付録 A に譲り、本節では HH80 が考えた枠組みと HH モデルの重要な仮定を紹介する。

#### 枠組み

高さ  $H$  の球面上のブシネスク流体プリミティブ方程式系を用い、簡単な放射過程としてニュートン加熱/冷却を導入して流れを駆動する。そして、自転軸対称、赤道対称を仮定し、定常状態を考える。境界条件は上端で自由滑り条件 (フリースリップ) の熱フラックスなし、下端で速度に比例する摩擦を与え、熱フラックスなしを仮定する。

#### 仮定

HH モデルではさらに次の仮定をおき、ハドレーセルの極側の端の緯度  $\phi_H$  を求めている。

- (1) ハドレーセルの外側 ( $\phi > \phi_H$ ) では子午面循環はなく、温位場は“放射平衡温位場” (ニュートン加熱/冷却の基準温位場) にあり、東西風は地表面で風速をゼロとしたときの温度風平衡によって決められる。
- (2) ハドレーセル内上端の極向きの流れは角運動量を保存し、赤道上空の静止大気に対する角運動量保存則からハドレーセル内上端の東西風が決められる。
- (3) ハドレーセル内下端の東西風は摩擦によって弱められ、上空の東西風よりも遥かに小さい (図 1.5)。
- (4) ハドレーセル内は傾度風平衡にある。

以上の仮定から、ハドレーセル内の鉛直平均した温位分布が  $\phi_H$  に依存した形で求められる。そして、ハドレーセル内のエネルギー収支の釣り合いを考えることで、 $\phi_H$  が求めら



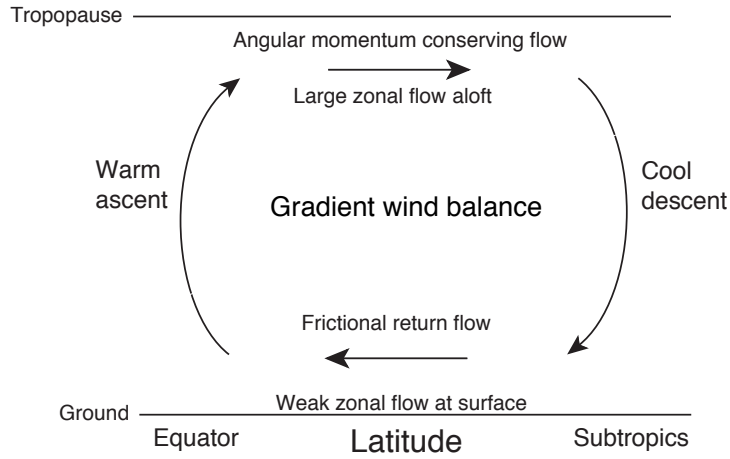


図 1.5 ヘルド・ハウモデルの模式図. Vallis (2006) を一部修正.

れ (図 1.6), 外部熱ロスビー数  $R_T$  という無次元数を用いて,

$$\phi_H = \left( \frac{5}{3} R_T \right)^{1/2}, \quad (1.1)$$

となる. ただし,

$$R_T \equiv \frac{gH\Delta_H}{a^2\Omega^2}, \quad (1.2)$$

であり,  $\Delta_H$  は“放射平衡温位場”の南北温位差の平均温位に対する比である (詳しく付録 A 参照のこと). こうして決められた  $\phi_H$  が, 数値計算により求められたハドレーセルの極側の端の緯度と一致したこと, そして, 現実的な値で  $\phi_H$  を計算したときに観測されるハドレーセルの極側の端の緯度とおおよそ一致することが, HH モデルの優れた点である.

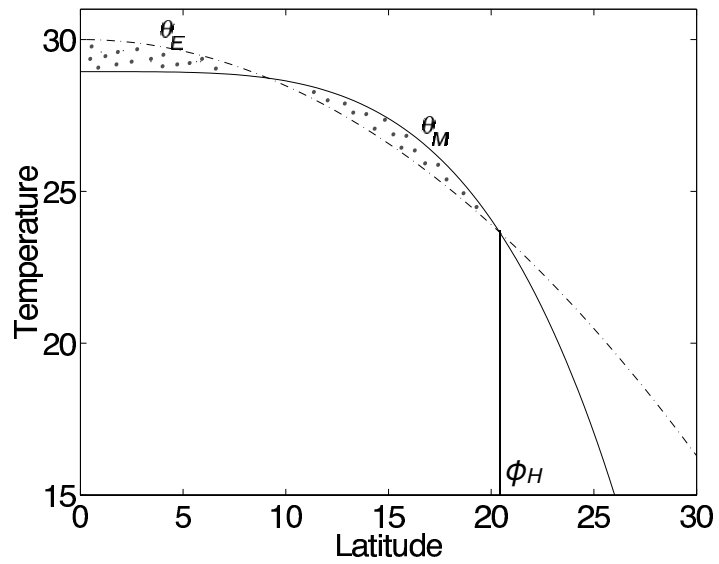


図 1.6 ヘルド・ハウモデルのエネルギー収支によるハドレー緯度  $\phi_H$  の決まり方. “放射平衡温位” 分布が  $\Theta_E$  で, 角運動量保存則と温度風平衡から決められる温位分布が  $\Theta_M$ . 2つの水玉模様領域の面積が等しくなるように  $\phi_H$  が求まる. Vallis (2006) を一部修正.

## 1.2 スーパーローテーション

スーパーローテーションとは惑星の大気が地表面の何倍もの速さで自転軸の周りを回転する (すなわち東西風が自転方向に、自転速度よりも非常に速い) 現象である。本節では、このスーパーローテーションに関する観測事実と過去の研究について取り上げ、その後ギョーラシメカニズムと松田の研究を紹介する。

### 1.2.1 観測事実

現在、一般にスーパーローテーションと呼ばれる現象が観測されているのは、金星とタイタン (土星の衛星) である。まずはそれぞれの天体の天文学的特性を地球と比較して紹介する (表 1.1)。地球と金星、タイタンの最も顕著な違いは自転周期である。なお金星の赤道

表 1.1 地球, 金星, タイタンの天文学的パラメータ. 松田 (2000) に一部加筆.

	自転周期 [地球日]	赤道傾斜角 [deg.]	赤道半径 [km]	重力加速度 [m/s <sup>2</sup> ]	自転速度 [m/s]
地球	0.9973	23.44	6378	9.78	467
金星	243.02	177.4	6052	8.90	1.8
タイタン	15.9	28	2575	1.35	12

傾斜角  $177.4^\circ$  とは自転が逆回転であることを意味している。次に、金星とタイタンの風速の観測結果を図 1.7, 1.8 に示す。金星では高度 60km 付近で、タイタンでは高度 120km 付近でいずれも自転の向きに 100m/s 前後の東西風が観測されている。すなわち、金星大気は地表面のおよそ 60 倍、タイタンの大気は地表面のおよそ 10 倍の速さで回転しているのである。地球で観測されるジェット気流の風速も 100m/s に達することがあるが、地球は 467m/s で自転していることを考えると、金星やタイタンの大気の運動は非常に特異であることが分かる。

スーパーローテーションは地球では見られないと言うだけでなく、それを維持するメカニズムの説明が難しいという点でも特異な現象である。たとえ、ある瞬間に大気が地表面の 60 倍の速度で回転していたとしても、大気には何らかの粘性や地面との摩擦が働き、固体表面と同程度の回転速度に引っ張られると考えられている。つまり、スーパーローテーションを維持し続けるには、大気に角運動量を供給する何らかのメカニズムが働いていな

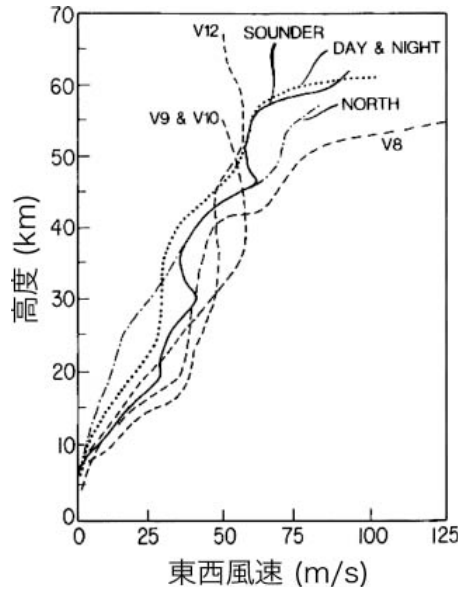


図 1.7 金星の東西風速の鉛直分布. 異なる場所に降下した探査衛星により測定された東風. V8 はヴェネラ 8 号を意味し, ヴェネラ以外はパイオニア・ヴィーナスの探査機による観測. 松田・高木 (2005). 原図は Schubert (1983).

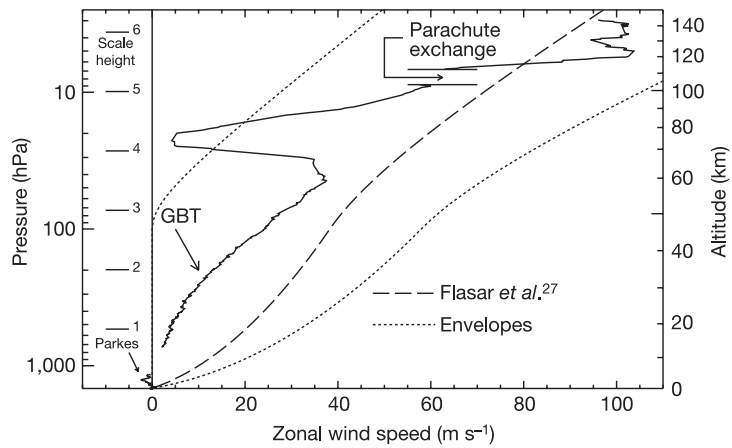


図 1.8 タイタンの東西風速の鉛直分布. 実線が観測値. 破線と点線はボイジャーによる温度データをもとに Flasar et al. (1997) がモデル計算した風速分布とその包絡線. Bird et al. (2005).

ければならないのである.

## 1.2.2 過去の研究

前節でスーパーローテーションが金星とタイタンで観測されていることを示したが、本節では主に金星のスーパーローテーションに関する過去の研究を紹介する。なお、本節は松田 (2000) を参考にしている。

スーパーローテーションが観測的に発見されるまでは、誰もそのような現象を予想していなかったと言われている。自転がきわめて遅い金星では、第 1 近似として自転は無視でき、太陽に加熱される昼半球で上昇し、夜半球で下降する夜昼間対流が卓越していると考えられていた (図 1.9)。

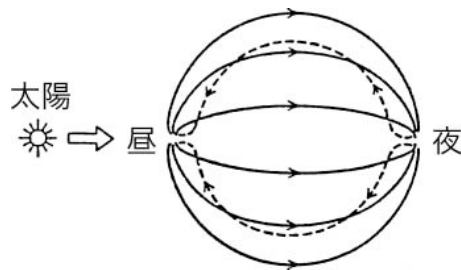


図 1.9 夜昼間対流の模式図. 松田・高木 (2005). 原図は松田 (1987).

しかし、Boyer and Gurein (1969) が地上からの紫外線観測で惑星規模の雲がほぼ 4 地球日で一周していることを発見したことで (図 1.10)、高さ 65km くらいの雲層上部で 100m/s に達する東西流の存在が示唆された。その後、探査衛星による直接観測でも、高速な東西流が確認された。

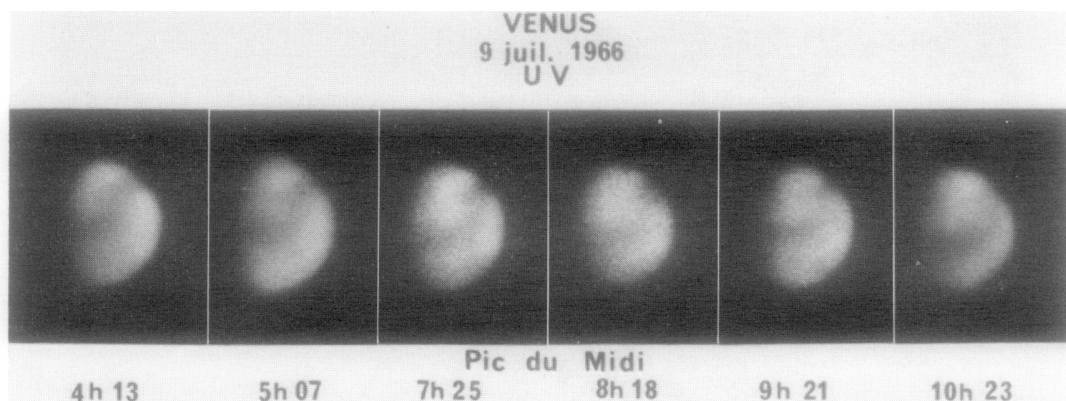


図 1.10 金星の雲の紫外線観測. Boyer and Gurein (1969).

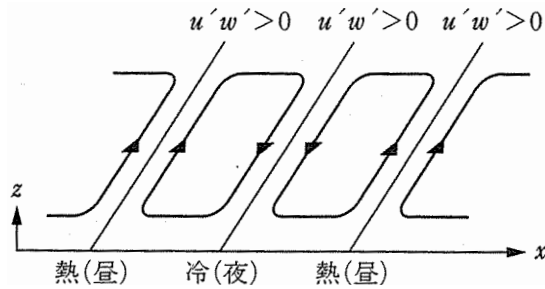


図 1.11 傾いた対流と運動量輸送. 松田 (2000).

スーパーローテーションは発見されて以来、関心を集め、そのメカニズムを説明する様々な説が提唱された。しかし、観測が少ないこともあり、未だ定説と言えるものはない。スーパーローテーションを説明するために提唱された理論は、以下の3つに分類することが出来る。

#### 夜昼間対流に着目する理論

これはスーパーローテーション発見以前に予想されていた夜昼間対流が図 1.11 のように傾くことで、運動量が上向きに輸送され、強い東西流が維持されると考えたものである。この種の理論は Schubert and Whitehead (1969) が動く炎 (moving flame) メカニズムとして初めて提唱した。これは太陽の加熱に対する応答が高度によって異なり、太陽が(ゆっくりとではあるが)動いていることで、対流セルが傾くとしたものだ。また、Thompson (1970) は夜昼間対流自体が不安定で、対流セルのわずかな傾きが正のフィードバック効果を生み、結果として、対流セルが傾くという説を提唱している。

#### 重力波に着目する理論

これは重力波により角運動量が輸送されて、強い東西流が維持されていると考えたものである。Fels and Lindzen (1974) は雲層では太陽加熱により重力波が励起され、太陽の動く向き(自転の逆向き)の運動量が上方と下方に輸送され、結果として、雲層は自転の向きに加速され、スーパーローテーションを維持していると考えた。

#### 子午面循環に着目する理論

これは子午面循環によって運動量を地表面から大気上空へと運ぶことで、スーパーローテーションが維持されているとする考えである。このようなメカニズムは Gierasch (1975) によって提唱され、以後ギーラシメカニズムと呼ばれている。M80/82 はギーラ

シメカニズムを研究し発展させている。ギーラシメカニズムおよび M80/82 については 1.2.3 節と 1.2.4 節で詳しく述べる。

以上がスーパーローテーションの維持メカニズムに関する代表的な理論研究である。この一方で、大気大循環モデル (General Circulation Model, GCM) による研究も行われてきた。1970 年代後半から GCM でスーパーローテーションを再現する試みがなされてきたが (Young and Pollack; 1977, Rossow, 1983), 初期の GCM 実験はいずれも解像度が不十分であり、数値実験としての健全さに欠いていた。1990 年代になると解像度の十分な GCM によってスーパーローテーションの再現に成功した例 (Del Genio and Zhou, 1996) も報告されるようになったが、地球用の GCM を流用したものが多く、実際の金星のスーパーローテーションの理解に直接結びつくものではなかった。しかし、近年、金星用の GCM が各地で開発され (Yamamoto and Takahashi, 2003; Lee et al., 2005; Lebonnois et al., 2006), スーパーローテーションのメカニズムの解明に有力な道具になってきている。

### 1.2.3 ギーラシメカニズム

ここでは、ギーラシメカニズムについて述べる。Gierasch (1975) はスーパーローテーションの維持メカニズムを説明する枠組みとして以下のような仮定を置いた。

- (1) 夜昼間 (経度間) の加熱差を無視し、自転軸対称とする。
- (2) 子午面循環は (東西流の大きさとは無関係に) 南北加熱差の大きさのみによって決定される。
- (3) 水平渦拡散は無有限大とする。

仮定 (1) は自転が遅く昼半球と夜半球との加熱差が大きい金星の場合、不自然に思われるかもしれない。しかし、スーパーローテーション (つまり強い東西風) により、熱は東西にすみやかに輸送され、近似的に東西一様な温度場になると考えることができる。仮定 (2) は、自転の遅い金星ではコリオリ力と (南北温度差による) 気圧傾度力が釣り合う地衡流平衡にはならないので妥当だと考えられる。ただし、東西風速が大きくなれば気圧傾度力と遠心力が釣り合う旋衡風平衡になりうるが、これに伴う子午面循環の弱化は無視している。仮定 (3) は非常に強い (不自然な) ものだが、実際には順圧不安定などの水平混合作用が強く働いていることを期待しての仮定である。

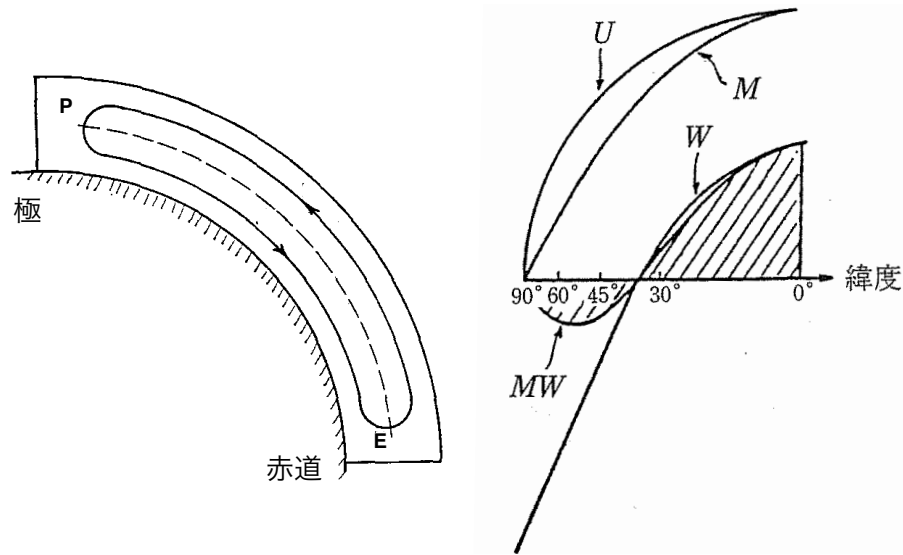


図 1.12 (左) 子午面循環の模式図. Gierasch (1975) を一部修正. (右) 角運動量分布と鉛直流による角運動量輸送の模式図. 松田 (2000). 原図は松田・余田 (1985).

以上の仮定のもとで、図 1.12 (左) のような子午面循環を考える。仮定 (3) の無限大の水平拡散のために東西風速場は各高度で剛体回転をしている。このようなとき、東西風速 ( $U$ ) と角運動量 ( $M$ )、鉛直流 ( $W$ )、そして角運動量の鉛直フラックス ( $MW$ ) は図 1.12 (右) のようになる。このとき上層は低緯度での角運動量の流入の方が、高緯度での流出よりも大きくなり、角運動量が上層に蓄積する。一方、下層は逆に角運動量を上層に供給して失うことになるが、地表面摩擦により固体表面から角運動量を供給される。無限大の水平拡散により、常に剛体回転の場にあるので、図 1.12 (右) の関係は維持されたままとなる。結果として、上層の東西風が強化されていく。やがて、東西風の鉛直シアーが大きくなり、鉛直粘性の効果が大きくなって、子午面循環による角運動量の流入と、鉛直粘性による角運動量の流出が釣り合うところで、平衡状態に達する。以上の仕組みがギーラシメカニズムと呼ばれており、スーパーローテーションの理論として現在でも有力視されている。

#### 1.2.4 松田の研究

ここではギーラシメカニズムについて解析的および数値的に研究を進めた M80/82 について述べる。M80/82 はギーラシメカニズムにおける仮定 (3) を有限の大きさの水平拡散に緩和し、仮定 (2) を排除している。以下に M80/82 が扱った系の特徴をまとめる。

- 球面上のブシネスク流体のプリミティブ方程式系。



- ニュートン加熱/冷却による流れの駆動.
- 自転軸対称, 赤道対称, 定常状態を仮定.
- 水平拡散は無限大, もしくは鉛直粘性よりも十分に大きい有限大を用いる.
- 変数をルジャンドル多項式展開して, 波数 3 成分までのみを扱う低自由度モデル (いわゆる highly truncated model).

M80 ではこの低自由度モデルの解を解析的に求めており, M82 では数値計算を行って M80 の結果を確かめている. M80/82 の成果は次の 3 点にまとめられる.

- (1) 角運動量の収支から, 水平拡散が有限の場合, スーパーローテーションの強さは子午面循環の強さに依存して, 極大値をとることを示した.
- (2) 南北方向の力学的バランス (釣り合い) から, 解を地球型温度風バランス (E), 金星型温度風バランス (V), 直接循環バランス (D) の 3 つに分類した. この 3 者は南北の運動方程式においてコリオリ項, メトリック項, 移流項のどれが卓越しているかを表している.
- (3) 解のパラメータ依存性を調べ, 力学的バランスのレジームダイアグラムを描き, 多重平衡解の存在を示唆した (図 1.13).

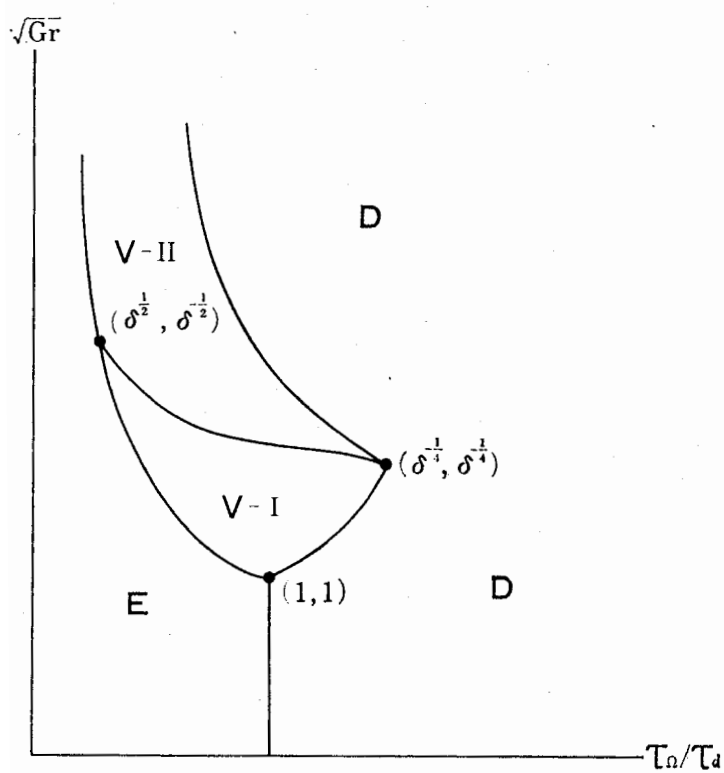


図 1.13 解の力学的バランスのレジームダイアグラム. E は地球型温度風バランス, V は金星型温度風バランス, D は直接循環バランスを表し, V-I は金星型温度風バランスのみが存在し, V-II は多重平衡解として直接循環バランスも存在しうることを表している. 横軸は鉛直粘性の緩和時間に対する自転周期の比 (すなわち鉛直エクマン数), 縦軸は南北加熱差を表す無次元数のグラシヨフ数の平方根である.  $\delta$  は鉛直粘性の緩和時間に対する水平拡散の緩和時間の比で, ここでは  $\delta \ll 1$  が仮定されている. (Matsuda, 1980)

## 1.3 本研究の着眼点・目的

以上, 1.1 節でハドレー循環について, 1.2 節でスーパーローテーションについてそれぞれ, 観測事実, 過去の研究, そしてそのメカニズムを説明する理論モデルを紹介してきた. 本研究では, ハドレー循環のメカニズムを説明した HH80 とギーラシメカニズムを発展させた M80/82 に着目する.

### 1.3.1 Held and Hou (1980) と Matsuda (1980, 1982)

#### 共通点

1.1.3 節と 1.2.4 節で HH80 と M80/82 が用いた枠組みを紹介したが, 実は両者には以下の多くの共通点がある.

- 球面座標系.
- ブシネスク流体のプリミティブ方程式系.
- ニュートン加熱/冷却 (基準温位場の形も同じ).
- 弱い鉛直粘性.
- 自転軸対称, 赤道対称を仮定し, 定常状態を考察.

#### 相違点

一方で両者の相違点は以下の通りである.

- (1) HH80 では水平拡散係数がゼロなのに対して, M80/82 では非常に大きな水平拡散係数を用いた.
- (2) HH80 では地球程度の速い自転角速度を使用していたのに対して, M80/82 では非常に広いパラメータ範囲を考察したが, 主に金星程度の遅い自転角速度の範囲に注目していた.
- (3) HH80 は数値計算に解像度の十分な格子モデル (極赤道間に 90 格子, 鉛直 50 層) を使用したのに対して, M80/82 は解析的考察, 数値計算ともに切断波数 3 の低自由度モデルを使用した.

ここで, M80/82 の低自由度モデルの解が, 解像度が十分なモデルの解の近似として妥当だと仮定すれば, HH80 が提案した HH モデルで説明されるハドレー循環解 (以後, HH 型

ハドレー循環解と呼ぶ) と, M80/82 がギーラシメカニズムを拡張した GM モデルで説明されるスーパーローテーション解 (以後, GM 型スーパーローテーション解と呼ぶ) は, 上記の特徴をもつ方程式系の, 異なるパラメータ ((1) と (2)) の解だということになる.

### 1.3.2 2次元と3次元

本研究で着目している HH80 と M80/82 はともに自転軸対称性を仮定した 2次元の枠組みを用いている. しかし, 当然のことながら現実世界は 3次元空間であり, 軸対称 2次元世界では発生しない順圧不安定や傾圧不安定などが, 大気大循環において重要な役割を果たしている. 1.2.3 節でもふれたが, 軸対称 2次元モデルにおいて, このような不安定による混合効果は, 水平拡散という形でパラメタライズされている.

すなわち, 水平拡散が入っていない軸対称の HH モデルが現実のハドレー循環 (の幅) を説明できているということは, (地球程度の自転速度のときの) 3次元世界においてもハドレー循環に対する非軸対称成分の影響は小さいことを示唆している. 実際, Satoh et al. (1995) は GCM を用いて, 軸対称を仮定した 2次元計算と非軸対称を許す 3次元計算との比較実験を行い, ハドレー循環の幅や強さは両者で同程度になるという結果を示している.

逆に, 非常に大きな水平拡散を仮定している GM モデルは, 金星程度の自転速度を持つ惑星では非軸対称な成分による何らかの水平混合作用が強く働いていることを期待しているのである. 関連した研究として, Iga and Matsuda (1999) は順圧モデルを用いて, 順圧不安定により水平混合がおき, 角運動量が低緯度に輸送されること示している.

### 1.3.3 本研究の目的

1.3.1 節で, HH 型ハドレー循環解と GM 型スーパーローテーション解は, 同じ方程式系の異なるパラメータの解であることを説明した. この 2種類の解はハドレー循環, スーパーローテーションそれぞれの分野で良く知られた解だが, その両者の繋がり方や関係, パラメータ依存性は明らかにされていない. また, 1.3.2 節で述べたように地球, 金星それぞれの状況での 2次元解と 3次元解を比較した研究はあるが, 直接, HH80 や M80/82 の枠組み (すなわち 1.3.1 節の共通点の特徴をもつ枠組み) を 3次元に拡張した研究はされていないし, そのパラメータ依存性も明らかになっていない.

そこで本研究は以下の 2点を研究目的とする.

- I. 軸対称 2次元数値モデルを用い, HH80 と M80/82 を包含する広範囲にわたってパラメータスイープ実験を行い, 解のパラメータ依存性を調べ, HH 型ハドレー循環

- 解と GM 型スーパーローテーション解の繋がり方や関係性を明らかにすること。
- II. 同範囲を 3 次元数値モデルでも同様に計算し, 2 次元解と 3 次元解の比較を行うことで, HH モデルと GM モデルの妥当性を明らかにすること。

なお, 本論文は以下の内容で構成されている。まず, 軸対称 2 次元モデルに関して, 第 2 章で支配方程式系, 第 3 章で実験設定を説明をする。第 4 章では得られた数値解を示し, その解析を第 5 章で行う。そして, 第 6 章で 2 次元解と 3 次元解の比較について述べ, 第 7 章で全体をまとめる。また付録 A で, HH モデルを詳しく解説し, 付録 B で, 本研究で使った数値モデルの構築方法を詳しく記す。付録 C では, EP フラックスに関する補足を行っている。計算された数値解の詳細を図集として付録 D に載せる。なお, 本論文の第 2 章から第 5 章に相当する内容は既に英文論文集 *Theoretical and Applied Mechanics Japan, Volume 57- 57th Japan National Congress for Theoretical and Applied Mechanics, 2008* において “Axisymmetric Steady Solutions in an Idealized Model of Atmospheric General Circulations: Hadley Circulation and Super-rotation” という題目で掲載されており, その別刷りを参考論文として付ける。

## 第2章

# 支配方程式系

本研究で扱う系は球面上のブシネスク流体プリミティブ方程式系で、単純な放射過程としてニュートン加熱/冷却を用いる。ニュートン加熱/冷却の基準温位場には赤道対称なものを用いる。

### 2.1 軸対称ブシネスク流体プリミティブ方程式系

自転軸に対する対称性を仮定し ( $\partial/\partial\lambda = 0$ , ここで  $\lambda$  は経度), 定常状態 ( $\partial/\partial t = 0$ , ここで  $t$  は時間) を考える。すると, 支配方程式系は以下で与えられる。

$$\frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi = \nu_H D_H(u) + \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.1)$$

$$\frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \nu_H D_H(v) + \nu_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g\alpha\Theta, \quad (2.3)$$

$$\frac{v}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\frac{\Theta - \Theta_e}{\tau} + \kappa_V \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

ここで,  $u, v, w$  はそれぞれ流速の東西, 南北, 鉛直成分であり,  $\Theta$  は温位,  $\Phi \equiv p/\rho$  であり,  $p$  は圧力,  $\rho$  は密度である。独立変数  $\phi, z$  は緯度と高度, 定数  $a, \Omega$  は惑星の半径と自転角速度,  $g$  は重力加速度である。  $\tau$  はニュートン加熱/冷却の緩和時定数,  $\nu_H, \nu_V$  はそれぞれ水平と鉛直の拡散係数,  $\kappa_V$  は鉛直熱拡散係数で,  $\alpha$  は熱膨張率である。

$\Theta_e$  はニュートン加熱/冷却の基準温位場であり, 以下の形で与える.

$$\frac{\Theta_e}{\Theta_0} = 1 - \frac{2}{3}\Delta_H P_2(\sin \phi) + \Delta_V \left( \frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right). \quad (2.6)$$

ここで,  $\Theta_0$  は  $\Theta_e$  の全球平均であり,  $\Delta_H, \Delta_V$  は基準温位場の極赤道間, 上端下端間それぞれの温位差の  $\Theta_0$  に対する比である.  $P_2$  はルジャンドル多項式  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$  である. ここでは, 熱膨張係数は  $\alpha = 1/\Theta_0$  で与える.

水平拡散項  $D_H(u), D_H(v)$  は Becker (2001) を参照して, 以下の角運動量が保存される形を用いる.

$$D_H(u) = \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{u}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{2u}{a^2}, \quad (2.7)$$

$$D_H(v) = \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - \frac{v}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) \right] + \frac{2v}{a^2}. \quad (2.8)$$

力学的境界条件は, 上端で自由滑り条件 (フリースリップ), 下端では風速に比例する摩擦が働くと仮定する. 熱的境界条件は上下端ともに熱フラックスなしを仮定する. すなわち境界条件は,

$$z = H \quad \text{で} \quad w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \quad (2.9)$$

$$z = 0 \quad \text{で} \quad w = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \quad \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \quad \nu_V \frac{\partial v}{\partial z} = Cv, \quad (2.10)$$

である. ここで,  $C$  は摩擦係数である.

## 2.2 無次元化

$\Omega$  や  $\nu_H$  などの外部パラメータに対する解の依存性を明確にするために, 支配方程式系の無次元化を行う. まずは各変数を, 代表的な大きさ  $U, V, W, \Theta_0, H$  を用いて, 無次元変数 (\*付きで表す) で書き直す.

$$u = Uu^*, \quad v = Vv^*, \quad w = Ww^*, \quad \Theta = \Theta_0\Theta^*, \quad z = Hz^*. \quad (2.11)$$

$\Phi$  は静力学平衡の式 (2.3) から

$$\Phi = gH\Phi^*, \quad (2.12)$$

であり,  $\partial\Phi/\partial\phi$  は (2.3) を  $\phi$  微分した式から

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \beta\Delta_H gH \frac{\partial\Phi^*}{\partial\phi}, \quad (2.13)$$

と書ける. ただし,  $\beta$  は南北温位差の基準温位場のそれに対する比であり,

$$\beta \equiv \frac{\partial\Theta}{\partial\phi} \bigg/ \frac{\partial\Theta_e}{\partial\phi}, \quad (2.14)$$

と定義する.

(2.11), (2.12) と (2.13) を支配方程式系 (2.1)-(2.5) に代入すると, 以下の無次元化支配方程式系が得られる. ただし\*は省略してある.

$$R_v v \frac{\partial u}{\partial\phi} + R_w w \frac{\partial u}{\partial z} - R_v uv \tan\phi - \frac{2}{\gamma} v \sin\phi = E_H D_H(u) + E_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.15)$$

$$R_v v \frac{\partial v}{\partial\phi} + R_w w \frac{\partial v}{\partial z} + R_v \gamma^2 u^2 \tan\phi + 2\gamma u \sin\phi = -\beta \frac{R_T}{R_v} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} + E_H D_H(v) + E_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (2.16)$$

$$R_v v \frac{\partial\Theta}{\partial\phi} + R_w w \frac{\partial\Theta}{\partial z} = -\frac{1}{\epsilon} \left[ \Theta - 1 + \frac{2}{3} \Delta_H P_2(\sin\phi) - \Delta_V \left( z - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{E_V}{Pr_V} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \Theta, \quad (2.18)$$

$$R_v \frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} (v \cos\phi) + R_w \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.19)$$

ここで, 無次元数は以下の通りに定義している.

- 外部熱ロスビー数:  $R_T \equiv \frac{gH\Delta_H}{a^2\Omega^2}$ ,
- 水平および鉛直エクマン数:  $E_H \equiv \frac{\nu_H}{a^2\Omega}$  および  $E_V \equiv \frac{\nu_V}{H^2\Omega}$ ,
- 鉛直プラントル数:  $Pr_V \equiv \frac{\nu_V}{\kappa_V}$ ,
- 南北および鉛直流速を代表的流速としたロスビー数:  $R_v \equiv \frac{V}{a\Omega}$  および  $R_w \equiv \frac{W}{H\Omega}$ ,
- 南北流速に対する東西流速の比:  $\gamma \equiv \frac{U}{V}$ ,
- 自転周期に対するニュートン加熱/冷却の緩和時間の比:  $\epsilon \equiv \tau\Omega$ .

式 (2.19) より直ちに  $R_v \sim R_w$  が示せる. また, 下端境界条件 (2.10) より無次元数

$$\zeta \equiv \frac{\nu_V}{C\delta z},$$



を得る. ここで  $\delta z$  は最下層の厚さである.

以上の無次元パラメータは外部条件から大ききの決まる外部無次元パラメータと, 外部パラメータに依存して内部で決まる内部無次元パラメータの2つに分類できる.

- 外部無次元パラメータ

$$R_T, E_H, E_V, Pr_V, \epsilon, \zeta, \Delta_H, \Delta_V,$$

- 内部無次元パラメータ

$$R_v, \beta, \gamma.$$

すなわち, 外部無次元パラメータを固定すれば, 得られる解は相似となる.

## 第 3 章

# 実験設定

HH 型ハドレー循環解から GM 型スーパーローテーション解までの定常解を調べるために、パラメータスイープ実験を行う。パラメータスイープ実験とはパラメータを少しずつ変えた設定でそれぞれ数値解を求め、解のパラメータ依存性を明らかにする方法である。

### 3.1 スイープパラメータ

本研究では HH80 および M80/82 において重要なパラメータであった、 $R_T, E_H, E_V$  をスイープパラメータに設定する。M80/82 ではグラシヨフ数  $G_r$  をパラメータとして用いていたが、この  $G_r$  と  $R_T, E_V$  とは  $G_r = R_T/E_V^2$  の関係にある。 $R_T, E_H, E_V$  を用いてパラメータ空間を構成すると、HH80 と M80/82 をこの空間内に位置づけることが出来る (図 3.1)。

本研究の興味は HH 型のハドレー循環解と GM 型のスーパーローテーション解の関係性にあるので、両者を繋ぐかたちで、パラメータのスイープ範囲を設定する。

その他の外部無次元パラメータを固定したまま、スイープパラメータの  $R_T, E_H, E_V$  を変えるために、 $\Omega, \tau, \nu_H, \nu_V, \kappa_V$  そして  $C$  の値をそれぞれ変える。ただし、他のパラメータは  $a = 6.4 \times 10^6$  m,  $H = 8 \times 10^3$  m,  $\delta z = 250$  m,  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>,  $\Theta_0 = 250$  K,  $\Delta_H = 1/3$ ,  $\Delta_V = 1/8$  に固定しておく。スイープパラメータのスイープ範囲はそれぞれ  $1.2 \times 10^{-2} \leq R_T \leq 1.2 \times 10^3$ ,  $3.3 \times 10^{-10} \leq E_H \leq 1.3 \times 10^0$ ,  $2.1 \times 10^{-4} \leq E_V \leq 2.1 \times 10^{-2}$  である。その他の外部無次元パラメータの固定値は  $Pr_V = 1, \epsilon = 126, \zeta = 0.8$  である。これは HH80 と同じ値を採用している。

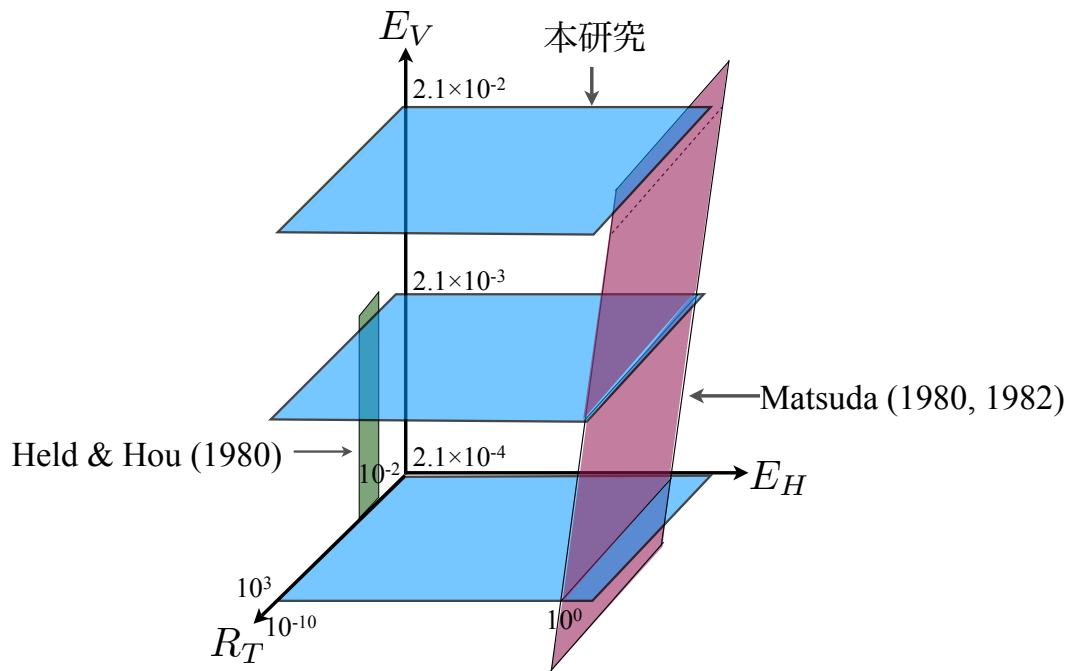


図 3.1 パラメータ空間 ( $R_T, E_H, E_V$ ) に置ける, Held and Hou (1980, 緑色), Matsuda (1980, 1982, 紫色) および本研究 (水色) の位置づけ.

### 3.2 数値モデル

定常解を求めるために, 本研究では支配方程式系 (2.1)-(2.10) の時間変化項を残したものを離散化して, 数値モデルを構築し, 解が定常になるまで時間発展計算を行う. 離散化の方法として, 水平方向にはスペクトル法を, 鉛直には中央差分法を用い, 時間積分は 4 次のルンゲ・クッタ法を使用する. 水平解像度は切断波数 85(ガウス緯度で極から赤道まで 64 格子), 鉛直は 32 層, 時間刻み幅は 1 時間に設定する. 初期値には等温位 ( $\Theta = \Theta_0$ ) の静止大気を用いる. なお, 数値モデルの構築に関する詳細は付録 B を参照のこと. 実際の構築手順としては, 先に, 球面ブシネスク流体プリミティブ方程式系の 3 次元モデルを構築し, その後に, これを軸対称 2 次元化した.

## 第 4 章

# 実験結果

時間発展計算を行った結果, 解が振動して定常解が得られないパラメータ領域が存在した (図 4.1). 本章では定常解が得られた領域の解を詳細に記述する. その後で, 非定常解になる原因を簡単に示す. なお, 各パラメータ毎の定常解は付録 D に載せる.

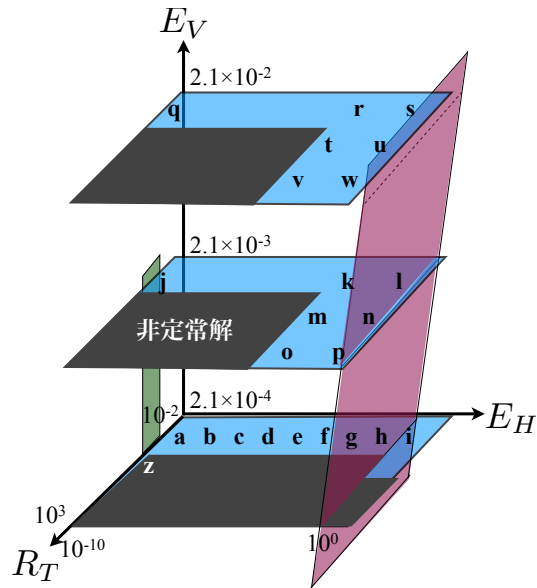


図 4.1 パラメータ空間における非定常解の分布 (黒). 英文字は図 4.4-4.6 の図中のそれらと対応する.

$$R_T = 1.2 \times 10^{-1}, E_V = 2.1 \times 10^{-2}$$

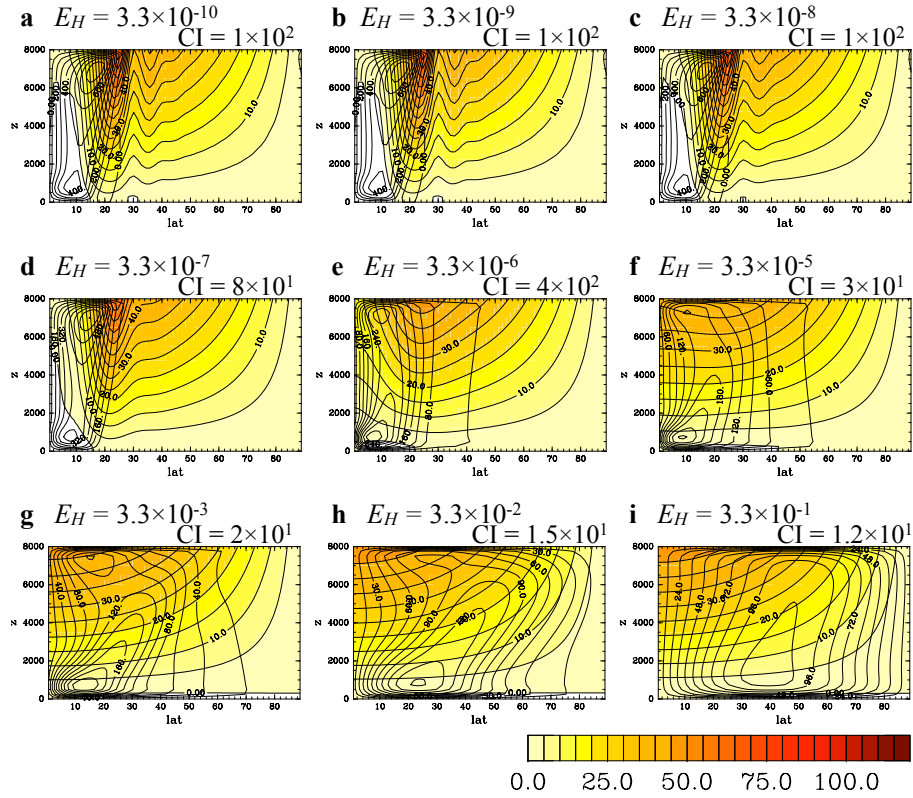


図 4.2  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}, E_V = 2.1 \times 10^{-4}$  で  $E_H = 3.3 \times 10^{-10}$  から  $3.3 \times 10^{-1}$  まで (図 4.1 の a から i まで) の, 定常状態の東西風 [m/s](色調) と子午面流線関数 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ](等値線). 等値線間隔 (contour interval, CI) は各パネル上部に表示.

## 4.1 定常解

時間発展計算により得られた定常解のうち,  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}, E_V = 2.1 \times 10^{-4}$  で,  $E_H = 3.3 \times 10^{-10}$  から  $10^{-1}$  まで (図 4.1 の a から i まで) を図 4.4 に示す. まず, a ( $E_H = 3.3 \times 10^{-10}$ ) の場合は HH80 で行われた数値実験とほぼ同じ場合であり, 数値解もほぼ同じものが得られている (図 A.1 と比較するとよい). すなわち, ハドレー循環と小さな“フェレル”循環が見られ, 赤道上空では東風で, ハドレー循環の極側で強いジェットが形成されている. この a の場合から  $E_H$  を増加させていくと, d ( $E_H = 3.3 \times 10^{-7}$ ) まででは, 場はほとんど変わらないが, e ( $E_H = 3.3 \times 10^{-6}$ ) では赤道上空で西風となり, 子午面循環が極側に延びている. そして, さらに  $E_H$  が大きくなると, 東西風速場は徐々に剛

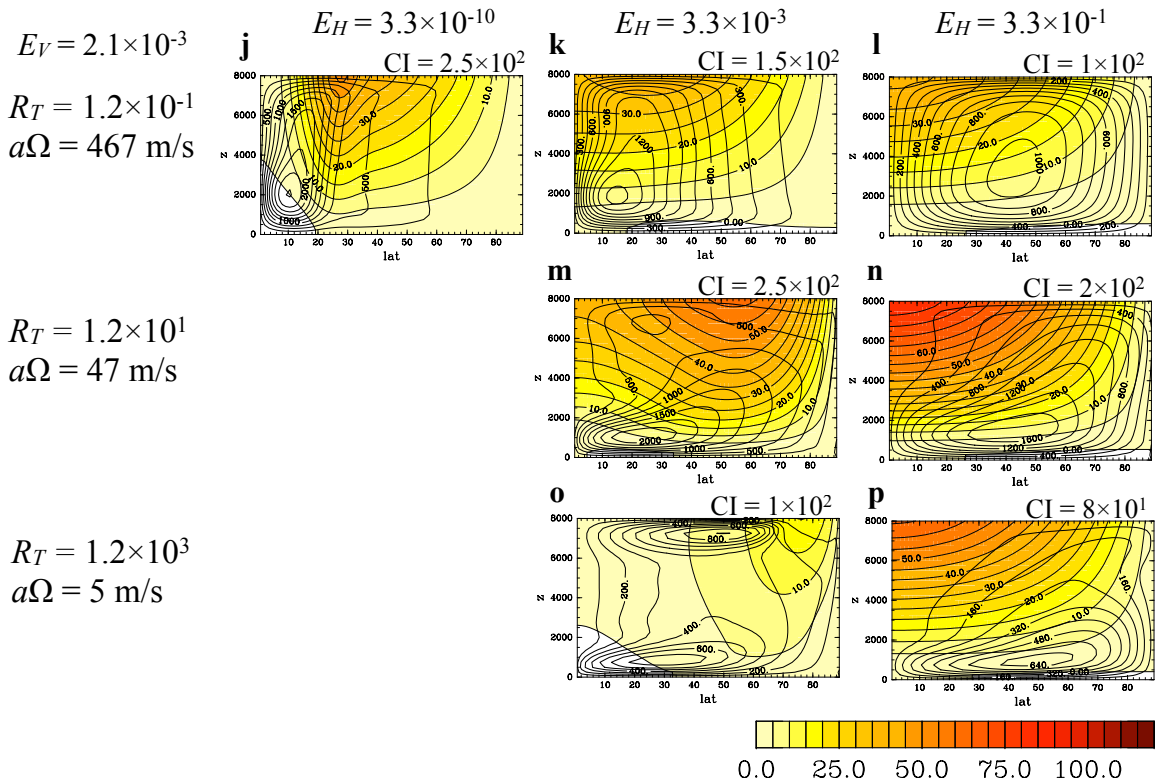


図 4.3  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$  で  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}, 10^1, 10^3$ ,  $E_H = 3.3 \times 10^{-10}, 10^{-3}, 10^{-1}$  (図 4.1 の **j** から **p** まで) の, 定常状態の東西風 [m/s](色調) と子午面流線関数 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ](等値線). 等値線間隔は各パネル上部に表示.

体回転に近づいていき, 子午面循環はますます極側に広がっていくと同時に, 循環自体は弱くなっている.

次に, 図 4.1 の **j** から **p**, **q** から **w** のパラメータでの定常解を図 4.5, 4.6 に示す.  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  の **j** から **l**, **q** から **s** への変化は, 先ほど見た **a** から **i** への変化と同様である.

$E_H = 3.3 \times 10^{-1}$  で水平拡散が非常に強いとき (**l**, **n**, **p**, **s**, **u**, **w**) は, 他のパラメータによらず, 東西風速場は剛体回転をしており, 赤道から極まで延びる 1 セルの子午面循環になっている. しかし,  $E_H = 3.3 \times 10^{-3}$  程度の水平拡散の強さ (**k**, **m**, **o**, **r**, **t**, **v**) だと, 東西風速は中高緯度で極大をとり,  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$  のときは上下に 2 つのセルをもつ子午面循環があらわれている.  $E_V = 2.1 \times 10^{-2}$  の場合 (**q** から **w**) はいずれも,  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$  の場合 (**j** から **p**) よりも東西風速が小さくなっており, 逆に子午面循環は強くなっている. これは強い鉛直粘性によって東西風速が制限されるからである. すなわち, 南北方向の力の釣り合いを保つために強い子午面循環が熱を輸送し, 南北温度勾配

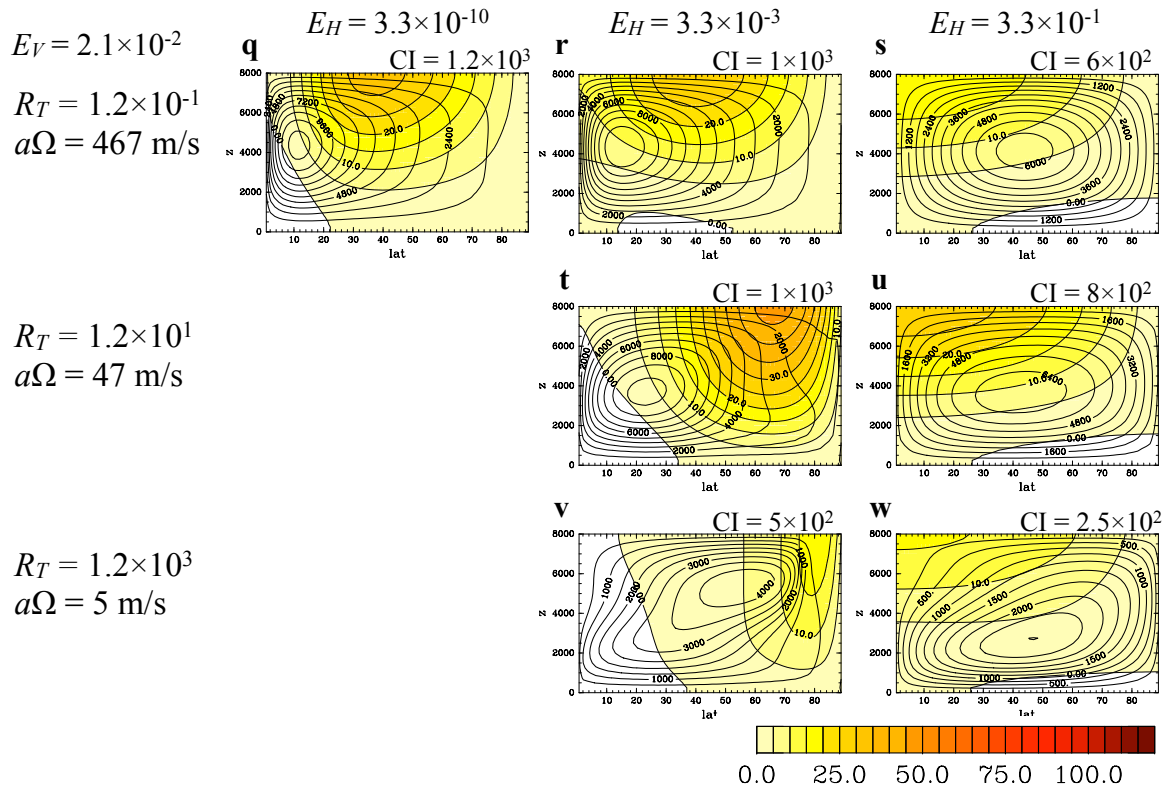


図 4.4  $E_V = 2.1 \times 10^{-2}$  で  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}, 10^1, 10^3$ ,  $E_H = 3.3 \times 10^{-10}, 10^{-3}, 10^{-1}$  (図 4.1 の **q** から **w** まで) の, 定常状態の東西風 [m/s](色調) と子午面流線関数 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ](等値線). 等値線間隔は各パネル上部に表示.

を弱めているからである (図 4.7).

図 4.5 の **p** の場合 ( $R_T = 1.2 \times 10^3$ ,  $E_H = 3.3 \times 10^{-1}$ ,  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$ ) に注目すると, このときの惑星の自転速度 ( $a\Omega$ ) は約 5m/s であるのに対して, 風速は赤道上空で 65m/s に達しており, 13 倍程度のスーパーローテーションが実現されている. 一方で, 図 4.6 の **w** の場合 ( $R_T = 1.2 \times 10^3$ ,  $E_H = 3.3 \times 10^{-1}$ ,  $E_V = 2.1 \times 10^{-2}$ ), **p** よりも鉛直粘性が強いために, 風速が弱まり, 3 倍程度のスーパーローテーションにとどまっている.

ここで, M80 の大循環の分類を用いれば **l** や **s** は地球型温度風バランス (E 型) に相当しており, **p** や **w** は金星型温度風バランス (V 型) に, **n** や **u** は E 型と V 型の境界付近に相当する. ただし,  $E_V = 2.1 \times 10^{-2}$  の場合 (**s**, **u**, **w**) の方が M80 のレジームダイアグラムにおいて, 直接循環バランス (D 型) の領域に近くなっている.

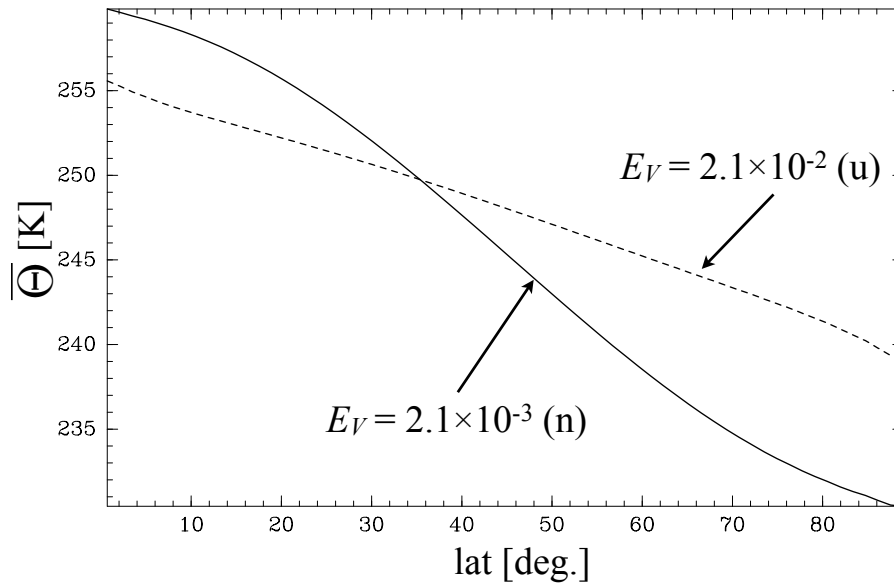


図 4.5 鉛直平均温度  $\bar{\Theta}$ [K] の緯度分布.  $R_T = 1.2 \times 10^1$ ,  $E_H = 3.3 \times 10^{-1}$  で実線が  $E_V = 2.1 \times 10^{-3} \text{ (n)}$ , 破線が  $E_V = 2.1 \times 10^{-2} \text{ (u)}$ .

## 4.2 非定常解

非定常解の一例として, 図 4.1 の  $\mathbf{z}$  の位置での解を図 4.2 に示す. 図 4.2 で, まずはハドレー循環が鉛直に複数に分裂しているのが目立つ. また, 緯度  $45^\circ$  付近の上空にジェットが形成されており, そこから筋状の対流が斜めに延びている. そして, 東西風速場も細かく振動している.

このときの渦位 (ポテンシャル渦度) の分布を図 4.3 に示す. 低緯度の循環のすぐ極側に北半球で渦位が負の領域が広がっており, ちょうど筋状の斜めの対流と重なっている. すなわち, この領域では対称不安定<sup>\*1</sup> が発生している. これが定常状態に至らなかった原因であろう.

ただし, 本研究ではこのような非定常解に関する解析・考察をこれ以上は行わず, 定常解にのみ着目する.

<sup>\*1</sup> 静的安定かつ慣性安定な場でも流体粒子が斜めの変位に対して不安定な場合を, 一般に対称不安定または斜向不安定と言う (小倉, 1997).



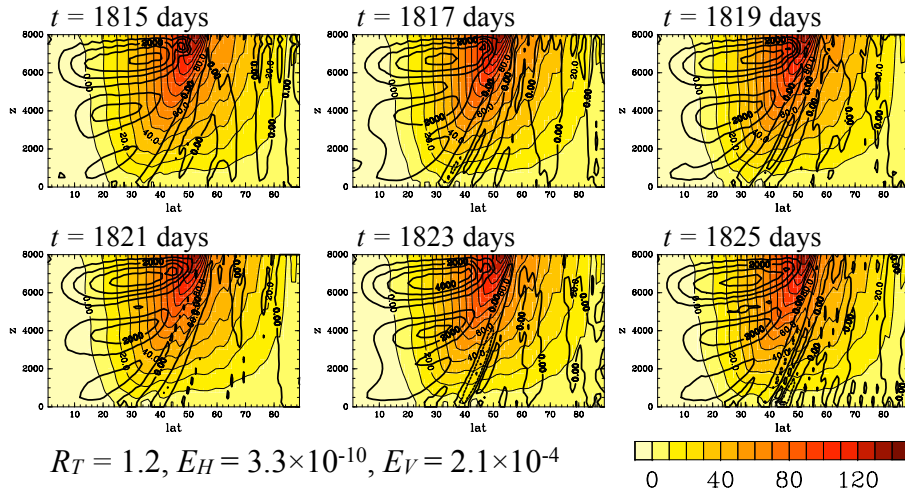


図 4.6 パラメータ  $R_T = 1.2, E_H = 3.3 \times 10^{-10}, E_V = 2.1 \times 10^{-4}$  (図 4.1 の  $\mathbf{z}$ ) での東西風 [m/s](色調) と子午面流線関数 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ](等値線) の 2 地球日 (days) ごとの緯度-高度断面 (スナップショット). ただし,  $1\text{day} = 86400\text{s}$ , 子午面流線関数の等値線間隔は 1000.

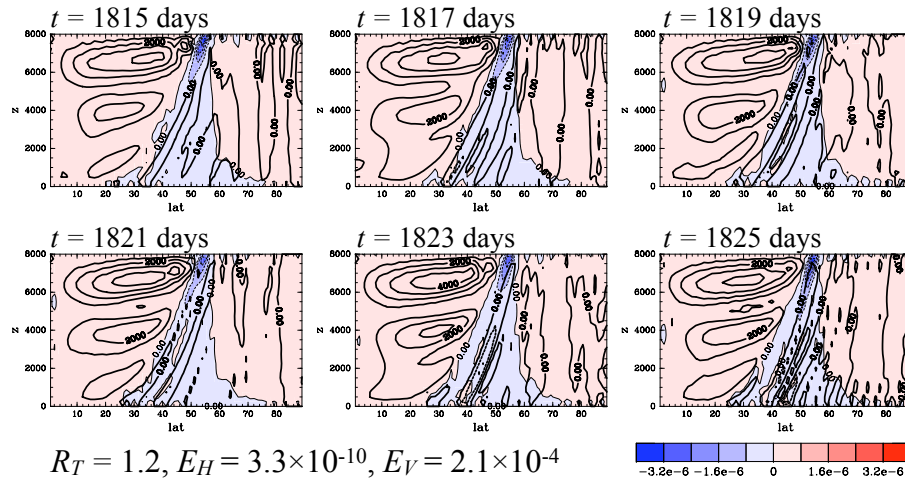


図 4.7 パラメータ  $R_T = 1.2, E_H = 3.3 \times 10^{-10}, E_V = 2.1 \times 10^{-4}$  (図 4.1 の  $\mathbf{z}$ ) での渦位 [ $\text{K}/(\text{ms})$ ](色調) と子午面流線関数 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ](等値線) との 2 地球日 (days) ごとの時間断面図. 子午面流線関数の等値線間隔は 1000.

## 第 5 章

# 力学的解析

本章では HH 型ハドレー循環解と GM 型スーパーローテーション解の繋がり方を明らかにするために, 前章で示した定常解のパラメータ依存性を量的に解析する. そこで解析にあたり, 2 つの診断指標, スーパーローテーション強度と剛体回転率を導入する.

### 5.1 スーパーローテーション強度

本節で導入する診断指標, スーパーローテーション強度  $S$  は以下で定義する.

$$S = \frac{U}{a\Omega}. \quad (5.1)$$

ここで,  $U$  は最上層の東西風を赤道から極まで重み付き平均したものである. つまり,  $S > 0$  ならば, 大気は地表面よりも速く回転していることを意味する. 一般に, 大気が地表面の何倍も高速に回転しているときにスーパーローテーションと呼ばれるが, 本研究では  $S \geq 1$  の状態, すなわち大気が地表面の 2 倍以上の速さで回転している状態を強スーパーローテーションと呼び,  $0 < S < 1$  の状態を弱スーパーローテーションと呼ぶ.

得られた数値解の  $E_V, E_H$  を固定したときの  $S$  の  $R_T$  依存性を図 5.1 に示す.  $S$  は  $R_T$  が大きくなるに従って増加していくが,  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$  のとき (図 5.1 左) は  $E_H = 1.3 \times 10^{-3}$  だと強スーパーローテーション ( $S \geq 1$ ) にはならないし,  $E_V = 2.1 \times 10^{-2}$  のとき (図 5.1 右) は  $E_H \leq 1.3 \times 10^{-2}$  だと強スーパーローテーションにならない. また,  $E_H = 3.3 \times 10^{-1}$  で水平拡散が十分大きい場合は,  $S$  は  $R_T < 1$  のとき  $R_T$  に比例し,  $R_T > 1$  のとき  $\sqrt{R_T}$  に比例して増加しており,  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$  の場合  $R_T \geq 1.2 \times 10^1$  で強スーパーローテーションになり,  $E_V = 2.1 \times 10^{-2}$  の場合  $R_T \geq 1.2 \times 10^2$  で強スーパーローテーションになっている.  $E_V$  が小さい方が  $S$  は大きくなり, 今の場合,

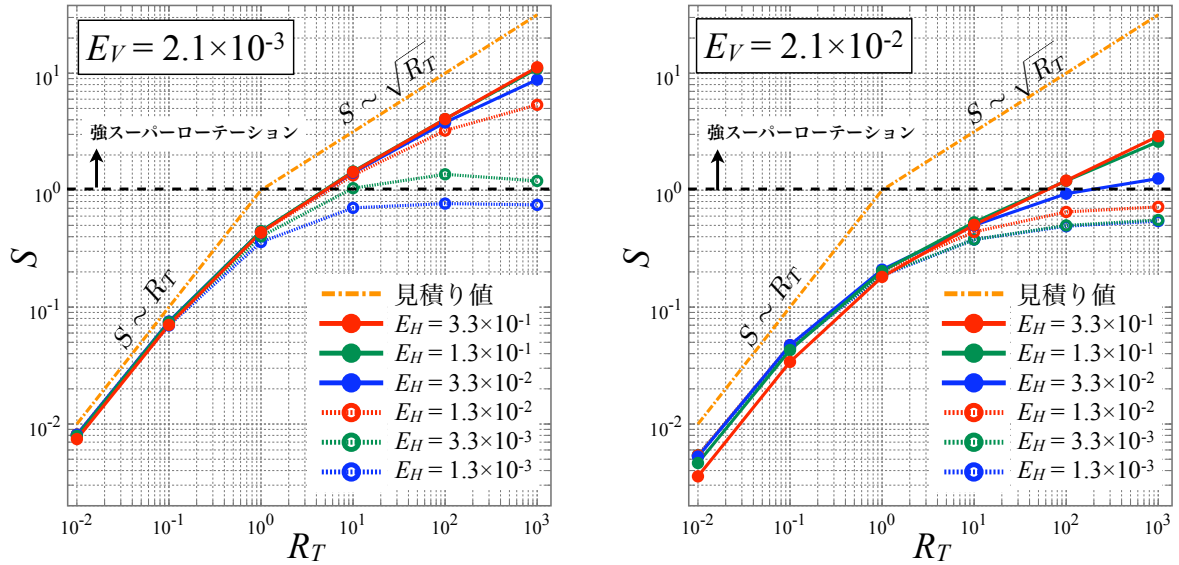


図 5.1 (左)  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$ , (右)  $E_V = 2.1 \times 10^{-2}$  のときのスーパーローテーション強度  $S$  の水平エクマン数  $E_H$  と外部熱ロスビー数  $R_T$  に対する依存性. 橙色一点鎖線は地衡流平衡と旋衡風平衡の仮定のもとにした見積り値.

$E_V = 2.1 \times 10^{-3}$ ,  $E_H = 3.3 \times 10^{-1}$ ,  $R_T = 1.2 \times 10^3$  のときに  $S = 11$  で最大となっている.

$S$  の値は地衡流平衡と旋衡風平衡を仮定した簡単な考察により,  $R_T$  の関数として見積ることが出来る. 南北の運動方程式 (2.16) において, 移流項と拡散項を無視して,  $R_v \gamma$  を  $S$  で近似し,  $\beta \sim 1$  を仮定すると,

$$S^2 u^2 \tan \phi + 2 S u \sin \phi \sim -R_T \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \quad (5.2)$$

となる. 上式より  $S$  は,

$$S \sim \begin{cases} R_T & \text{for } R_T \ll 1: \text{地衡流平衡} \\ \sqrt{R_T} & \text{for } R_T \gg 1: \text{旋衡風平衡} \end{cases}. \quad (5.3)$$

で近似される. さらに, 図 5.1 をみると  $R_T \sim 1$  であっても

$$S \sim \begin{cases} R_T & (R_T \leq 1 \text{ のとき}) \\ \sqrt{R_T} & (R_T > 1 \text{ のとき}) \end{cases}, \quad (5.4)$$

として良い.  $S$  の見積り (5.4) は  $E_V$  が小さく,  $E_H$  が非常に大きいときに, 広範囲の  $R_T$  に対して良い見積りである. 以上の見積りに関する考察は M80 がおこなった地球型温度風バランスと金星型温度風バランスの議論に相当している (M80 の式 3.13).

## 5.2 剛体回転率

次に導入する指標は剛体回転率  $Rg$  と呼び、以下で定義する。

$$Rg \equiv \frac{\text{東西風運動エネルギーの剛体回転成分}}{\text{東西風運動エネルギー}} \Bigg|_{z=H} = \frac{2|\psi_1|^2}{\sum n(n+1)|\psi_n|^2} \Bigg|_{z=H}. \quad (5.5)$$

ここで  $\psi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) は水平流線関数をルジャンドル多項式展開したときの展開係数である。  $Rg$  は、すなわち、最上層の東西風運動エネルギーにおける剛体回転成分の寄与率を表している。

図 5.2 に  $R_T, E_V$  を固定したときの  $Rg$  の  $E_H$  依存性を示す。これより、  $E_H$  が非常に大きいときは  $Rg \sim 1$  となり、東西風速場はほぼ剛体回転にあることが分かる。これは図 5.3 の (vi) から確認できる。一方で、  $E_H$  が非常に小さいときは  $Rg$  は  $R_T, E_V$  に依存した一定値を取っている。このような場合は HH 型のハドレー循環解に対応している(図 5.2, 5.3 の (i)).  $Rg$  は、HH 型ハドレー循環解の値から剛体回転解の値へと、図 5.2 の (ii)-(v) のように  $E_H$  のある限られた範囲で大きく変化している。このような範囲内では、

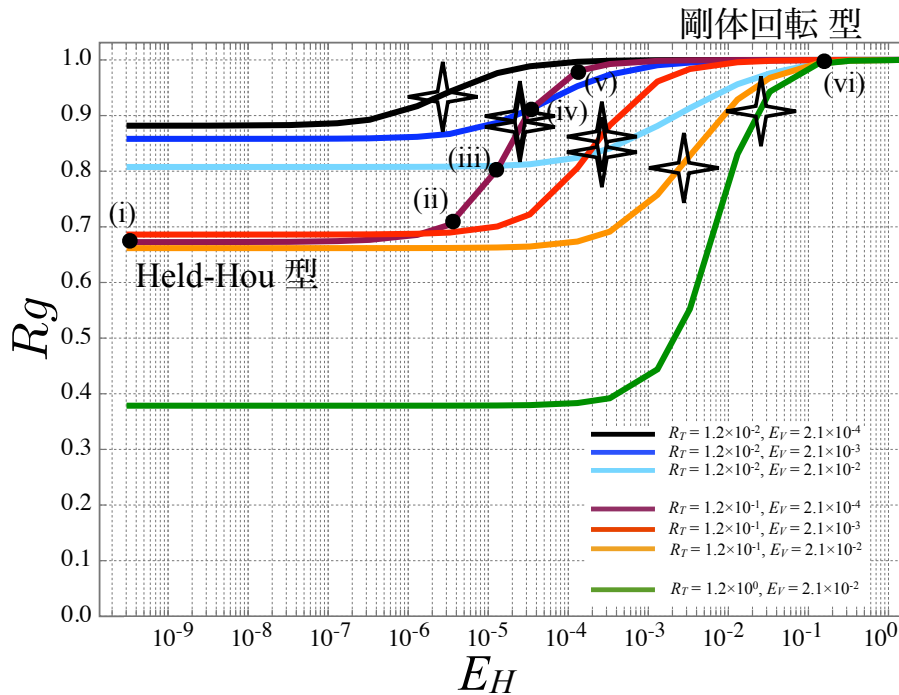


図 5.2 剛体回転率  $Rg$  の水平エクマン数  $E_H$  に対する依存性。十字形は  $E_H \sim E_V S$  で見積られる位置を表す。ローマ数字は図 5.3 のそれと対応する。

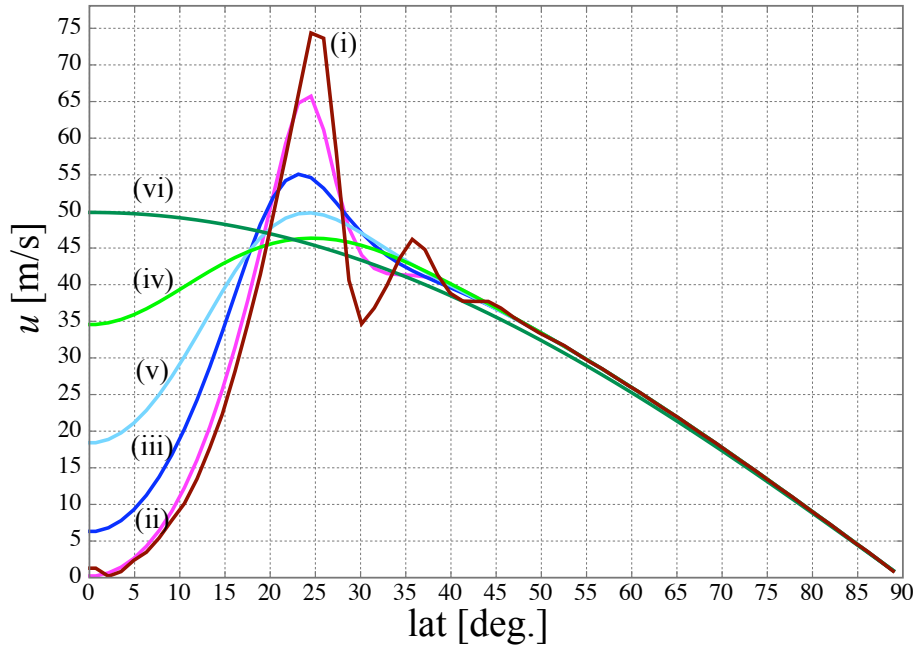


図 5.3 最上層の東西風 [m/s] の緯度分布. パラメータ値は  $E_H =$ (i)  $3.3 \times 10^{-9}$ , (ii)  $3.3 \times 10^{-6}$ , (iii)  $1.3 \times 10^{-5}$ , (iv)  $3.3 \times 10^{-5}$ , (v)  $1.3 \times 10^{-4}$ , (vi)  $1.3 \times 10^{-1}$ ,  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$ ,  $E_V = 2.1 \times 10^{-4}$ .

低緯度上空の東西風が大きく増加している (図 5.3).

ここで図 5.2 において HH 型から剛体回転型, 大きく変化する領域のパラメータ空間上のおよその位置を見積もることを考える. 東西の運動方程式 (2.1) を左辺を絶対角運動量  $M = a^2 \Omega \cos^2 \phi + ua \cos \phi$  で書き直すと,

$$\frac{1}{a \cos \phi} \nabla \cdot (\mathbf{v}M) = \nu_H D_H(u) + \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (5.6)$$

となる. ここで  $\mathbf{v} \equiv (v, w)$  は子午面流速で,  $\nabla \equiv [(a \cos \phi)^{-1} \partial(\cos \phi) / \partial \phi, \partial / \partial z]$  は子午面内の勾配演算子である.  $\nu_H$  が十分に小さいときは, 式 (5.6) は左辺のフラックス発散項と右辺の鉛直粘性項が釣り合っている. そして, (5.6) の水平拡散項は  $\nu_H$  の増大ともなって大きくなるので, HH 型ハドレー循環解から大きく変わるのは水平拡散項が他の支配的な項 (フラックス発散項と鉛直粘性項) と同程度の大きさになるときだと期待できる.

HH 型ハドレー循環解における水平拡散項の大きさは HH モデルの理論解を利用することで, 次のように見積もることが出来る. まず, ハドレーセルの外側では東西風速場は

ニュートン加熱/冷却の基準温位場 (2.6) と温度風平衡にあるので,

$$u_e = a\Omega \left[ \left( 1 + 2R_T \frac{z}{H} \right)^{1/2} - 1 \right] \cos \phi, \quad (5.7)$$

となる (式 (5.7) の詳しい導出は付録 A 参照). これは剛体回転の場であり, 水平拡散項はゼロになる. 一方でハドレーセル内の最上層の東西風は角運動量保存則により決められ,

$$u_M = a\Omega \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi}, \quad (5.8)$$

となる. つまり, HH 型ハドレー循環解における水平拡散項の大きさは  $\nu_H u_M / a^2 \sim \nu_H a \Omega / a^2$  で見積もられる. よって, これが HH 型ハドレー循環解で支配的な項のひとつである鉛直粘性項と同じ大きさになるとき,

$$\nu_H \frac{a\Omega}{a^2} \sim \nu_V \frac{U}{H^2}, \quad (5.9)$$

となる. すなわち, 水平拡散項と鉛直拡散項が同程度の大きさになるのは,

$$E_H \sim E_V S, \quad (5.10)$$

となるときである. ここで,  $S$  の値として前節で見積もった式 (5.4) を用いると, 見積り (5.10) を満たす  $E_H$  は図 5.2 において十字形で示した値となる. この見積りは実際の変化領域を良く見積もっている. ゆえに, 上記の見積りは妥当だと言える.

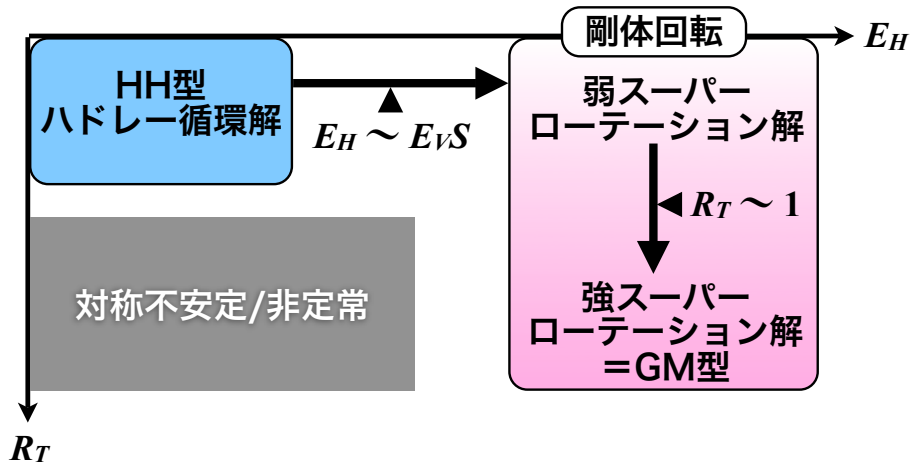


図 5.4 定常解の無次元パラメータ  $R_T, E_H, E_V$  に対する依存性を表す模式図.

### 5.3 軸対称 2 次元のまとめ

これまでの結果を簡単にまとめると図 5.4 のようになる. つまり, 自転軸対称, 赤道対称を仮定し, ニュートン加熱/冷却を用いた, 球面上のブシネスク流体プリミティブ方程式系の定常解は無次元パラメータ  $R_T, E_H, E_V$  に対して, 以下の依存性をもつ.

- (1)  $R_T$  が大きく,  $E_H$  が小さいときは, 対称不安定が発生し, 解は非定常となる.
- (2)  $R_T, E_H, E_V$  がともに小さいときは HH 型ハドレー循環解となる. この解は  $E_H$  を大きくするとき, ある限られた  $E_H$  の範囲で大きく変化して, 剛体回転解になる. この変化が大きくなるときの  $E_H$  は  $R_T, E_V$  に依存しており, およそ  $E_H \sim E_V S$  で見積もることが出来る.
- (3)  $R_T$  を大きくしたときに, 強スーパーローテーション ( $S > 1$ ) になるためには, 少なくとも  $E_H$  が  $E_V$  よりも大きいことが必要となる. そして,  $E_H$  が十分に大きいとき ( $\sim 10^{-1}$ ) 東西風速場は剛体回転になり, このときの  $S$  は,  $R_T \leq 1$  のとき  $S \sim R_T$ ,  $R_T > 1$  のとき  $S \sim \sqrt{R_T}$  で見積もられる. これは  $E_V$  が小さいほどよい見積りとなる.

## 第 6 章

# 2 次元・3 次元比較

本章では 3 次元モデルで数値計算を行い, その 3 次元解とこれまでに得られた軸対称 2 次元解を比較する.

### 6.1 3 次元計算

3 次元計算を行うための支配方程式系は, 式 (2.1)-(2.10) を 3 次元に拡張したものである. 3 次元の方程式系や数値モデルの詳細に関しては, 付録 B.3 節を参照されたい.

#### 6.1.1 実験設定

2 次元計算との比較を行うために, 基本的には同じ実験設定で, 同じスweep範囲を計算する. ただし, 2 次元モデルにおける拡散・粘性項の意味合いは 3 次元モデルにおけるそれと異なるので, 3 次元実験のスweepパラメータは  $R_T$  のみとする. つまり, 軸対称 2 次元モデルにおける拡散・粘性項は実際の 3 次元世界における非軸対称成分による混合効果をパラメタライズしたものだが, 3 次元モデルの拡散・粘性項はサブグリッドスケール (格子間隔よりも小さいスケール) の現象による混合効果を表し, 主として数値的な安定性のために導入されるものだからである. また, 3 次元計算には 2 次元計算より多くの計算量が必要となるため, 本研究では 3 次元計算の水平解像度は 2 次元計算の半分に落とす.

よって, 3 次元計算の実験設定は以下の通りである.

- 空間解像度は切断波数 T42(ガウス緯度で極から赤道まで 32 点), 鉛直 32 層.
- 時間発展計算の時間刻み幅は 1 時間.
- スweepパラメータは  $R_T$  で, スweep範囲は  $1.2 \times 10^{-2}$  から  $1.2 \times 10^3$ .



- その他の外部パラメータは 2 次元計算のときと同じ値に固定.
- 鉛直エクマン数は  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$ .
- 数値粘性として 4 次の高階粘性を導入. 切断波数に対する緩和時定数は 2.4 時間 (Held and Suarez, 1994).

### 6.1.2 実験結果

3次元モデルの解は多くの場合, 何らかの不安定を含み, 安定な定常解にはならない. ゆえに, 解がおよそ周期的に変化している準定常な状態に達した後, 十分に長い期間で解を時間平均したものを扱う. また,  $R_T = 1.2 \times 10^{-2}$  の計算結果は, 切断波数付近にエネルギーが溜まり, 数値解として不適切であった. これは自転を速くすると木星の縞模様に見られるようなマルチジェット構造が形成されると期待されるが (Williams, 2003), 今回の水平解像度では幅の狭い複数のジェットを表現できなかったものと考えている. よって, ここでは  $1.2 \times 10^{-1} \leq R_T \leq 1.2 \times 10^3$  の範囲の解を対象に考察する.

はじめに, 全球積分した相対角運動量 (以後, 総角運動量と呼ぶ) の時間発展を図 6.1 に示す. この図から次のことが分かる.

- (1) 総角運動量は, 初期状態 (静止大気) のゼロから徐々に増加していき, やがて一定値付近でやや不規則に振動するようになる. このような状態を準定常状態と呼ぶことにする.
- (2) 準定常状態に達するまでに要する時間は  $R_T$  が大きくなるほど長くなる. また, 準定常時の振動周期も  $R_T$  が大きいほど長い.
- (3) とりわけ  $R_T \geq 1.2 \times 10^2$  で準定常状態に達するまでの時間が長くなる.
- (4)  $R_T = 1.2 \times 10^3$  のときは, 準定常状態での振動がとりわけ明瞭に見え, 振幅が大きく, 振動周期も非常に長い.

このように, 時間発展の過程においても非常に興味深い現象が見られたが, 本研究では軸対称 2次元定常解との比較に焦点を絞り, このような現象の解析は行わない. 本研究では, 図 6.1 で陰影をつけた期間のデータを切り出し, 時間平均を施した解を準定常解として扱う.

この準定常解の東西平均子午面場を図 6.2 に示す.  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  (地球程度) のときはハドレー循環および間接循環のフェレルセルが形成されている. ただし, 現実地球のような 3セル構造にはならず, フェレルセルが極まで達している. 東西風は赤道上空で東

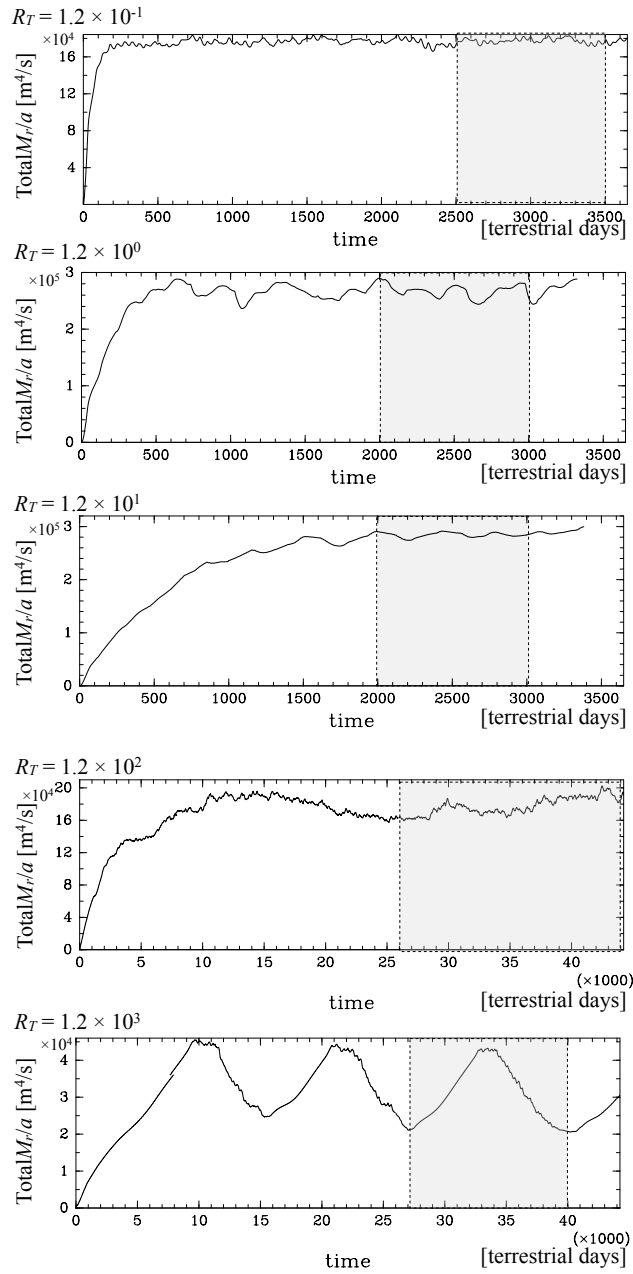


図 6.1 全球積分した相対角運動量の時間発展. ただし, 惑星半径  $a$  で除した値で示している. 陰影部は切り出して時間平均する期間を表す.  $R_T = 1.2 \times 10^2, 10^3$  のグラフは時間軸の大きさが他と異なる.  $R_T = 1.2 \times 10^3$  でデータが重複している箇所は, 数値計算のリスタート時に出力時刻が重複したためである.

風となっており, 緯度  $45^\circ$  付近に幅の広いジェットが形成されている. フェレルセルは  $R_T = 1.2 \times 10^0, 1.2 \times 10^1$  でも見られるが,  $R_T = 1.2 \times 10^1$  では鉛直に 2 つのセルが出

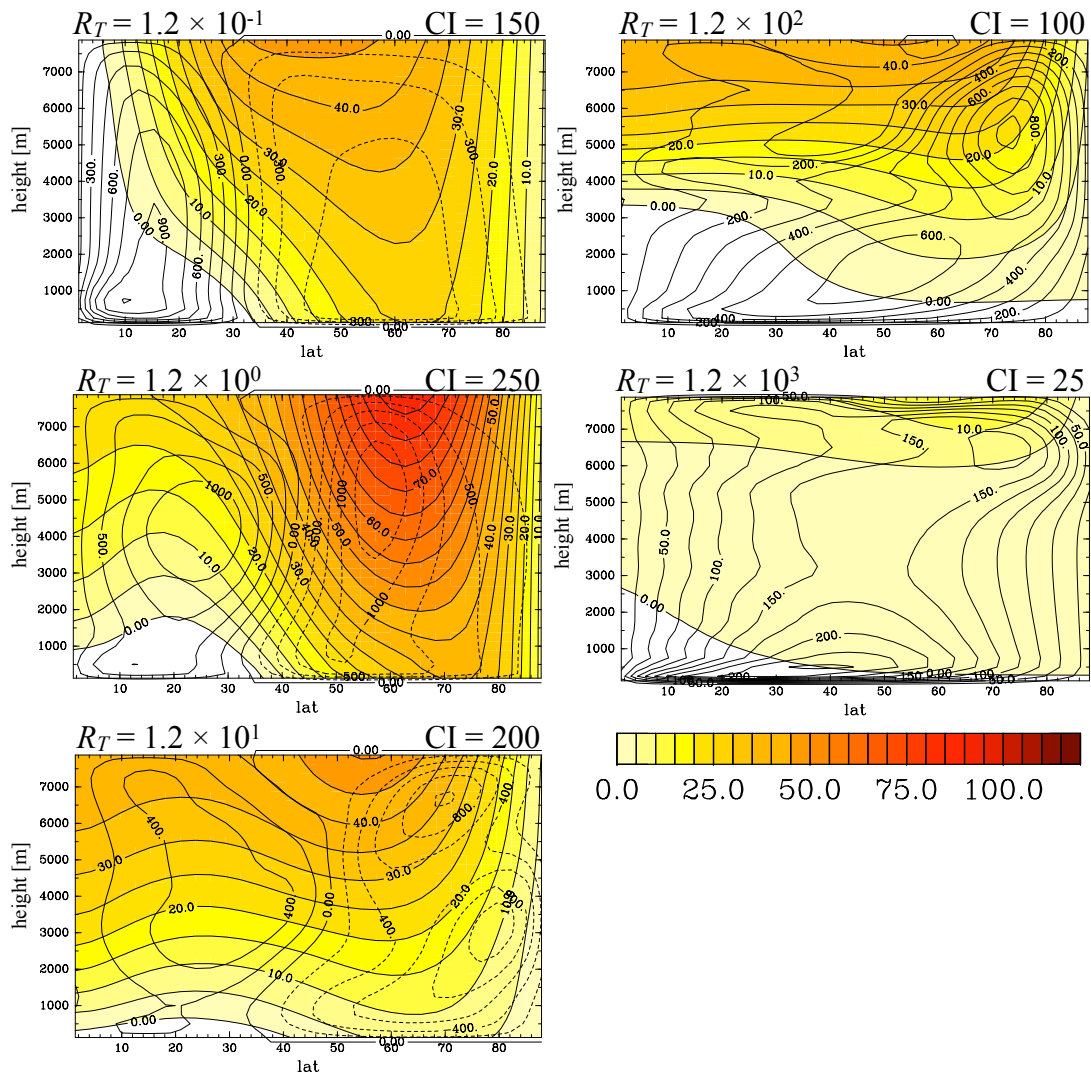


図 6.2 準定常状態の東西平均東西風 [m/s](色調) と平均子午面循環 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ](等値線).  $R_T$  の値, 等値線間隔は各パネル上部に表示.

来ている. 東西風は  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  の場合と異なり, 赤道上空に西風ジェットが存在する. 一方,  $R_T = 1.2 \times 10^2, 10^3$  では間接循環はなく, 大まかに見て 1 セルの構造をしている. 東西風は水平方向に一樣に近い風速場となっている. スーパーローテーション強度  $S$  は,  $R_T = 1.2 \times 10^2$  のときに  $S = 3$ ,  $R_T = 1.2 \times 10^3$  のとき  $S = 2$  である.

## 6.2 2次元解と3次元解の比較

本節では軸対称2次元解と前節で求めた3次元の準定常解の比較を行う。まず、最上層の東西平均東西風速分布で比較を行う。次に、赤道上空での東西風速が最も近い2次元解を選択して、その水平拡散と3次元解の角運動量の渦フラックスを東西平均子午面場で比較する。そして、2次元解と3次元解の比較からHHモデルとGMモデルの3次元解に対する妥当性を考察する。

### 6.2.1 最上層の東西風

第5章で見てきたように、HH型ハドレー循環解とGM型スーパーローテーション解は、それぞれ最上層の東西風の特徴があるので、まずはこれを比較する。図6.3は2次元解と3次元解の最上層の東西風の緯度分布を重ね書きしたものである。ただし、2次元解は3次元解に最も近い2つを選択している。これより、次のことが分かる。

- (1)  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$ (地球程度)で、3次元解の低緯度の東西風速分布はHH型ハドレー循環解( $E_H$ が小さいとき)の風速分布と良く一致している。
- (2)  $R_T$ が小さいときの中高緯度の3次元解は、2次元解との差異が大きい。これは軸対称2次元モデルでは発生しない非軸対称な不安定による効果だと考えられる。
- (3)  $R_T$ が大きい場合の3次元解はGM型スーパーローテーション解のような剛体回転に近い風速分布にはならず、 $E_H \sim 10^{-3}$ 程度のときの風速分布に近い。
- (4) 赤道上の風速で比較したときに3次元解と最も近い値の2次元解は、 $R_T = 1.2 \times 10^0$ では $E_H = 1.3 \times 10^{-3}$ 、 $R_T = 1.2 \times 10^1$ では $E_H = 3.3 \times 10^{-3}$ 、 $R_T = 1.2 \times 10^2$ では $E_H = 1.3 \times 10^{-2}$ 、 $R_T = 1.2 \times 10^3$ では $E_H = 3.3 \times 10^{-3}$ である。

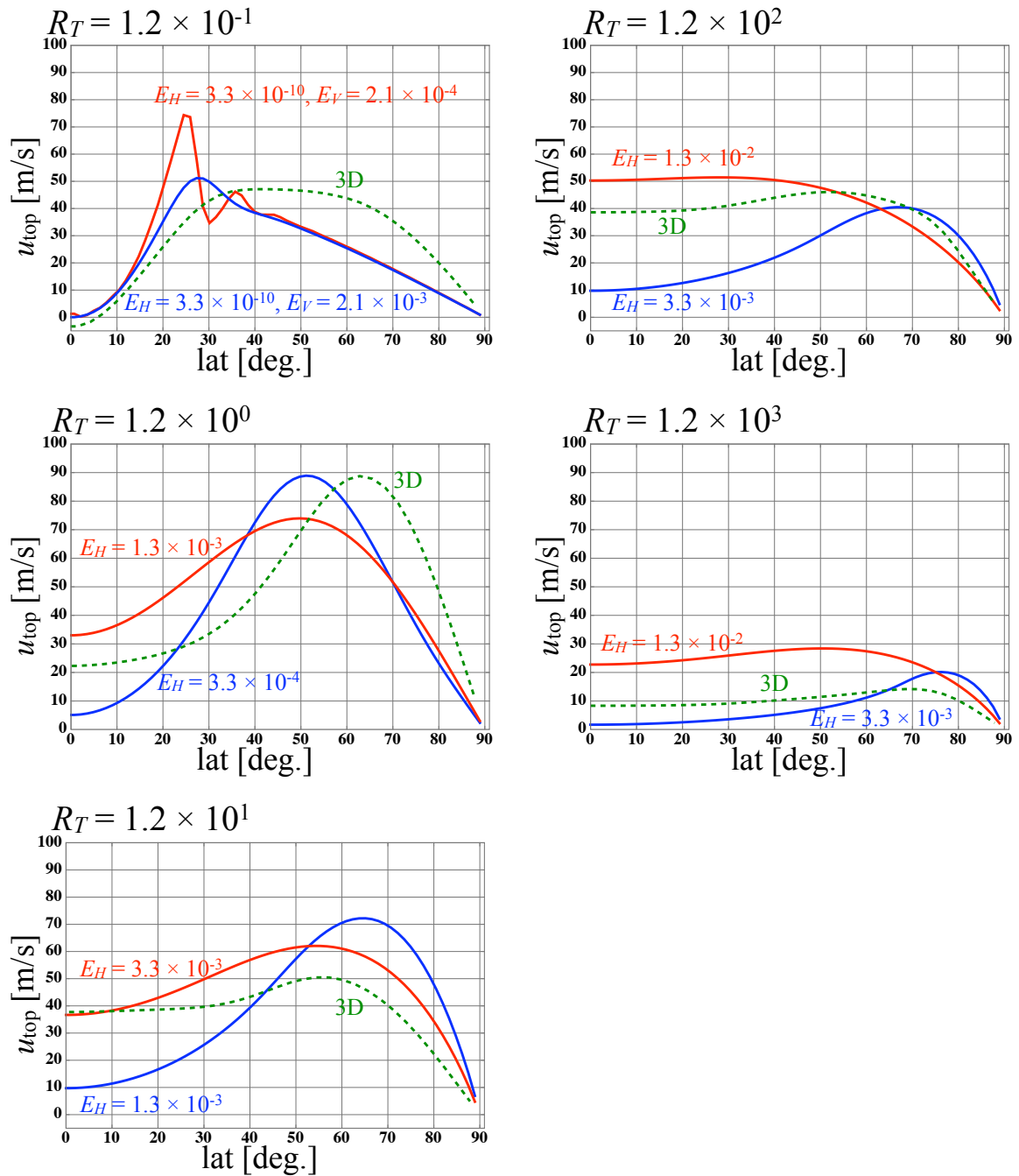


図 6.3 最上層の東西平均東西風 [m/s] の緯度分布. 緑破線が 3 次元解を, 青/赤実線が 2 次元解を表す.  $R_T$  の値は各グラフ上部に示す.  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  以外は 2 次元解の  $E_V$  は  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$  である.

## 6.2.2 東西平均子午面場

前節では最上層の東西風速の比較をおこなったが、ここでは図 6.3 において、赤道上の風速が 3 次元解と最も近い 2 次元解を選択し、両者の東西平均子午面場を比較する。

さきに角運動量方程式を用いて、軸対称 2 次元モデルの子午面場と 3 次元モデルの東西平均子午面場との関係を述べる。東西の運動方程式は絶対角運動量  $M = ua \cos \phi + a^2 \Omega \cos^2 \phi$  で書き換えることができる。定常軸対称を仮定した 2 次元の方程式の場合、

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}M) = \nu_V \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + \nu_H a \cos \phi D_H(u), \quad (6.1)$$

となる。一方で、3 次元の場合、 $M = \bar{M} + M'$ ,  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$  のように東西平均とそれからのずれ成分に分けてオイラー平均の方程式にすると、

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \bar{M}) = \nu_V \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial z^2} - \nabla \cdot \mathbf{F}_M, \quad (6.2)$$

ただし

$$\mathbf{F}_M \equiv (\overline{M'v'}, \overline{M'w'}), \quad (6.3)$$

となる。

ここで注目すべきは (6.1), (6.2) はともに、右辺第 3 項 (水平拡散項と角運動量渦フラックスの収束発散項) がなければ、ハイドの定理 (Hide, 1969; 付録 A.4 節参照) により赤道上空で西風をとれないことである。すなわち、軸対称 2 次元モデルで解の構造の決定に重要な役割を果たした水平拡散項と、3 次元モデルの角運動量渦フラックスの収束発散項は同じ役割 (角運動量を赤道上空に輸送するという役割) を果たしているのである。

そこで、この両者を比較する。まず、東西平均絶対角運動量 (を惑星半径  $a$  で除した量) と平均子午面流線関数を図 6.4, 6.5 に示す。そして、図 6.6, 6.7 に 3 次元解の角運動量渦フラックスとその収束、2 次元解の水平拡散の分布を示す。

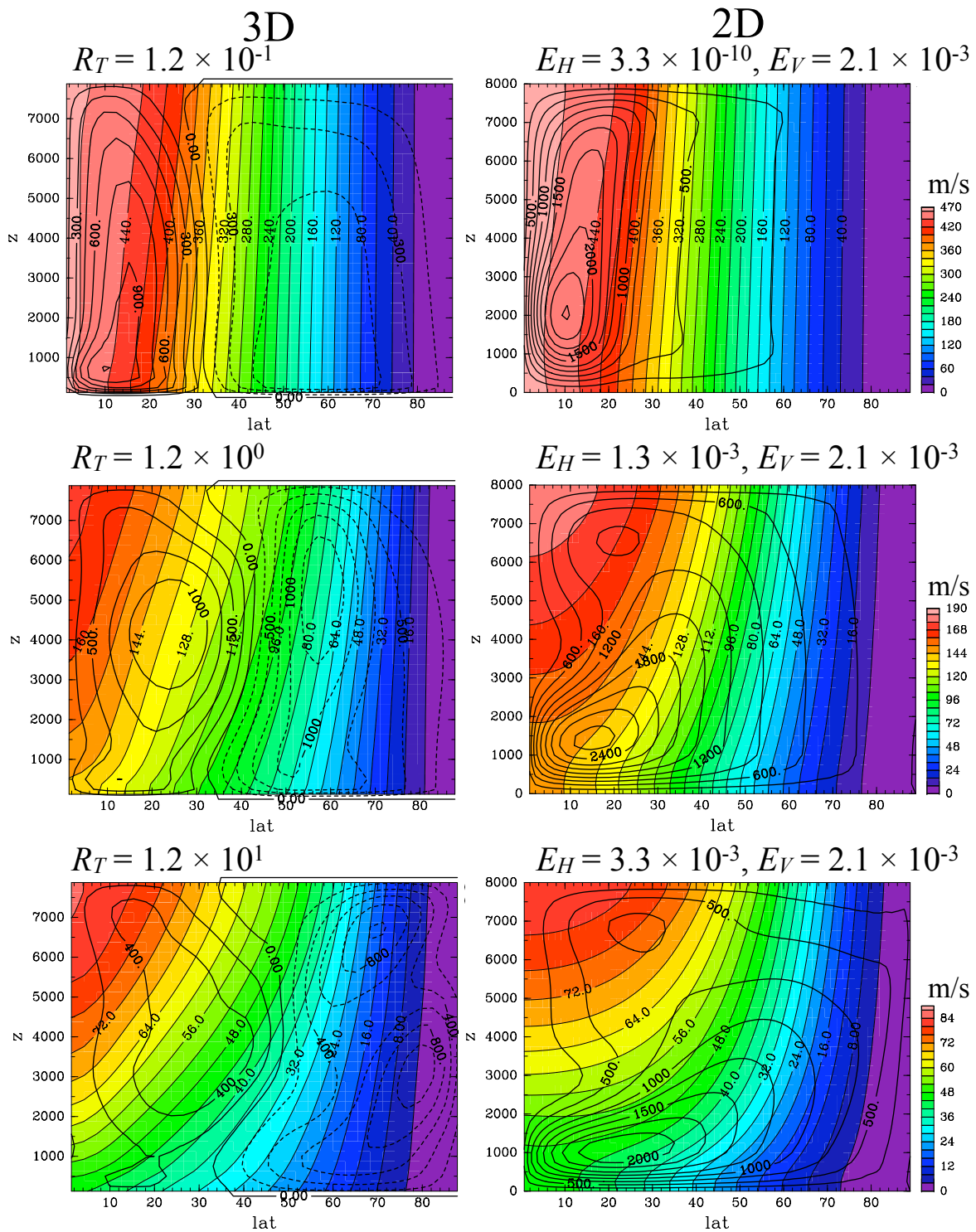


図 6.4 東西平均絶対角運動量を惑星半径  $a$  で除した量 [m/s] (色調) と平均子午面流線関数  $[m^2/s]$  (等値線) の (左) 3次元解と (右) 2次元解. 2次元解は図 6.3 にて赤道上空の風速が最も近い場合を各  $R_T$  について選択している. 色調は  $R_T$  毎に共通である.

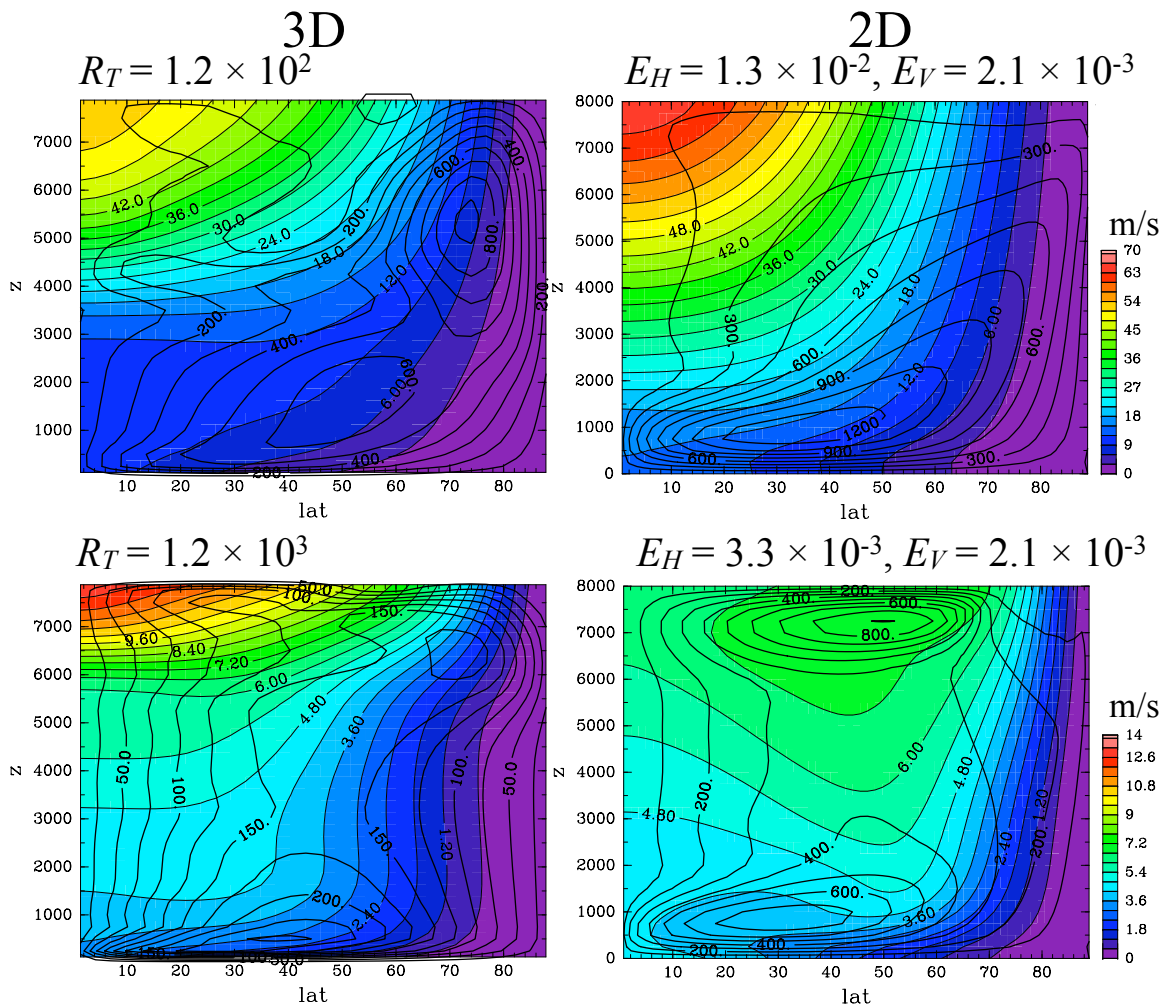


図 6.5 図 6.4 と同様。

まず,  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  に注目すると, 低緯度のハドレー循環は, 強さに若干の違いはあるが, その幅は同程度であり, また角運動量分布も似た分布を示している. このときの角運動量渦フラックスと水平拡散 (以後, まとめて角運動量輸送と呼ぶ) を比較すると, 3次元解は緯度  $30^\circ$  付近から緯度  $50^\circ$  付近の上空へと角運動量を輸送しているのが特徴的である. これは次節で詳しく解析する. 一方で, 低緯度に着目すれば3次元解と2次元解ともに角運動量輸送がない. これらから, 地球程度の  $R_T$  のときは, 低緯度に限れば, 軸対称2次元モデルが3次元モデルの近似として機能していることがわかる.

ところが,  $R_T = 1.2 \times 10^0, 10^1$  の場合は子午面循環の形状が大きく異なる. 3次元解ではハドレー循環は比較的きれいな形をしているが, 2次元解は下方に強い循環が集中し, 上方に弱いセルを形成し変形している. また, 角運動量輸送に注目すると, 2次元解では高緯



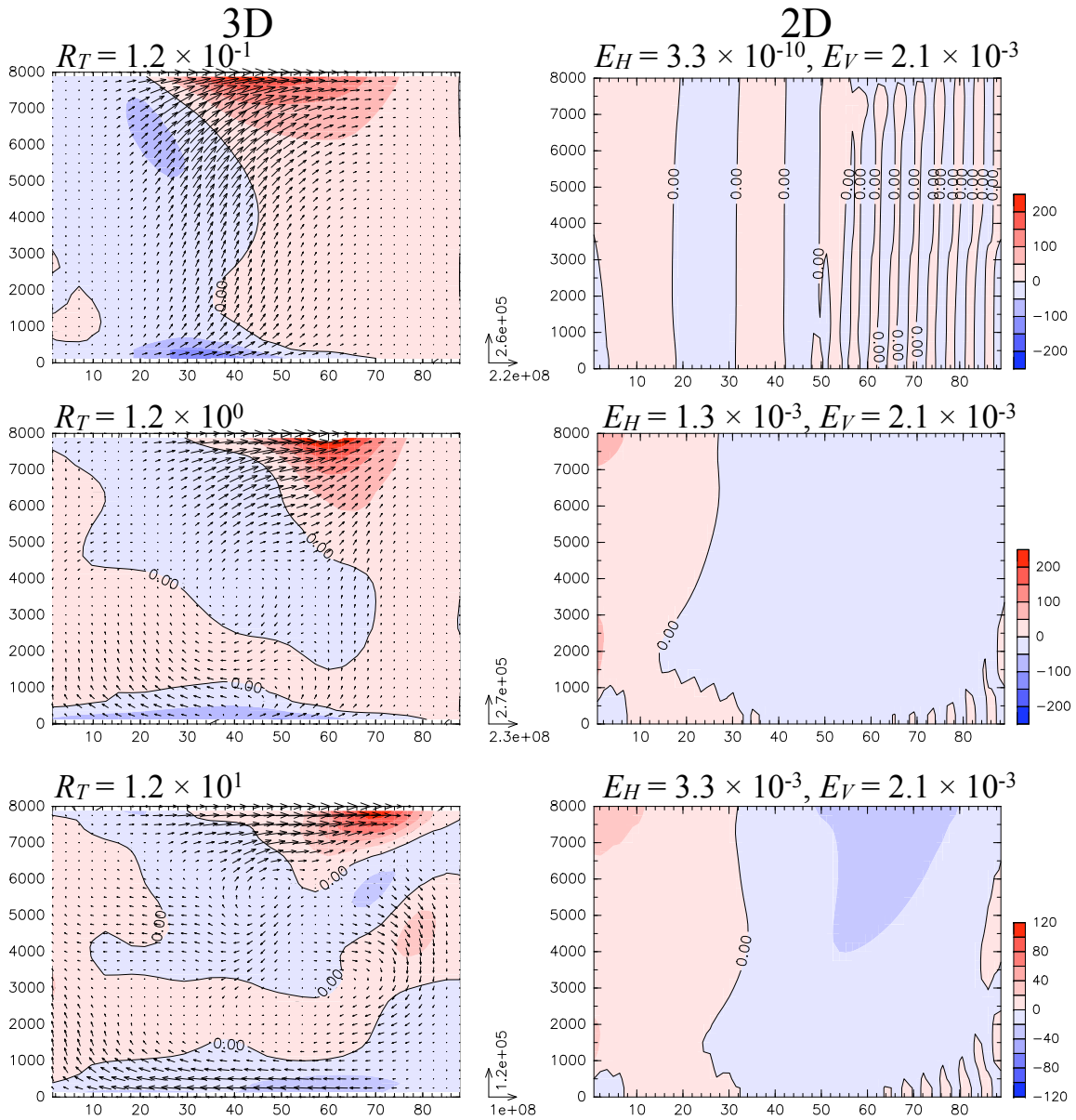


図 6.6 (左) 3次元解の角運動量渦フラックス [ $\text{m}^3/\text{s}^2$ ] とその収束 [ $\text{m}^2/\text{s}^2$ ] と (右) 2次元解の水平拡散 [ $\text{m}^2/\text{s}^2$ ] の子午面分布. 暖色系が西風 (東向き) 加速の働きをしていることを表す. 2次元解は図 6.3 にて赤道上の風速が最も近い場合を各  $R_T$  について選択している. 色調は  $R_T$  毎に共通.

度から低緯度への単純な輸送であるのに対して, 3次元解では地表面付近から赤道上空への角運動量輸送がある. これが, ハイドの定理を破り, 赤道上空で西風を生む原因だと考えられる.

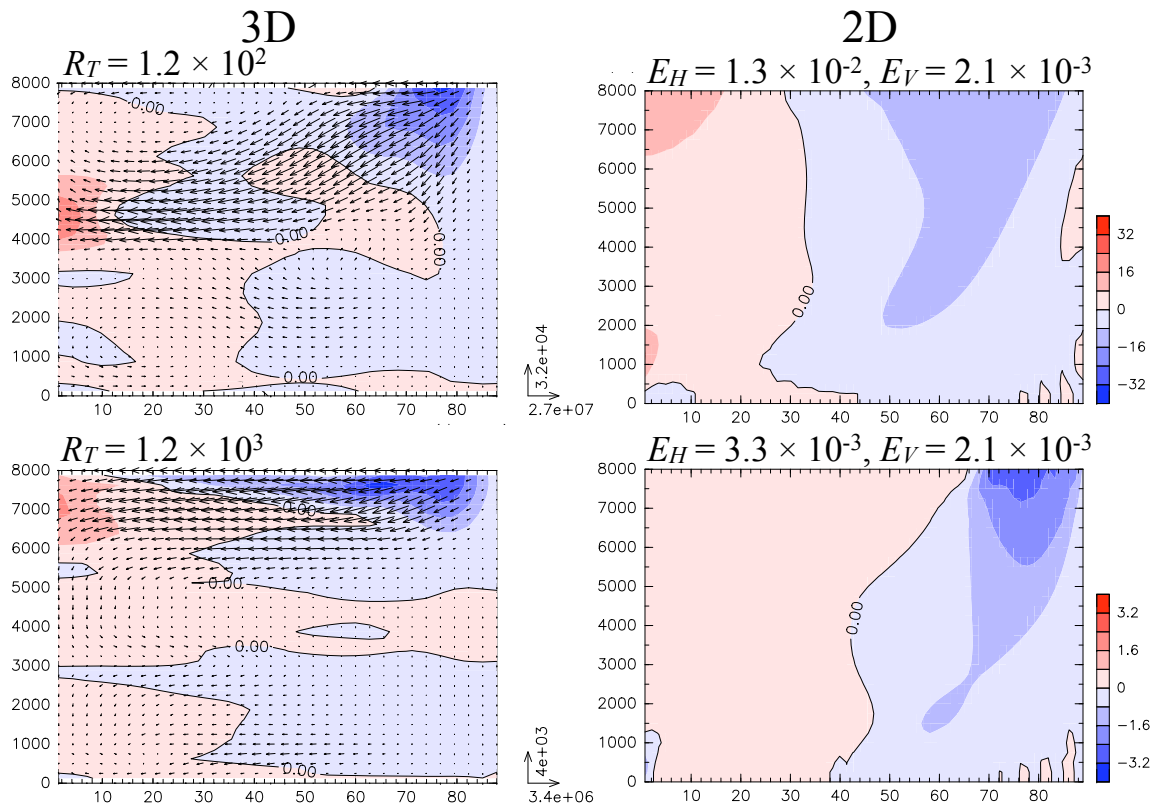


図 6.7 図 6.6 と同様.

次に、自転が遅い場合 ( $R_T = 1.2 \times 10^2, 10^3$ ) に注目する。自転が遅い場合は、東西風速場は剛体回転になり、強いスーパーローテーションが実現されるとするギアシメカニズムが働いていると期待された。しかし、実際に 3 次元解として実現されたのは、それほど強いスーパーローテーションではないことは前節で確認した。そこで、同じような風速分布が実現されたとき ( $E_H \sim 10^3$  のとき) の 2 次元解と比較すると、子午面循環の特徴は大まかに一致している (図 6.5)。両者とも  $R_T = 1.2 \times 10^2$  では子午面循環が高緯度側・下方に偏っており、 $R_T = 1.2 \times 10^3$  では上方と下方にそれぞれ薄いセルが形成されている。角運動量輸送に注目すると、 $R_T \leq 1.2 \times 10^1$  まではみられた中高緯度への角運動量輸送がなくなっている (図 6.7)。逆に、中高緯度から低緯度への角運動量輸送が顕著であり、それは上層部分に集中している。この輸送の原因に関して、次節で詳しい解析を行う。

### 6.2.3 ヘルド・ハウモデルとギーラシ・松田モデルの3次元解に対する妥当性

ここでHHモデルとGMモデルの3次元解に対する妥当性を考える。

これまで見てきたように、 $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  のときに、低緯度においては、3次元解と  $E_H = 3.3 \times 10^{-10}$  の2次元解(HH型ハドレー循環解)の、最上層の東西風速分布やハドレー循環の幅がよく一致し、2次元解、3次元解ともに赤道への角運動量輸送がなかった。これはすなわち、 $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  のときは、軸対称2次元のHHモデルが3次元解のハドレー循環のモデル化として、妥当であることを意味している。<sup>\*1</sup>

一方で、 $R_T = 1.2 \times 10^2, 10^3$  のときの3次元解は、数倍程度スーパーローテーションにはなったものの、その風速分布は  $E_H = 1.3 \times 10^{-2}, 3.3 \times 10^{-3}$  のときの2次元解と似ていた。また子午面循環や、角運動量輸送の大きさや構造も似ていた。すなわち、3次元解の非軸対称擾乱による角運動量輸送の大きさは、 $E_H = 1.3 \times 10^{-2}, 3.3 \times 10^{-3}$  の水平拡散に相当すると見なせる。ところが、これらの  $E_H$  の値は、GMモデルで仮定している、“水平拡散は鉛直粘性より遥かに大きい”ことを十分に満たしていない(今の場合、 $E_V/E_H = 0.16, 0.6$  だが、M80/82では10倍程度のスーパーローテーションには  $E_V/E_H \sim 10^{-2}$  程度が必要なことが示されている)。すなわち、 $R_T = 1.2 \times 10^2, 10^3$  のときに、GMモデルの3次元解に対する妥当性は不十分だと言える。

---

<sup>\*1</sup> よりこまかく見ると、HHモデルで説明される2次元解は  $E_V \rightarrow 0$  の極限解であり、本研究では  $E_V = 2.1 \times 10^{-4}$  のときが最もそれに近い。一方で、3次元解は  $E_V = 2.1 \times 10^{-4}$  の2次元解よりも  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$  の2次元解に近い。しかし、これは3次元計算の際に入れた鉛直粘性の大きさが  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$  であるためと考えている。

## 6.3 3次元解の解析

本節では、3次元解において角運動量輸送をもたらす不安定の3次元構造を確認するために、その不安定の典型例をとりあげ、解析を行う。

### 6.3.1 エリアッセン・パームフラックス解析

まずは、波と平均流の相互作用に関する解析手段であるエリアッセン・パーム (Eliassen-Palm, EP) フラックス解析を行う。ただし、本研究では気象業界で伝統的に用いられている EP フラックスを拡張したもの (Ferrari and Plumb, 2003) を用いる (詳しくは付録 C 参照のこと)。以下、 $\phi, z$  の下付き文字はその偏微分を表す。

まず、

$$\psi \equiv \frac{\overline{v'\Theta'}\overline{\Theta}_z - \overline{w'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi}{a^{-2}\overline{\Theta}_\phi^2 + \overline{\Theta}_z^2}, \quad (6.4)$$

として、

$$\overline{v}^* \equiv \overline{v} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (6.5)$$

$$\overline{w}^* \equiv \overline{w} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\psi \cos \phi), \quad (6.6)$$

で、残差速度 ( $\overline{v}^*, \overline{w}^*$ ) を定義する。そして、変形オイラー平均 (Transformed Eulerian Mean, TEM) の東西運動方程式は

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{u} \overline{v}^* \cos \phi) + \frac{\partial (\overline{u} \overline{w}^*)}{\partial z} - \left( f + \frac{\overline{u} \tan \phi}{a} \right) \overline{v}^* - \overline{X} = \frac{1}{a \cos \phi} \nabla \cdot \mathbf{F}_u, \quad (6.7)$$

となり、EP フラックス  $\mathbf{F}_u \equiv (F_u^\phi, F_u^z)$  とその発散は

$$F_u^\phi \equiv a \cos \phi \left( \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \psi - \overline{u'v'} \right), \quad (6.8)$$

$$F_u^z \equiv a \cos \phi \left( \left[ f - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{u} \cos \phi) \right] \psi - \overline{u'w'} \right), \quad (6.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_u = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_u^\phi \cos \phi) + \frac{\partial F_u^z}{\partial z}, \quad (6.10)$$

と定義する。このように定義した EP フラックスを用いる理由は従来の EP フラックスだと、境界条件  $\Theta_z = 0$  のために、境界上で定義出来ないからである。ここで用いる EP フラックスは従来のものより一般化されたものである。

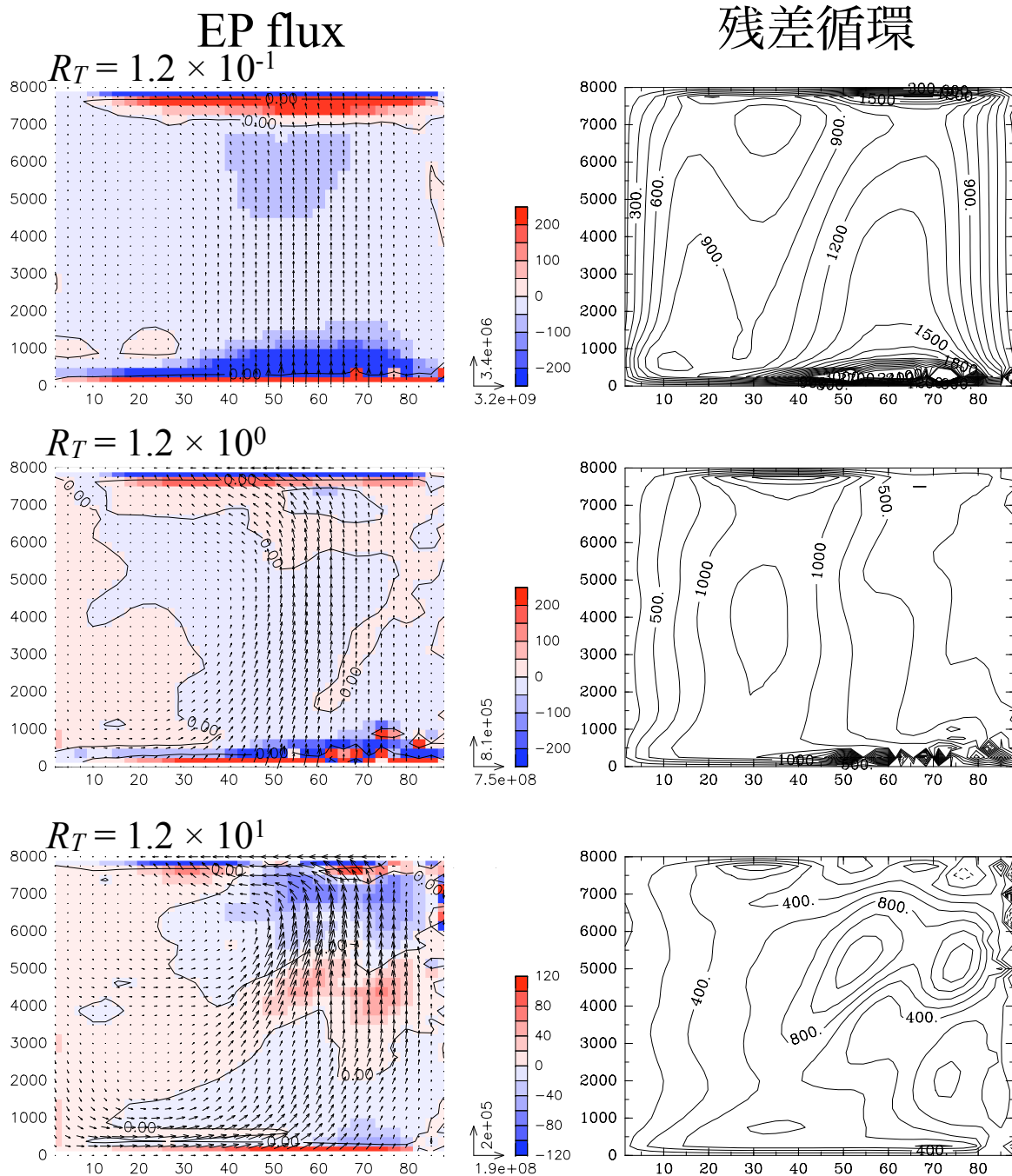


図 6.8 各  $R_T$  に対する (左) EP フラックス [ $\text{m}^3/\text{s}^2$ ] とその発散 [ $\text{m}^2/\text{s}^2$ ] と, (右) 残差循環 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] (右). ただし, EP フラックスの収束に関しては色調の最大値 (最小値) より大きい (小さい) 部分もその色で表示してある. 残差循環の等値線はゼロを基準に正 (負) の方向に 20 (10) 本を表示し, それより大きい (小さい) 値の等値線は描いていない.

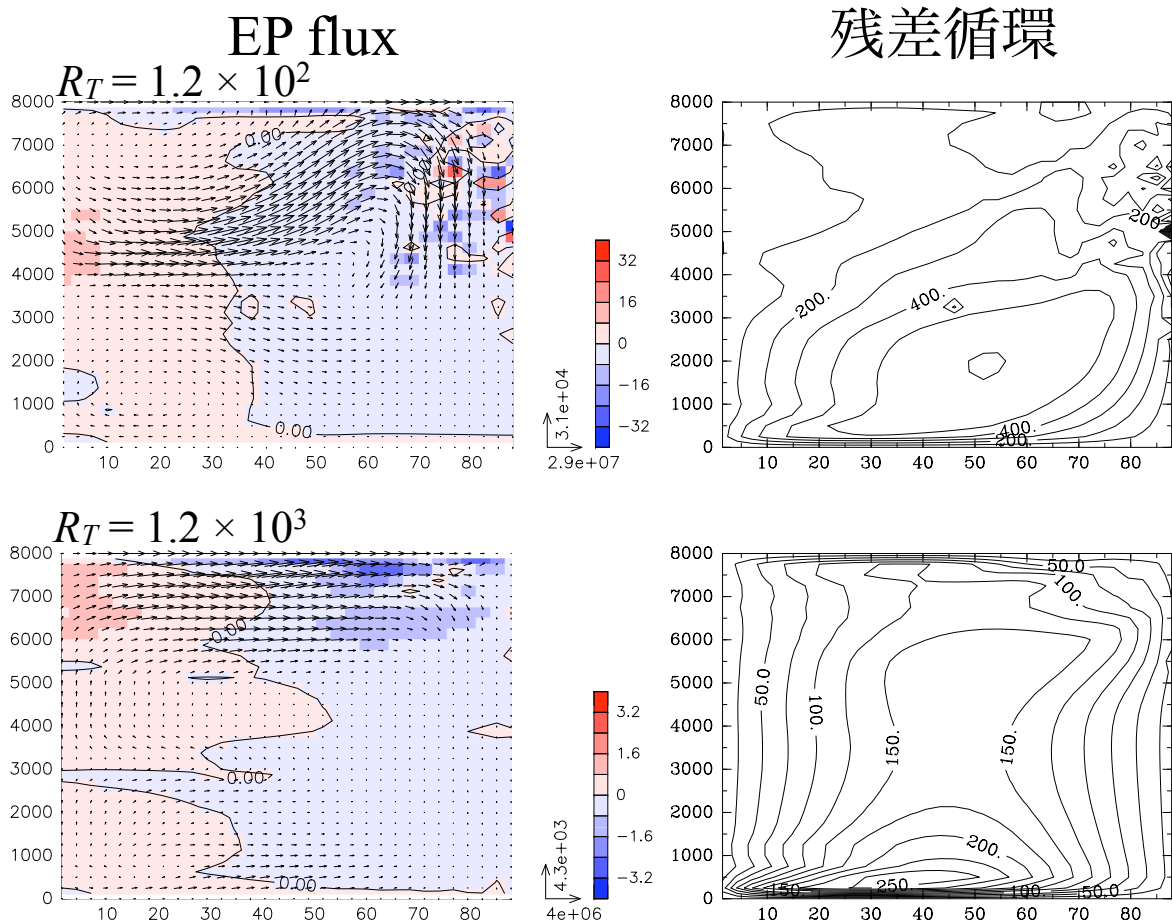


図 6.9 図 6.8 と同様.

図 6.8, 6.9 に 3 次元解の EP フラックスとその収束, および残差循環 (すべて時間平均) を示す. EP フラックスはおよそ,  $\phi$  成分が南北の運動量輸送を表し (向きは逆),  $z$  成分が南北の熱輸送を表している (上向きが北向き輸送に対応). よって, 図 6.8 でベクトルが上向きとなっている中高緯度では傾圧不安定が生じていると予想される.  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  の場合などで, 上下端に EP フラックスの収束発散の強い対比があるが, これは境界条件の影響である. 実際, これらの収束発散による東西風の加減速は, 同じく上下端に張り付いている残差循環による運動量輸送と釣り合っている. 残差循環に着目すれば,  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  (地球程度) では, 実際に観測される残差循環ような 2 こぶの構造 (ハドレー循環とフェレル循環) が見えている. しかし,  $R_T = 1.2 \times 10^0, 10^1$  ではそのような構造はなく,  $R_T = 1.2 \times 10^0$  では 1 セル,  $R_T = 1.2 \times 10^1$  では複数セルの構造になっている.

$R_T = 1.2 \times 10^2, 10^3$  の上空では、ベクトルが極向きなので、運動量は赤道方向に輸送されている。EP フラックスの  $z$  成分がほとんどないことから順圧不安定が生じて、運動量を輸送していると考えられる。残差循環に着目すれば、 $R_T = 1.2 \times 10^2, 10^3$  ともにおよそ 1 セルの形状になっている。上層ではこの残差循環の極向きの流れによる運動量輸送と順圧不安定による運動量輸送が釣り合っていると考えられる。

### 6.3.2 不安定の 3 次元構造

ここでは、図 6.8, 6.9 の EP フラックスから示唆される不安定を、擾乱の 3 次元構造を見ることで確認する。

#### 傾圧不安定

$R_T = 1.2 \times 10^{-1}, 10^0$  のときの、中高緯度の鉛直上向きの EP フラックスは傾圧不安定を示唆している。最上層の東西風速分布 (図 6.3) において、 $R_T = 1.2 \times 10^{-1}, 10^0$  では 3 次元解の方が中高緯度の東西風が強くなっていたが、この原因も傾圧不安定だと思われる。中高緯度の鉛直上向きの EP フラックスが見られる典型例として、 $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  の時刻  $t = 3112$  地球日での 3 次元構造を確認する。この時刻での EP フラックスとその発散、残差循環の様子を図 6.10 に示す。平均場と同様に、緯度  $50^\circ$  から  $60^\circ$  を中心に上向きの EP フラックスがあり、熱を南北に輸送していることを表している。また、残差循環も 2 こぶの構造が見えている。

この時刻での  $\Theta, w$  と  $\psi', \Theta'$  の水平断面を図 6.11 に示す。ただし、 $\psi'$  は水平流線関数<sup>\*2</sup>

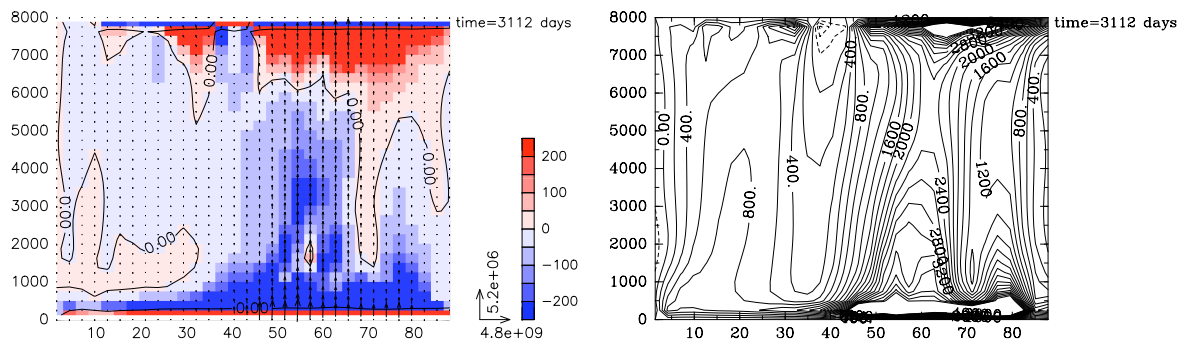


図 6.10  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  で  $t = 3112$  地球日のときの (左)EP フラックス [ $\text{m}^3/\text{s}^2$ ] とその発散 [ $\text{m}^2/\text{s}^2$ ], (右) 残差循環 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].

<sup>\*2</sup> 水平非発散の場合ではないので、この場合、厳密には水平流線関数は定義できない。ここでは流速をトロイ

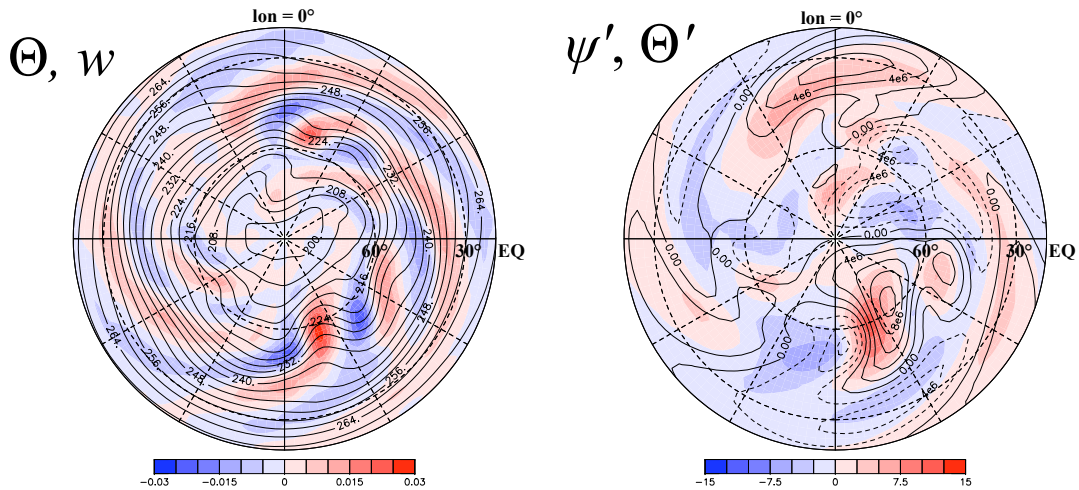


図 6.11  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  で  $t = 3112$  地球日のときの (左) 温位  $\Theta$ [K] (等値線), 鉛直流  $w$ [m/s] (色調) と (右) 水平流線関数の擾乱成分  $\psi'$ [m<sup>2</sup>/s] (等値線), 温位の擾乱成分  $\Theta'$ [K] (色調) の高度 4000m での水平断面図.

の擾乱成分である. 図 6.11(左) をみると, 中緯度で上昇流と下降流が交互に並んでいる. また, 温位の等値線が蛇行していて, 等値線の山谷が南西から北東にのびている. これらは, 傾圧不安定波の特徴をよく示している. 図 6.11(右) をみると,  $\Theta'$  が正の場所で北向きの流れ,  $\Theta'$  が負の場所で南向きの流れになっており, 熱を極向きに輸送している. また,  $\psi'$  の等値線は南西から北東に傾いていて,  $u'v' > 0$  になっている. この運動量の極向きの輸送が, 3次元解の中高緯度の西風を強化する原因となっている. 次に,  $u', v', \Theta', w'$  の緯度  $60^\circ$  で切った経度高度断面を図 6.12 に示す.  $v'$  と  $\Theta'$  が強い正の相関関係にあり, 熱を極方向に輸送している様子が改めて確認できる. また,  $u', v', w'$  は高度が上がるにつれて西に傾いており,  $\Theta'$  は東に傾いている. そして,  $u', v', \Theta'$  は上下端で極値をとり,  $w'$  は真ん中の高度で極値をとっている. これらは傾圧不安定のイーディ (Eady) モードの特徴を非常によく表している.

以上から, 中高緯度で鉛直上向きの EP フラックスの原因が傾圧不安定であることが確認された.

ダル・ポロイダル展開 (付録 B.3.1 参照) したときのトロイダル ( $\psi$ ) を水平の流線関数として使用している. 今の場合, 水平流速に対するポロイダル成分の寄与はトロイダル成分よりも非常に小さく, 実際に  $(u', v')$  のベクトル場と  $\psi'$  の等値線を比較しても, 良く一致している.



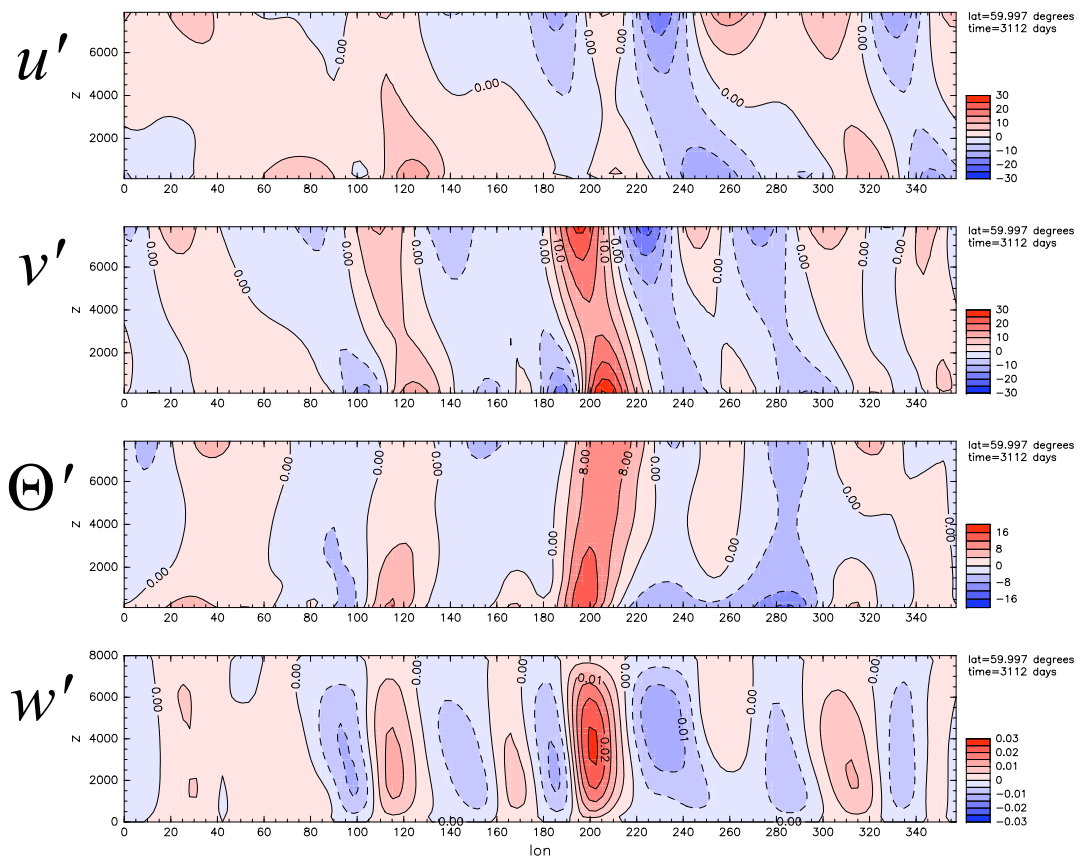


図 6.12  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  で  $t = 3112$  地球日のときの緯度  $60^\circ$  での  $u'$  [m/s],  $v'$  [m/s],  $\theta'$  [K],  $w'$  [m/s] の経度高度断面.

### 順圧不安定

次に,  $R_T = 1.2 \times 10^2, 10^3$  のときに, 低緯度上空に見られる, 極向きの EP フラックスについて確認する. 極向きの EP フラックスは順圧不安定が生じていることを示唆している. この順圧不安定による赤道向きの運動量輸送が, スーパーローテーションの要因になっていると考えられる. ここでは,  $R_T = 1.2 \times 10^2$  の方がより強いスーパーローテーションであること, また,  $R_T = 1.2 \times 10^3$  の場合は, 図 6.1 にあるように大振幅の長周期変動があることから,  $R_T = 1.2 \times 10^2$  の解を対象とする. 低緯度の極向き EP フラックスが見られる典型例として時刻  $t = 28391$  地球日での EP フラックスと残差循環を図 6.13 に示す. 低緯度, 高度 5500m 付近で EP フラックスは極向きに発散しており, 低緯度側に運動量が輸送されている. 残差循環は低緯度上空に平均場にはない, 薄い対流があるが, 下層部の大きな循環などは平均場と同じ構造をしている.

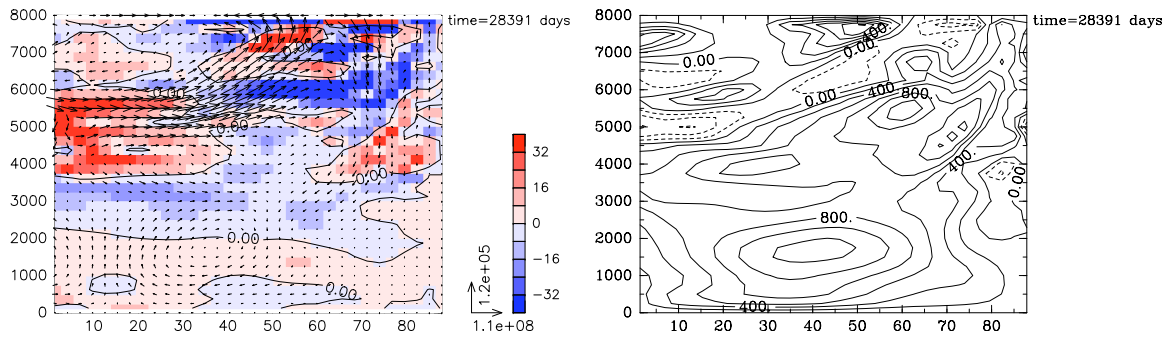


図 6.13  $R_T = 1.2 \times 10^2$  で  $t = 28391$  地球日のときの (左)EP フラックス [ $\text{m}^3/\text{s}^2$ ] とその発散 [ $\text{m}^2/\text{s}^2$ ], (右) 残差循環 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].

この時刻での  $\Theta, w$  と  $\psi', \Theta'$  の水平断面を図 6.14 に示す. 各物理量とも東西波数 1 成分が卓越している.  $\psi'$  の等値線が南東から北西にのびており,  $u'v' < 0$  となって運動量を低緯度側に輸送している.  $\Theta$  の等値線は同心円状に近く, 傾圧不安定の際に比べ, 熱の輸送は少ない.

次に緯度  $24^\circ$  での経度高度断面図を図 6.15 に示す. この図から, 高度 5000m から 6000m にかけて  $u'$  と  $v'$  が負の相関関係にあり, 運動量を赤道側に輸送していることが改めて確認できる. しかし, 順圧不安定に特有の順圧的な構造はあまり目立っていない. 各物理量とも, 地表から高度約 3000m までと 6000m より上空では位相が西に傾いており,

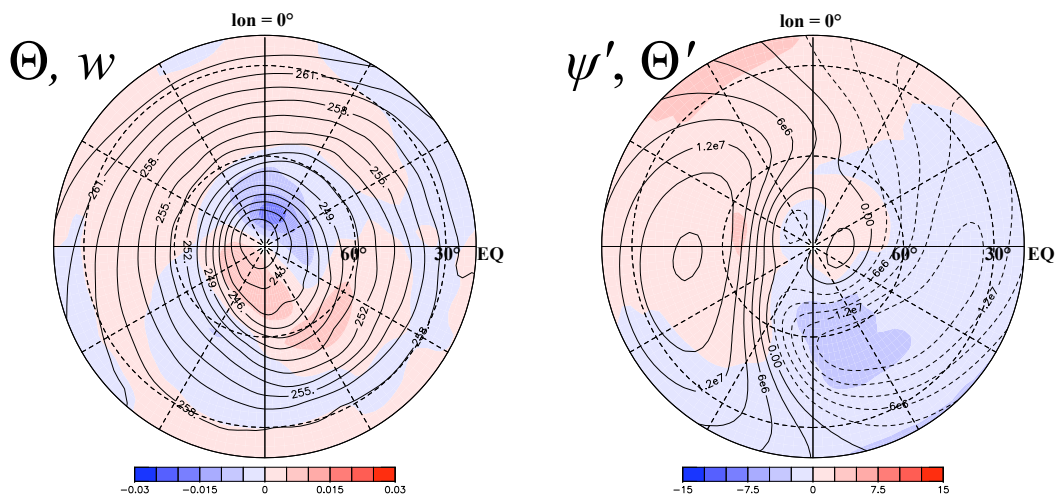


図 6.14  $R_T = 1.2 \times 10^2$  で  $t = 28391$  地球日のときの (左) 温位  $\Theta$  [K] (等値線), 鉛直流  $w$  [m/s] (色調) と (右) 水平流線関数の擾乱成分  $\psi'$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] (等値線), 温位の擾乱成分  $\Theta'$  [K] (色調) の高度 5500m での水平断面図.

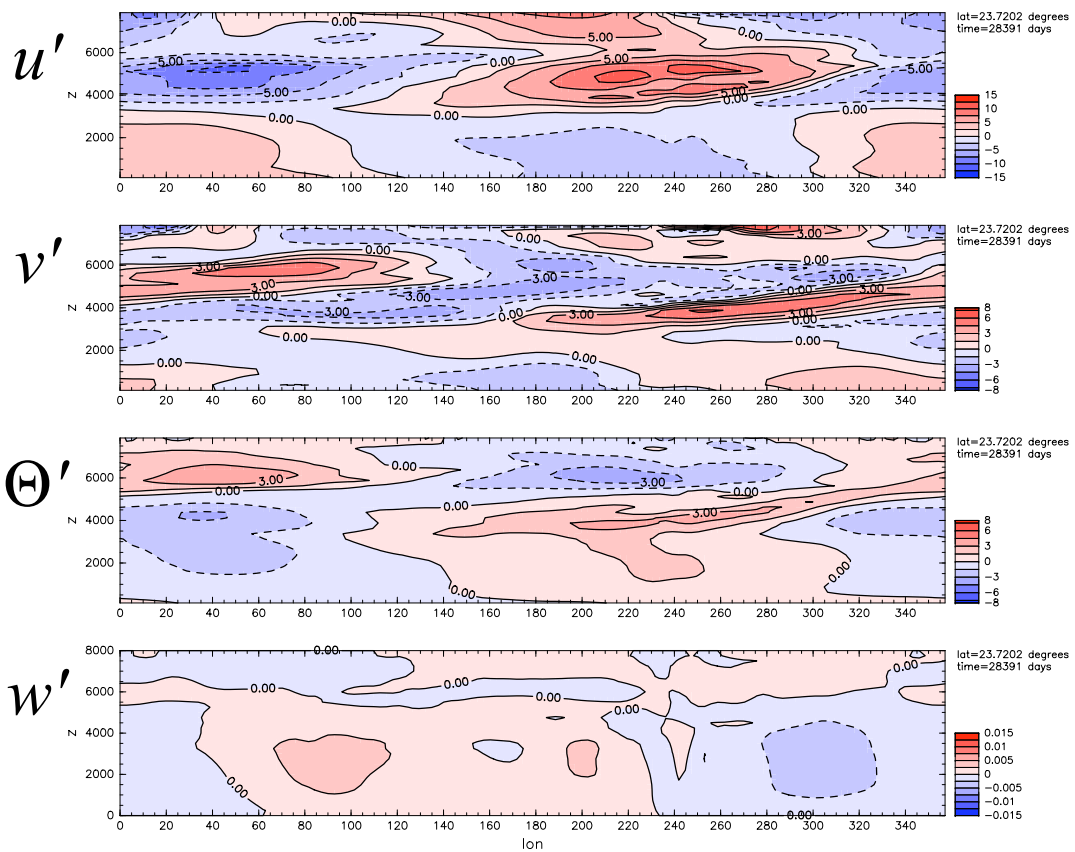


図 6.15  $R_T = 1.2 \times 10^2$  で  $t = 28391$  地球日のときの緯度  $24^\circ$  での  $u'$  [m/s],  $v'$  [m/s],  $\Theta'$  [K],  $w'$  [m/s] の経度高度断面.

3000m から 6000m までの中層部では東に傾いている。とりわけ、 $v'$  は位相の傾きが大きく、複雑な構造をしている。

以上のように、極向き EP フラックスをもたらす不安定は、 $u'v' < 0$  となり、運動量を赤道向きに輸送してはいるものの、その構造は単純な順圧不安定の構造をしていなかった。これは、スーパーローテーションを維持するための運動量輸送が、順圧不安定以外の現象でもたらされていることを示唆している。

なお、本研究では、3次元構造の解析は、上記の2例でとどめておく。より複雑な3次元擾乱の構造や発達過程などの解析は、将来の課題として残しておく。

## 第7章

### まとめ

本研究では、自転軸対称を仮定した単純な系における定常解を広いパラメータ範囲にわたって解析することで、大気大循環の基本的力学を研究した。単純な系とは、球面上のブシネスク流体プリミティブ方程式系で放射過程としてニュートン加熱/冷却を使用し、自転軸対称と赤道対称を仮定した系である。

この系は2つの有名な解をもつ。1つは地球のハドレー循環の基本的なメカニズムを説明した Held and Hou (1980) が求めた解である。この解は水平拡散係数をゼロとし、鉛直粘性係数がゼロに近づくときの極限解で説明される (ヘルド・ハウ (Held-Hou, HH) モデル)。もう1つの解は、Matsuda (1980, 1982) が波数3までモードのみを許し、非常に大きな水平拡散係数を仮定した上で求めた解である。この解は金星のスーパーローテーションのメカニズムを説明する仮説の1つである、ギーラシメカニズムを拡張した松田の理論によって説明される (ギーラシ・松田 (Gierasch-Matsuda, GM) モデル)。本研究では、この2種類の解を HH 型ハドレー循環解、GM 型スーパーローテーション解と呼ぶことにした。

本研究では、HH 型ハドレー循環解と GM 型スーパーローテーション解を包含する範囲で、パラメータスイープ実験を行い、解のパラメータ依存性を調べた。HH モデル、GM モデルの鍵となる無次元パラメータである外部熱ロスビー数 ( $R_T$ )、水平エクマン数 ( $E_H$ )、鉛直エクマン数 ( $E_V$ ) をスイープパラメータとした。定常解を求めるために、数値モデルを構築して、時間発展計算を行った。ただし、パラメータ領域の一部では、対称不安定が発生して定常解が得られなかった。次に、スーパーローテーション強度 ( $S$ ) と剛体回転率 ( $Rg$ ) という2つの指標を導入して、定常解を量的に解析した。

解析の結果、強スーパーローテーション ( $S > 1$ ) のためには、少なくとも鉛直粘性より大きな水平拡散 ( $E_H > E_V$ ) が必要なが示された。さらに、 $E_H$  が十分に大きく、 $E_V$  が小さいときには、 $S$  の値は  $R_T$  の関数として  $R_T \leq 1$  のとき  $S \sim R_T$ 、 $R_T > 1$  のとき

$S \sim \sqrt{R_T}$  でよく見積もられることが分かった.

剛体回転率 ( $Rg$ ) を用いることで HH 型ハドレー循環解から, 剛体回転型の弱スーパーローテーション解への変化を量的に診断することができるようになった. そして, 解はある限られた  $E_H$  の範囲で大きく変化することが明らかになった. さらに, この変化が大きくなるパラメータ空間上での位置を  $E_H \sim E_V S$  (ただし  $R_T \leq 1$  のとき  $S \sim R_T$ ,  $R_T > 1$  のとき  $S \sim \sqrt{R_T}$ ) で見積もることに成功した.

次に, 本研究では, 軸対称 2 次元解が “非軸対称な 3 次元解の近似” として, 妥当か否かを検証するために, 同じ球面上のブシネスク流体プリミティブ方程式系の 3 次元数値モデルを用いて, 3 次元解を求め, 2 次元解との比較を行った.

最上層の東西平均東西風の緯度分布, 東西平均絶対角運動量の子午面分布と平均子午面循環, そして角運動量輸送 (2 次元解の水平拡散と 3 次元解の角運動量渦フラックスの収束) で比較を行い,  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$  (地球程度) のときに, 2 次元解の HH 型ハドレー循環解は 3 次元解と低緯度で良く一致していることが確認できた. これは, 地球程度のパラメータ値のときの 3 次元解のハドレー循環は, HH モデルによってよくモデル化されていることの確認でもある.

しかし,  $R_T$  の大きさが 1 以上になると, HH 型ハドレー循環解は 3 次元解とは一致しなくなり, HH モデルは通用しなくなる. これは 3 次元解では渦フラックスにより角運動量を赤道向きの輸送しているからであった. 角運動量の赤道向きの輸送は軸対称 2 次元モデルでは水平拡散項として導入されている. 赤道上空の東西風速で比較したとき,  $E_H$  が  $10^{-3}$  から  $10^{-2}$  程度のときの 2 次元解が 3 次元解とよく一致し,  $R_T = 1.2 \times 10^2, 10^3$  のときは子午面循環場や角運動量の渦フラックスと水平拡散の分布も似ていた. しかし, この程度の水平拡散の大きさは GM モデルがよく働くには不十分であり, GM モデルの妥当性という点では否定的な結果となった.

# 謝辞

本研究の遂行にあたり、熱心に御指導頂きました余田成男先生に心から感謝申し上げます。また、数値モデル作成の際に御指導下さいました石岡圭一先生に御礼申し上げます。セミナー等を通じて有益な助言を頂きました竹広真一様、林祥介様、堀之内武様に感謝申し上げます。日々の研究において多くの助言、励ましを頂きました大塚成徳様をはじめとする京都大学大学院理学研究科気象学研究室の皆様、同海洋物理学研究室の伊藤耕介様に御礼申し上げます。

本研究で用いました数値モデルには石岡圭一先生の ISPACK, netlib の LAPACK, 地球流体電脳倶楽部 gtool プロジェクトの gt4f90io のライブラリを使用させて頂きました。図の作成には地球流体電脳倶楽部の地球流体電脳ライブラリ (DCL), Tanahashi Makoto 氏の MjoGraph, アップル社の Keynote'08 を使用させて頂きました。また、数値計算には京都大学学術情報メディアセンター大型計算機システムの HX600 を使用させて頂きました。ここに記して謝意を表します。

## 付録 A

# ヘルド・ハウモデルの解説

付録 A ではハドレー循環のヘルド・ハウ (Held-Hou, HH) モデルについて詳しく解説する.

### A.1 支配方程式系

次のような支配方程式系を扱う. すなわち, プランドル数 1 のブシネスク流体のプリミティブ方程式系で, 自転軸対称, 定常状態を仮定する. ニュートン加熱/冷却によって流れを駆動し, 粘性/拡散は鉛直粘性のみ考慮する. 運動方程式, 熱力学方程式, 連続の式, 静力学平衡の式は以下の通りになる. ただし理想気体の熱膨張率  $1/\Theta_0$  を用いる. (Held and Hou (1980) の (1) 式)

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}u) - fv - \frac{uv \tan \phi}{a} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (\text{A.1a})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}v) + fu + \frac{u^2 \tan \phi}{a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_V \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (\text{A.1b})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}\Theta) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_V \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) - \frac{(\Theta - \Theta_e)}{\tau}, \quad (\text{A.1c})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.1d})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\Theta}{\Theta_0}. \quad (\text{A.1e})$$

ただし,  $\Phi = p/\rho$  であり, 変数は  $u, v, w$  がそれぞれ東西風, 南北風, 鉛直風,  $\Theta$  は温位,  $p$  は圧力で,  $f = 2\Omega \sin \phi$  で  $\phi$  は緯度である. 定数は,  $\rho$  が密度,  $\nu_V$  は粘性係数,  $g$  は重力加速度,  $\tau$  はニュートン加熱/冷却の時定数,  $a$  は惑星半径,  $\Omega$  は自転角速度である. また,

$\mathbf{v} = (v, w)$ ,  $\nabla = [\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(\cos \phi)}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z}]$ ,  $\Theta_e$  はニュートン加熱/冷却の基準温位で

$$\frac{\Theta_e}{\Theta_0} = 1 - \frac{2}{3} \Delta_H P_2(\sin \phi) + \Delta_V \left( \frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.2})$$

で表されるものとする. ただし  $\Theta_0$  は  $\Theta_e$  の全球平均,  $\Delta_H, \Delta_V$  は  $\Theta_0$  に対する極赤道間, 下端上端間の温位差の比であり,  $P_2$  はルジャンドル多項式  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$  である.

## A.2 境界条件

境界条件は, 上端では自由滑り条件 (フリースリップ), 熱フラックスなし, 境界を横切る流れはないと仮定する. つまり

$$z = H \quad \text{で} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = w = 0. \quad (\text{A.3a})$$

下端では熱フラックスなし, 境界を横切る流れはないが, 地表面の摩擦力は風速に比例すると仮定して

$$z = 0 \quad \text{で} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = w = 0, \quad (\text{A.3b})$$

$$z = 0 \quad \text{で} \quad \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \quad \nu_V \frac{\partial v}{\partial z} = Cv, \quad (\text{A.3c})$$

となる.  $C$  は摩擦係数で定数である. 赤道に対して対称で, 赤道を横切る流れはないと仮定する.

$$\phi = 0 \quad \text{で} \quad v = 0. \quad (\text{A.3d})$$

## A.3 非粘性厳密解

以上の方程式系は粘性がゼロ ( $\nu_V = 0$ ) ならば, 厳密解をもつ. それは

$$v = w = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\Theta = \Theta_e, \quad (\text{A.5})$$

$$u = u_e, \quad (\text{A.6})$$

である. ただし,  $u_e$  は基準温位場と釣り合うコリオリ力を生み出す東西風であり, 式 (A.1b) および (A.1e) より

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( f u_e + \frac{u_e^2 \tan \phi}{a} \right) = -\frac{g}{a \Theta_0} \frac{\partial \Theta_e}{\partial \phi}, \quad (\text{A.7})$$



を満たすことが分かる. (A.2) を  $\phi$  微分すると

$$\frac{1}{\Theta_0} \frac{\partial \Theta_e}{\partial \phi} = -2\Delta_H \sin \phi \cos \phi, \quad (\text{A.8})$$

となる.  $z = 0$  で  $u_e \sim 0$  だと仮定して, (A.7) を 0 から  $z$  まで鉛直積分して, (A.8) を利用すると

$$f u_e + \frac{u_e^2 \tan \phi}{a} = \frac{2\Delta_H g z}{a} \sin \phi \cos \phi, \quad (\text{A.9})$$

となる. さらに  $f = 2\Omega \sin \phi$  を用いて式を整理すると

$$\left(\frac{u_e}{\Omega a}\right)^2 + 2 \cos \phi \left(\frac{u_e}{\Omega a}\right) - 2 \frac{\Delta_H g z}{\Omega^2 a^2} \cos^2 \phi = 0, \quad (\text{A.10})$$

となる. この 2 次方程式の解のうち  $z = 0$  で  $u_e = 0$  を満たすものは

$$\frac{u_e}{\Omega a} = \left[ \left(1 + \frac{2R_T z}{H}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \cos \phi, \quad (\text{A.11})$$

である. ただし

$$R_T \equiv \frac{gH\Delta_H}{\Omega^2 a^2}, \quad (\text{A.12})$$

であり, これは外部熱ロスビー数である.  $R_T \ll 1$  ならば

$$\frac{u_e}{\Omega a} \approx R_T \cos \phi \frac{z}{H}, \quad (\text{A.13})$$

であり, 赤道上空でも  $u_e > 0$  つまり西風になる.

## A.4 ハイドの定理

それでは, 上記の非粘性厳密解は粘性係数  $\nu_V$  が非常に小さいときの近似解として妥当であろうか. このことは角運動量を考えることで明らかになる.

単位質量あたりの絶対角運動量  $M$  は次式で定義される.

$$M \equiv \Omega a^2 \cos^2 \phi + u a \cos \phi. \quad (\text{A.14})$$

(A.14) を用いると (A.1a) は次式に書き換えることができる.

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}M) = \nu_V \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}. \quad (\text{A.15})$$

この方程式は移流項 (左辺, フラックス形式) と拡散項 (右辺) からなる移流拡散方程式である. このように, 移流と拡散だけで輸送される量は, その生成源 (今の場合, 赤道の地表

面)においてのみ最大値を取ることが許されている。これはハイドの定理 (Hide, 1969) として知られている。これは類推として、煙突から出る煙を考えると分かりやすい。煙は風に移流されたり、煙の分子運動によって拡散したりするが、煙の濃度が最も濃いのは煙の生成源である煙突口になるのは容易に想像できるだろう。

—なお理論的な説明としては次のようになる。いま、 $M$  が領域の内部に極大を持っていると仮定すると、その極大の周囲には閉じた等  $M$  線が存在する。(A.15) をこの等  $M$  線 (閉曲線) 内で面積積分することを考える。すると左辺は、ガウスの発散定理を用いて

$$\begin{aligned}\int \int \nabla \cdot (\mathbf{v}M) dS &= \oint M \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl, \\ &= M \oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl, \\ &= \int \int \nabla \cdot \mathbf{v} dS = 0,\end{aligned}$$

となる。なぜなら、等  $M$  線上の積分なので  $M$  は周回積分の外に出せ、連続の式から  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  である。一方、等  $M$  線の内部の方が  $M$  が大きいとしているので、この等  $M$  線に囲まれたあらゆる地点で  $\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \leq 0$  ( $z$ - $M$  平面にグラフ化すれば上に凸) である。ゆえに右辺は負の値になる。よって  $M$  は領域の内部に極大を持たない。上端からの角運動量の流出入はないので、同様の理由で  $M$  は上端に最大値を持つこともできない。一方、下端では地表面から応力を受ける。地表で西風の場合は、地表に角運動量が流出するので、 $M$  が最大値をとることはできない。東風の場合は地表から角運動量の供給を受けるので  $M$  は最大となることができ。

以上により、 $M$  の最大値は ( $M_{\max} = \Omega a^2$ ) であり、赤道上空で西風を維持することは出来ない。つまり、非粘性厳密解は粘性  $\nu_V$  が非常に小さいときの近似解としては不適当なことが示された。

## A.5 ヘルド・ハウモデルの仮定

そこで HH モデルは次の仮定をおいて粘性が弱いときの近似解を求める。すなわち、赤道側に定常なハドレー循環ができていると仮定して、

- (1) ハドレー循環の上側の極向きの流れは角運動量を保存する、

$$u(\phi, H) \approx u_M(\phi), \quad (\text{A.16a})$$

- (2) 地表面摩擦は十分に強く、地表付近では風速は非常に弱い、

$$u(\phi, 0) \approx 0, \quad (\text{A.16b})$$

(3) 南北の力の釣り合いは傾度風平衡にある,

$$fu + \frac{u^2 \tan \phi}{a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \quad (\text{A.16c})$$

(4) (A.1c) で熱拡散の項は無視できる,

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}\Theta) = -\frac{(\Theta - \Theta_e)}{\tau}, \quad (\text{A.16d})$$

(5) そして, ハドレーセルは赤道から緯度  $\phi_H$  までの範囲にあり,  $\phi_H$  よりも極側では基準温位場で, 子午面の流れはない. つまり, ハドレーセルの極側では (A.7) が成立している.

## A.6 ハドレーセルの幅

上記の仮定のもと, ハドレーセルの極側の端の緯度  $\phi_H$  を求めるために, 温位の連続性

$$\bar{\Theta}(\phi_H) = \bar{\Theta}_E(\phi_H), \quad (\text{A.17})$$

および, 温位の保存\*<sup>1</sup>

$$\int_0^{\phi_H} \bar{\Theta} \cos \phi d\phi = \int_0^{\phi_H} \bar{\Theta}_E \cos \phi d\phi, \quad (\text{A.18})$$

を利用して, 以下の演算を行う. ただし, 上線は鉛直平均を表す. まず,  $z = H$  での (A.16c) から  $z = 0$  での (A.16c) を引く.

$$f[u(H) - u(0)] + \frac{\tan \phi}{a} [u^2(H) - u^2(0)] = -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial \Phi(H)}{\partial \phi} - \frac{\partial \Phi(0)}{\partial \phi} \right). \quad (\text{A.19})$$

静力学平衡の式 (A.1e) を鉛直積分して,  $\phi$  微分すれば

$$\frac{\partial \Phi(H)}{\partial \phi} - \frac{\partial \Phi(0)}{\partial \phi} = \frac{gH}{\Theta_0} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \phi}, \quad (\text{A.20})$$

となる.  $u_M = \frac{\Omega a \sin^2 \phi}{\cos \phi}$  と  $f = 2\Omega \sin \phi$  と (A.16a), (A.16b), (A.20) を用いれば (A.19) は

$$a\Omega^2 \frac{\sin^3 \phi}{\cos \phi} (2 + \tan^2 \phi) = -\frac{gH}{a\Theta_0} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \phi}, \quad (\text{A.21})$$

\*<sup>1</sup> 今は定常な場を考えているので, 領域内の正味の加熱冷却はない. よって  $\int_0^{\phi_H} (\Theta - \Theta_e) \tau^{-1} \cos \phi d\phi = 0$ , ゆえに (A.18) である.

とかけ, これを  $\phi$  積分したら

$$\frac{\bar{\Theta}(0) - \bar{\Theta}(\phi)}{\Theta_0} = \frac{\Omega^2 a^2 \sin^4 \phi}{gH 2 \cos^2 \phi}, \quad (\text{A.22})$$

となる. (A.2) および (A.22) を (A.17), (A.18) に代入すれば,

$$\frac{\bar{\Theta}(0)}{\Theta_0} - \frac{\Omega^2 a^2 \sin^4 \phi_H}{gH 2 \cos^2 \phi_H} = 1 - \Delta_H \left( \sin^2 \phi_H - \frac{1}{3} \right), \quad (\text{A.23})$$

$$\int_0^{\phi_H} \left( \frac{\bar{\Theta}(0)}{\Theta_0} - \frac{\Omega^2 a^2 \sin^4 \phi}{gH 2 \cos^2 \phi} \right) \cos \phi d\phi = \int_0^{\phi_H} \left( 1 - \Delta_H \left( \sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \right) \cos \phi d\phi, \quad (\text{A.24})$$

である. この2つの方程式は2つの未知数  $\bar{\Theta}(0), \phi_H$  の連立方程式になっている.

$\phi_H \ll 1$  を仮定すれば, この連立方程式は簡単に解けて

$$\frac{\bar{\Theta}(0)}{\Theta_0} = \frac{\bar{\Theta}_E(0)}{\Theta_0} - \frac{5}{18} R_T \Delta_H, \quad (\text{A.25})$$

$$\phi_H = \left( \frac{5}{3} R_T \right)^{1/2} \approx 26^\circ, \quad (\text{A.26})$$

であることが分かる. これより,  $R_T \ll 1$  ならば  $\phi_H \ll 1$  であり, 先の仮定が妥当であることが分かる.

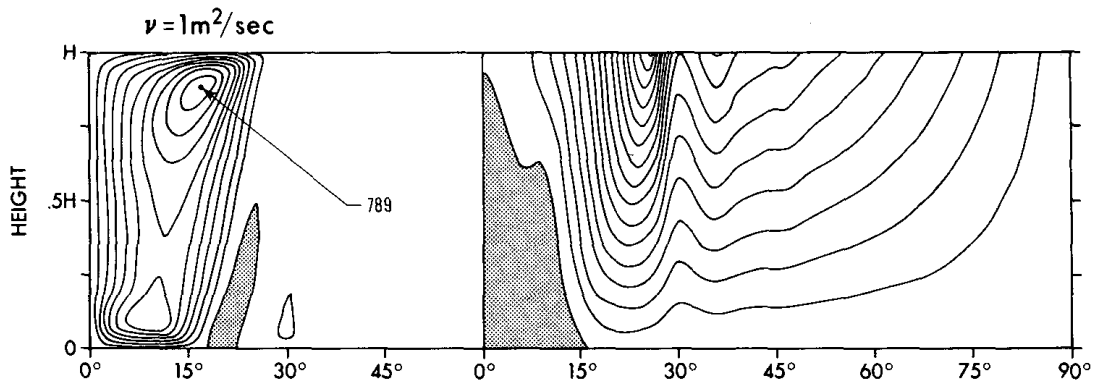


図 A.1 Held and Hou (1980) の数値解. 子午面流線関数 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] (左, 等値線間隔は最大値の  $1/10$ ) と東西風速場 [ $\text{m}/\text{s}$ ] (右, 等値線間隔は  $5$ ). ハドレーセルの極側の端の緯度が  $\phi_H$  とおおよそ一致している.

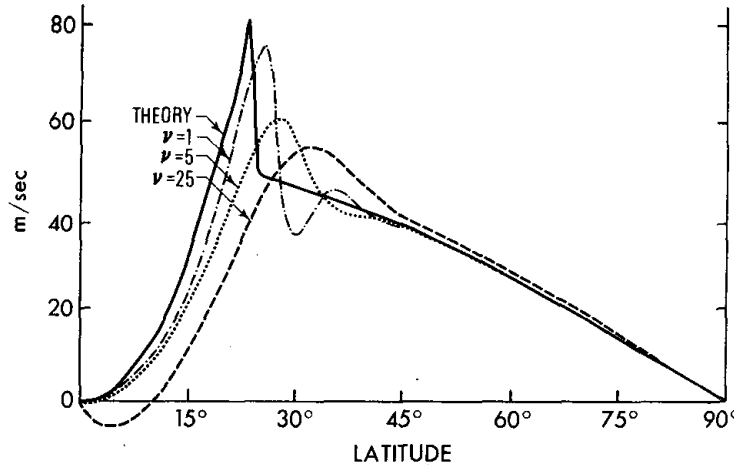


図 A.2 Held and Hou (1980) の数値解と理論解.  $z = H$  での東西風.

## A.7 熱フラックス分布

熱力学方程式 (A.16d) を  $z = 0$  から  $H$  まで鉛直積分することで, 熱フラックスを求めることができる.

$$\int_0^H \nabla(v\Theta) dz = \frac{(\bar{\Theta}_E - \bar{\Theta})}{\tau} H. \quad (\text{A.27})$$

$\sin \phi \approx \phi, \cos \phi \approx 1$  の近似を用いれば, 右辺は (A.2), (A.22), (A.25) を利用して表せて

$$\frac{1}{\Theta_0} \int_0^H v\Theta dz = \frac{5}{18} \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} \frac{Ha\Delta_H}{\tau} R^{3/2} \left[ \frac{\phi}{\phi_H} - 2 \left(\frac{\phi}{\phi_H}\right)^3 + \left(\frac{\phi}{\phi_H}\right)^5 \right], \quad (\text{A.28})$$

となる.

## A.8 地表付近の風速分布

このモデルは, さらに 2 つの仮定を加えることで地表付近の風速分布を見積もることができる. 1 つ目はハドレー循環が  $z = 0$  から  $H$  の間に限られているということ. 2 つ目は循環による熱輸送も熱拡散も大気の静的安定性には影響しない (循環の時間スケールも熱拡散の時間スケールもニュートン加熱/冷却の時定数  $\tau$  より遥かに大きい) ことである.

$$\frac{\Theta(H) - \Theta(0)}{\Theta_0} \approx \Delta_V. \quad (\text{A.29})$$

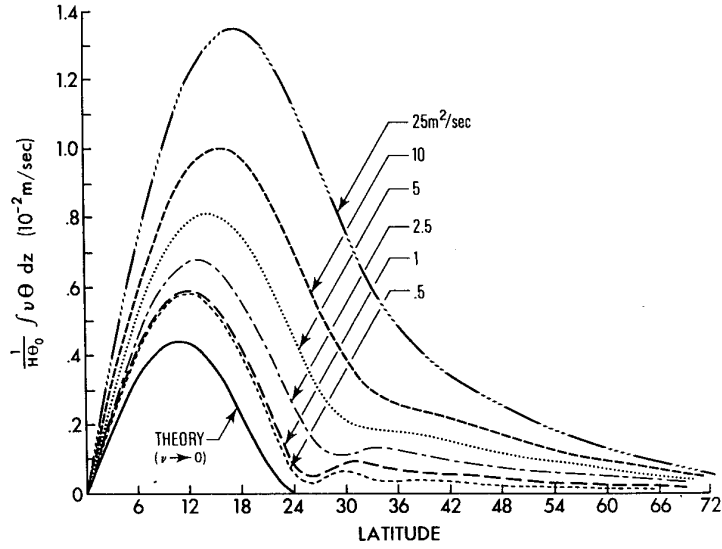


図 A.3 Held and Hou (1980) の数値解と理論解. 南北熱フラックス.

上部境界層の質量フラックスを  $V$  とすれば, ハドレー循環は閉じているので下部境界層の質量フラックスは  $-V$  になる. 熱や運動量の輸送はほとんど上下の境界層でまかなわれるので, フラックスを鉛直積分した量はそれぞれ

$$\int_0^H v\theta dz \approx \Theta(H)V - \Theta(0)V \approx \Theta_0 \Delta_V V, \quad (\text{A.30})$$

$$\int_0^H vudz \approx u(H)V - u(0)V \approx u_M V, \quad (\text{A.31})$$

と近似できる. 地表付近の風速を計算するために (A.15) に (A.14) を入れて

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\Omega a^2 \cos^3 \phi v + a \cos^2 \phi uv) + \frac{\partial wM}{\partial z} = \nu_V \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Omega a^2 \cos^2 \phi + ua \cos \phi),$$

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\Omega a^2 \cos^3 \phi v + a \cos^2 \phi uv) + \frac{\partial wM}{\partial z} = a \cos \phi \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

これを鉛直積分して

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \Omega a^2 \cos^3 \phi \int_0^H v dz + a \cos^2 \phi \int_0^H uv dz \right) + \int_0^H \frac{\partial wM}{\partial z} dz = a \cos \phi \nu_V \int_0^H \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz,$$

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( a \cos^2 \phi \int_0^H uv dz \right) = a \cos \phi \nu_V \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]_0^H,$$

$$\frac{1}{a \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos^2 \phi \int_0^H uv dz \right) = -Cu(0). \quad (\text{A.32})$$

(A.28), (A.30), (A.31) そして (A.32) から  $Cu(0)$  を求めることができ、

$$Cu(0) \approx -\frac{25}{18} \frac{\Omega a H \Delta_H}{\tau \Delta_V} R^2 \left[ \left( \frac{\phi}{\phi_H} \right)^2 - \frac{10}{3} \left( \frac{\phi}{\phi_H} \right)^4 + \frac{7}{3} \left( \frac{\phi}{\phi_H} \right)^6 \right], \quad (\text{A.33})$$

となる. (A.33) から地表付近の風は

$$\phi < \left( \frac{3}{7} \right)^{1/2} \phi_H, \quad (\text{A.34})$$

の範囲では東風,

$$\left( \frac{3}{7} \right)^{1/2} \phi_H < \phi < \phi_H, \quad (\text{A.35})$$

の範囲では西風になることが分かる.

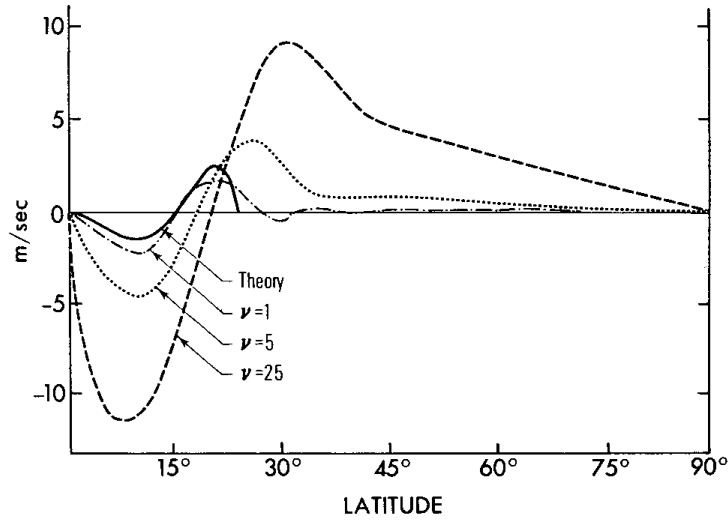


図 A.4 Held and Hou (1980) の数値解と理論解.  $z = 0$  での東西風.

## 付録 B

# 数値モデルの構築

付録 B では本研究で使用した数値モデルを構築する手順を記す。B.1 節はスペクトル法に関する基礎的な説明, B.2 節はスペクトル法による離散化の簡単な一例として非線形項を含む浅水方程式系の離散化方法を示している。B.3 節で実際に本研究で使用したブシネスク流体プリミティブ方程式系の離散化手順を説明する。B.4 節では角運動量を保存する形式の水平拡散項について記す。B.5 節は数値モデルを実装する上での要点を記す。B.6 節ではモデルのバグチェックのためのテスト方法を記す。そして, B.7 節では高拡散係数時の特殊な計算方法を説明する。

### B.1 スペクトル法基礎

ここではスペクトル法を用いた数値モデルを構築するにあたって必要な基礎を簡単に述べる。なお, この章の内容は石岡 (2004) を参考にしている。

#### B.1.1 関数展開による離散化

差分法では空間を有限個の格子点に分割するのに対して, スペクトル法では変数を有限個の関数の一次結合で表す。例えば, 次のような 2 変数関数  $u(x, t)$  の偏微分方程式の初期値境界値問題を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < 1), \quad (\text{B.1})$$

$$\text{初期条件 } u = f(x), \quad \text{境界条件 } u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (\text{B.2})$$



このとき  $u$  は次のように展開される

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{J-1} a_j(t) \phi_j(x). \quad (\text{B.3})$$

ただし、展開関数  $\phi_j(x)$  は境界条件を満たすように選ぶものとする。

$\phi_j(x)$  として境界条件を満たす滑らかな直交関数系を用いる。今の例の場合  $\phi_j(x) = \sin(j\pi x)$  ととれる。

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{J-1} a_j(t) \sin(j\pi x). \quad (\text{B.4})$$

これを (B.1) に代入すれば

$$\sum_{j=1}^{J-1} \frac{\partial a_j}{\partial t} \sin(j\pi x) = \sum_{j=1}^{J-1} a_j (j\pi)^2 (-\sin(j\pi x)), \quad (\text{B.5})$$

となる。ここで、展開関数の直交関係を利用する。今の場合、 $\sin$  関数なので

$$\int_0^1 \sin(j\pi x) \sin(m\pi x) dx = \frac{1}{2} \delta_{j,m}, \quad (j, m = 1, 2, \dots, J-1), \quad (\text{B.6})$$

という直交関係を利用する。すなわち (B.5) の両辺に  $\sin(m\pi x)$  (重み関数と呼ばれる) をかけて、 $0 \leq x \leq 1$  の範囲で積分すれば、次の常微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} a_m(t) = -(m\pi)^2 a_m(t) \quad (m = 1, 2, \dots, J-1). \quad (\text{B.7})$$

$a_m$  に対する初期条件は、 $u(x, 0) = f(x)$  の両辺に  $\sin(m\pi x)$  をかけて積分することで

$$a_m(0) = 2 \int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) dx, \quad (\text{B.8})$$

となる。

## B.1.2 フーリエ級数を用いたスペクトル法

境界条件が周期境界条件の場合は展開関数としてフーリエ級数を使うことが多い。球面モデルでも、東西方向にはフーリエ級数展開が用いられる。

## 線形の場合

方程式が線形な場合として、ここでは次のような 1 次元線形移流方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = f(x), \quad \text{境界条件 } u(x, t) = u(x + 2\pi, t). \quad (\text{B.10})$$

まず、次のようにフーリエ級数展開をする。

$$u(x, t) = \sum_{k=-N}^N \hat{u}_k(t) e^{ikx}. \quad (\text{B.11})$$

ここで、 $N$  は切断波数と呼ばれる。 (B.11) を (B.9) に代入して、両辺に重み関数  $e^{-ikx}$  をかけて  $[0, 2\pi]$  の範囲で積分すれば、三角関数の直交性により、

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt} = +ik\hat{u}_k = 0, \quad (k = -N, \dots, N), \quad (\text{B.12})$$

となる。  $\hat{u}_k(t)$  の初期条件は、初期分布をフーリエ変換することにより、

$$\hat{u}_k(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (k = -N, \dots, N), \quad (\text{B.13})$$

となる。

## 非線形の場合（直接法と変換法）

次に非線形の場合として 1 次元非線形移流方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (\text{B.14})$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = f(x), \quad \text{境界条件 } u(x, t) = u(x + 2\pi, t), \quad (\text{B.15})$$

非線形の時も、線形の場合と同様の操作をすることで

$$\frac{d\hat{u}_m}{dt} + \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N il\hat{u}_l\hat{u}_k\delta_{k+l,m} = 0, \quad (\text{B.16})$$

と、常微分方程式が得られ、数値的に解ける。しかし、上式の左辺第 2 項の計算には、 $(2N + 1)^2$  程度の計算量が必要となり、実用的でない。このように非線形項を直接計算する方法は直接法と呼ばれる。

直接法に対して、非線形項を実空間の格子点上で計算する方法は変換法と呼ばれる。(B.14) から (B.16) への変換に際しておこなっている操作は  $u$  をフーリエ級数展開して、両辺に重み関数  $e^{-ikx}$  をかけて、積分しているだけなので、次の関係が成立する。

$$\sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N il\hat{u}_l\hat{u}_k\delta_{k+l,m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \frac{\partial u}{\partial x} e^{-ikx} dx, \quad (\text{B.17})$$

つまり、上式の左辺は右辺の数値積分が正確ならば、それで代用できる。今、切断波数を  $N$  としているので右辺の積分の中身の最大波数は ( $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $e^{-ikx}$  の最大波数がそれぞれ  $N$  なので)  $3N$  になる。ゆえに、実空間上の分点を  $3N + 1$  以上とっていれば、数値積分で正確に評価できる。以下に変換法による非線形項の評価の手順をまとめる。

(1) 展開係数から分点上での値への変換 (離散フーリエ逆変換)

$$u_j = \sum_{k=-N}^N \hat{u}_k e^{ikx_j}, \quad (\text{B.18})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \sum_{k=-N}^N ik\hat{u}_k e^{ikx_j}. \quad (\text{B.19})$$

(2) 分点上での非線形項の評価

$$F_j = \left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = u_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j. \quad (\text{B.20})$$

(3) 数値積分による非線形項の展開係数の計算 (離散フーリエ変換)

$$\hat{F}_k = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F_j e^{-ikx_j}. \quad (\text{B.21})$$

ただし、( $j = 0, 1, \dots, J - 1$ ), ( $k = -N, \dots, N$ ) である。

この変換法の手順で離散フーリエ (逆) 変換の部分を高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform, FFT) に置き換えることにより、直接法よりも演算回数を減らすことが可能になる。

### B.1.3 球面のスペクトル法

#### 球面調和関数展開

球面上で定義された関数  $g(\lambda, \mu)$  は次のように球面調和関数  $Y_n^m(\lambda, \mu)$  で展開する.

$$g(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n s_n^m Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (\text{B.22})$$

ただし,  $\lambda$  は経度,  $\mu = \sin \phi$  はサイン緯度で,  $M$  は展開の切断波数である.

球面調和関数  $Y_n^m$  は, 球面上の水平ラプラシアン

$$\nabla^2 = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\}, \quad (\text{B.23})$$

の固有関数であり,

$$\nabla^2 Y_n^m(\lambda, \mu) = -n(n+1) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.24})$$

の関係がある.  $Y_n^m$  はルジャンドル陪関数と三角関数を用いて以下で定義される.

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{im\lambda}. \quad (\text{B.25})$$

ここで,  $P_n^m$  は 2 に正規化されたルジャンドル陪関数

$$P_n^m(\mu) = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{1}{2^n n!}} (1-\mu^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (\mu^2-1)^n, \quad (\text{B.26})$$

であり, ルジャンドル陪関数は以下の直交関係を満たす.

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = \delta_{nn'}. \quad (\text{B.27})$$

これより  $Y_n^m(\lambda, \mu)$  は次の直交関係を満たすことが分かる.

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_n^m(Y_{n'}^{m'})^* d\mu d\lambda = \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \quad (\text{B.28})$$

ただし,  $(\cdot)^*$  は共役複素数を表す. ルジャンドル陪関数の性質を利用することで, 次の漸化式を導くことができる.

$$(n+1)\varepsilon_n^m P_{n-1}^m - n\varepsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m = (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m. \quad (\text{B.29})$$

ただし

$$\varepsilon_n^m \equiv \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}}, \quad (\text{B.30})$$

である. この式はルジャンドル陪関数の微分の計算に使用される.

### ルジャンドル多項式とガウス・ルジャンドル積分公式

ルジャンドル陪関数  $P_n^m$  において  $m = 0$  のとき,  $P_n^0$  は  $\mu$  の  $n$  次多項式であり, ルジャンドル多項式と呼ばれる. このとき上付き文字を省略して  $P_n$  と表記する.

ルジャンドル多項式の性質から以下のガウス・ルジャンドルの積分公式が成立する.  $f(\mu)$  が  $2n - 1$  次以下の多項式であるとき,

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = \sum_{k=1}^n w_k f(\mu_k). \quad (\text{B.31})$$

である. ここに  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) は  $P_n(\mu)$  の零点で (ガウス緯度と呼ばれる)

$$-1 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < 1, \quad (\text{B.32})$$

であり,

$$w_k = \int_{-1}^1 \frac{P_n(\mu)}{(\mu - \mu_k)P_n'(\mu_k)} d\mu = \frac{2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)P_n'(\mu_k)}, \quad (\text{B.33})$$

はガウス重みと呼ばれる.

ガウス緯度は通常ニュートン法により数値的に求められる. まず, 初期値として次の近似根を与える.

$$\mu_{k,0} = \cos \frac{k - 1/4}{n + 1/2} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{B.34})$$

そして,

$$\mu_{k,l+1} = \mu_{k,l} - \frac{P_n(\mu_{k,l})}{P_n'(\mu_{k,l})}, \quad (\text{B.35})$$

を用いて反復計算をおこない, 収束条件

$$|\mu_{k,l+1} - \mu_{k,l}| \leq \varepsilon, \quad (\text{B.36})$$

が満たされたときに計算を打ち切り,  $\mu_{k,l+1}$  をガウス緯度として採用する.  $P_n(\mu_{k,l})$  の計算には次の漸化式を用いる.

$$P_0(\mu_{k,l}) = 1, \quad (\text{B.37})$$

$$P_1(\mu_{k,l}) = \sqrt{3}\mu_{k,l}, \quad (\text{B.38})$$

$$P_n(\mu_{k,l}) = \frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{n} \mu_{k,l} P_{n-1} - \frac{(n-1)\sqrt{2n+1}}{n\sqrt{2n-3}} P_{n-2}. \quad (\text{B.39})$$

また,  $P'_n(\mu_{k,l})$  の計算には

$$P'_n(\mu_{k,l}) = \frac{1}{1 - \mu_{k,l}^2} \left\{ n \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} P_{n-1} - n \mu_{k,l} P_n \right\}, \quad (\text{B.40})$$

を用いる.

### 球面調和関数変換

非線形項の評価などに変換法を用いる場合, 次の球面調和関数正変換を使用する.

$$s_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\lambda, \mu) \{Y_n^m(\lambda, \mu)\}^* d\mu d\lambda, \quad (\text{B.41})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\lambda, \mu) P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} d\mu d\lambda. \quad (\text{B.42})$$

ただし,  $g(\lambda, \mu)$  は球面上の関数で非線形項に相当し,  $s_n^m$  が対応する展開係数になる. 数値計算ではこれを離散化する必要がある.

経度方向の格子点 ( $\lambda_k = 2\pi k/K, k = 0, 1, \dots, K$ ) を等間隔にとり, 緯度方向の格子点はガウス緯度  $\mu_j$  をとる. まず, フーリエ正変換の部分は離散フーリエ正変換 (実際には FFT) で計算し

$$G^m(\mu_j) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} g(\lambda_k, \mu_j) e^{-im\lambda_k}, \quad (\text{B.43})$$

を得る. ルジャンドル正変換の部分はガウス・ルジャンドルの積分公式より

$$s_n^m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J w_j G^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j), \quad (\text{B.44})$$

で計算する.  $w_j$  はガウス重みである.

逆変換も同様にして

$$G^m(\mu_j) = \sum_{n=|m|}^M s_n^m P_n^m(\mu_j), \quad (\text{B.45})$$

$$g(\lambda_k, \mu_j) = \sum_{k=0}^{K-1} G^m(\mu_j) e^{im\lambda_k}, \quad (\text{B.46})$$

により計算される.

## B.2 スペクトル法による非線形浅水方程式系の離散化

この節ではスペクトル法による離散化の一例として、非線形浅水方程式系の離散化方法を記す。なお、この節の内容は Satoh (2004) を参考にしている。

球面上の浅水方程式系は以下の通りである。ただし、非粘性で外力はないものとする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{g}{a \cos \phi} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}, \quad (\text{B.47})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{g}{a} \frac{\partial \eta}{\partial \phi}, \quad (\text{B.48})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\eta) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v\eta \cos \phi) = 0. \quad (\text{B.49})$$

ここで、 $\eta$  は表面変位である。

### B.2.1 渦度・発散方程式

渦度  $\zeta$ , 発散  $D$ , 流線関数  $\psi$ , 速度ポテンシャル  $\chi$  は

$$\zeta = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (u \cos \phi)}{\partial \phi} = \nabla_H^2 \psi, \quad (\text{B.50})$$

$$D = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} = \nabla_H^2 \chi. \quad (\text{B.51})$$

と書ける。ただし、球面上の水平のラプラシアン  $\nabla_H^2$  は

$$\nabla_H^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (\text{B.52})$$

である。 $\zeta$  を用いると (B.47)(B.48) は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\zeta + 2\Omega \sin \phi)v - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( g\eta + \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad (\text{B.53})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(\zeta + 2\Omega \sin \phi)u - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( g\eta + \frac{u^2 + v^2}{2} \right). \quad (\text{B.54})$$

と変形できる。これは、移流項のベクトル不変形  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})/2$  の成分表示に他ならない。

ここで、 $\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (\text{B.54})}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial ((\text{B.53}) \cos \phi)}{\partial \phi}$  をすれば次の渦度方程式が得られる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{ (\zeta + 2\Omega \sin \phi)u \} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \{ (\zeta + 2\Omega \sin \phi)v \cos \phi \}. \quad (\text{B.55})$$

また,  $\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(\text{B.53})}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial((\text{B.54}) \cos \phi)}{\partial \phi}$  をすれば次の発散方程式が得られる.

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\zeta + 2\Omega \sin \phi)v\} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \{(\zeta + 2\Omega \sin \phi)u \cos \phi\} - \nabla_H^2 \left( g\eta + \frac{u^2 + v^2}{2} \right). \quad (\text{B.56})$$

## B.2.2 球面上での取り扱いのための変換

球面上での取り扱いを容易にするために以下の  $U, V, \mu$  を導入する.

$$U = u \cos \phi, \quad V = v \cos \phi, \quad \mu = \sin \phi. \quad (\text{B.57})$$

$\mu$  はサイン緯度と呼ばれる. (B.55) をこれらを用いて表すと

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\zeta + 2\Omega\mu)U\} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \{(\zeta + 2\Omega\mu)V\}, \quad (\text{B.58})$$

となり, (B.56) は

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\zeta + 2\Omega\mu)V\} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \{(\zeta + 2\Omega\mu)U\} - \nabla_H^2 \left( g\eta + \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right), \quad (\text{B.59})$$

となる. さらに

$$A = (\zeta + 2\Omega\mu)U, \quad B = (\zeta + 2\Omega\mu)V, \quad (\text{B.60})$$

と書けば,  $\zeta, D, \eta$  の式は以下の通りに書ける.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \mu}, \quad (\text{B.61})$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \nabla_H^2 \left( g\eta + \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right), \quad (\text{B.62})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(U\eta)}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial(V\eta)}{\partial \mu}. \quad (\text{B.63})$$

ジオポテンシャル  $\Phi = \eta g$  を導入し,  $\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$  として, 平均値と偏差に分ける. すると (B.63) は

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(U\Phi')}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial(V\Phi')}{\partial \mu} - \Phi' D, \quad (\text{B.64})$$



と書ける.  $\zeta, D, U, V$  は流線関数  $\psi$  と速度ポテンシャル  $\chi$  を用いて,

$$\zeta = \nabla_H^2 \psi, \quad (\text{B.65})$$

$$D = \nabla_H^2 \chi, \quad (\text{B.66})$$

$$U = -\frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}, \quad (\text{B.67})$$

$$V = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \mu}, \quad (\text{B.68})$$

と表せる.

### B.2.3 スペクトル展開

東西方向の切断波数を  $M$  とする.  $\psi, \chi, \Phi'$  および  $\zeta, D$  を球面調和関数で展開する.

$$\psi(\lambda, \mu, t) = a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \psi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.69})$$

$$\chi(\lambda, \mu, t) = a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \chi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.70})$$

$$\Phi'(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \Phi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.71})$$

$$\zeta(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \zeta_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.72})$$

$$D(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M D_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (\text{B.73})$$

$\psi, \chi$  の展開には便宜上  $a^2$  を乗じている. このことと (B.52)(B.65)(B.66) により展開係数には以下の関係が成立する. \*1

$$\zeta_n^m = -n(n+1)\psi_n^m, \quad (\text{B.74})$$

$$D_n^m = -n(n+1)\chi_n^m. \quad (\text{B.75})$$

---

\*1 ラプラシアン の定義が (B.24) と今 (B.52) とで異なることに注意

$U, V$  も球面調和関数展開すると

$$U(\lambda, \mu, t) = a \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+1} U_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.76})$$

$$V(\lambda, \mu, t) = a \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+1} V_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.77})$$

となる. (B.25), (B.29) および (B.67) から (B.76) の右辺は,

$$\begin{aligned} & a \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+1} U_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \\ &= -\frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \psi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right\} \\ & \quad + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \chi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right\}, \\ &= a \sum_{m=-M}^M \left\{ -\sum_{n=|m|}^M \psi_n^m e^{im\lambda} (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} P_n^m(\mu) + \sum_{n=|m|}^M \chi_n^m P_n^m(\mu) \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{im\lambda} \right\}, \\ &= a \sum_{m=-M}^M \left\{ -\sum_{n=|m|}^M \psi_n^m e^{im\lambda} ((n+1)\varepsilon_n^m P_{n-1}^m - n\varepsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m) + im \sum_{n=|m|}^M \chi_n^m Y_n^m \right\}, \end{aligned}$$

となる. この等式において  $Y_n^m$  の展開係数は両辺等しいはずなので,

$$U_n^m = -\psi_{n+1}^m - (n+2)\varepsilon_{n+1}^m + \psi_{n-1}^m (n-1)\varepsilon_n^m + im\chi_n^m, \quad (\text{B.78})$$

である.  $V$  も同様にして

$$V_n^m = im\psi_n^m + (n+2)\varepsilon_{n+1}^m \chi_{n+1}^m - (n-1)\varepsilon_n^m \chi_{n+1}^m, \quad (\text{B.79})$$

が得られる.

## B.2.4 非線形項の変換

非線形項  $A, B$  の離散フーリエ正変換は次で与えられる.

$$A_m(\mu_j) = \frac{1}{Ia} \sum_{i=1}^I e^{-im\lambda_i} [\zeta(\lambda_i, \mu_j) + 2\Omega\mu_j] U(\lambda_i, \mu_j), \quad (\text{B.80})$$

$$B_m(\mu_j) = \frac{1}{Ia} \sum_{i=1}^I e^{-im\lambda_i} [\zeta(\lambda_i, \mu_j) + 2\Omega\mu_j] V(\lambda_i, \mu_j). \quad (\text{B.81})$$

ルジャンドル正変換はガウス・ルジャンドルの積分公式を用いる. 渦度方程式 (B.61) と発散方程式 (B.62) の右辺の  $A, B$  からなる非線形項の展開係数をまとめて  $F_{\zeta n}^m, F_{Dn}^m$  とすれば

$$F_{\zeta n}^m = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{w_j}{1 - \mu_j^2} \left[ imA_m(\mu_j)P_n^m(\mu_j) - B_m(\mu_j)(1 - \mu_j^2) \frac{dP_n^m(\mu_j)}{d\mu} \right], \quad (\text{B.82})$$

$$F_{Dn}^m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{w_j}{1 - \mu_j^2} \left[ imB_m(\mu_j)P_n^m(\mu_j) + A_m(\mu_j)(1 - \mu_j^2) \frac{dP_n^m(\mu_j)}{d\mu} \right], \quad (\text{B.83})$$

となる. ルジャンドル関数の  $\mu$  微分の項は (B.29) を用いて計算できる. 発散方程式の運動エネルギーの展開係数も同様に計算できて,

$$E_n^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \frac{U(\lambda_i, \mu_j)^2 + V(\lambda_i, \mu_j)^2}{2(1 - \mu_j^2)}, \quad (\text{B.84})$$

となる. (B.64) の右辺のフラックス項は (B.61) の右辺第 1, 2 項の  $A, B$  の中身の  $(\zeta + 2\Omega\mu)$  を  $\Phi'$  に替えたものと同じになることに注意すると,

$$\tilde{A}_m(\mu_j) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I e^{-im\lambda_i} \Phi'(\lambda_i, \mu_j) U(\lambda_i, \mu_j), \quad (\text{B.85})$$

$$\tilde{B}_m(\mu_j) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I e^{-im\lambda_i} \Phi'(\lambda_i, \mu_j) V(\lambda_i, \mu_j), \quad (\text{B.86})$$

としたとき, (B.64) のフラックス項の展開係数は次式で与えられる.

$$F_{\Phi' n}^m = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{w_j}{1 - \mu_j^2} \left[ im\tilde{A}_m(\mu_j)P_n^m(\mu_j) - \tilde{B}_m(\mu_j)(1 - \mu_j^2) \frac{dP_n^m(\mu_j)}{d\mu} \right]. \quad (\text{B.87})$$

以上ですべての項がの展開係数が求まる．結局，展開係数の時間微分の式 (予報式) は

$$\frac{\partial \psi_n^m}{\partial t} = -\frac{1}{n(n+1)} F_{\zeta_n}^m, \quad (\text{B.88})$$

$$\frac{\partial \chi_n^m}{\partial t} = -\frac{1}{n(n+1)} F_{D_n}^m - \frac{1}{a^2} (\Phi_n'^m + E_n^m), \quad (\text{B.89})$$

$$\frac{\partial \Phi_n'^m}{\partial t} = F_{\Phi_n'}^m + \bar{\Phi}_n n(n+1) \chi_n^m. \quad (\text{B.90})$$

となる．

## B.2.5 計算の流れ

実際の計算の流れを図 B.1 に示す．

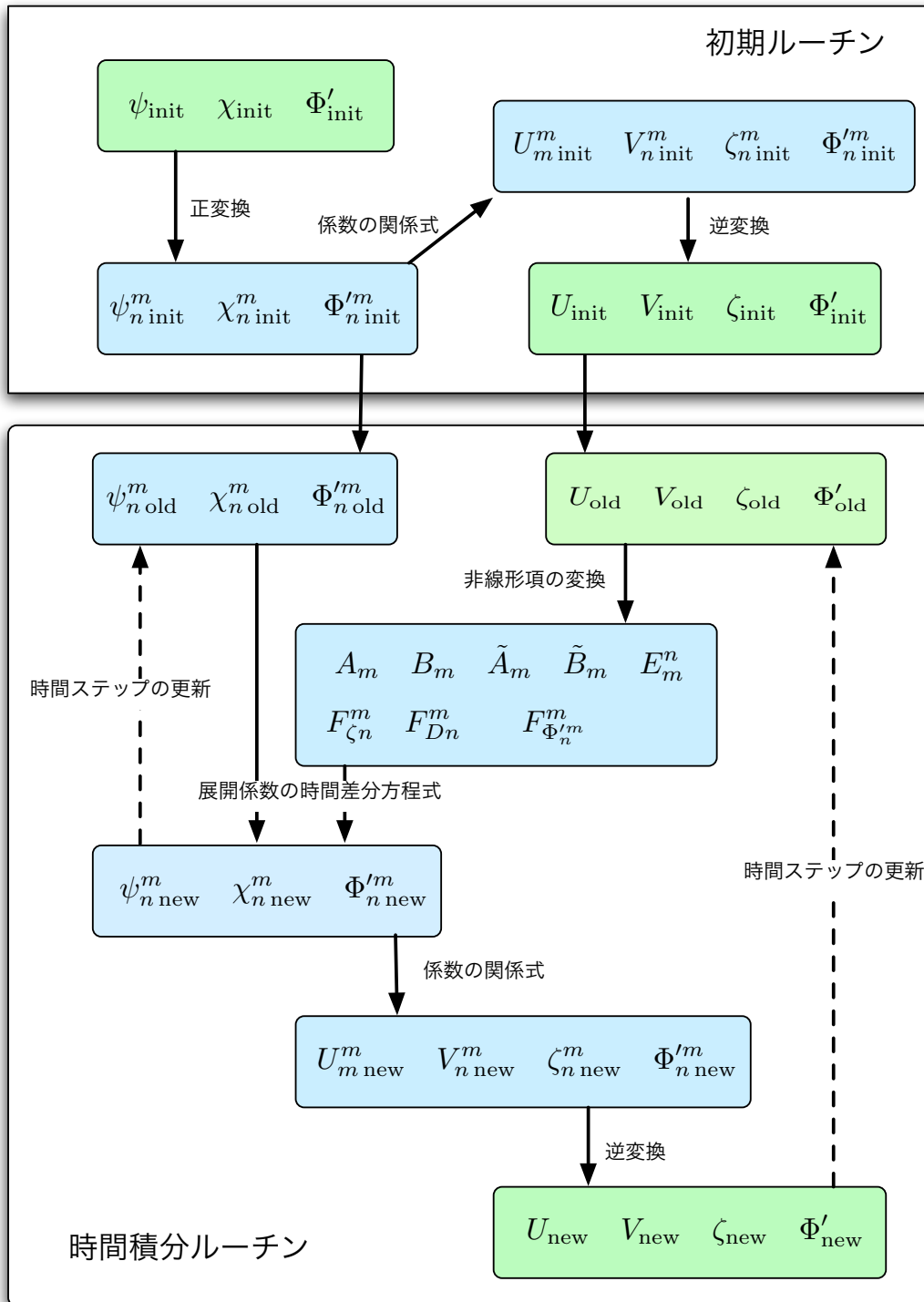


図 B.1 非線形浅水方程式系のスペクトル法での計算の流れ.

### B.3 ブシネスク流体プリミティブ方程式系の離散化

本節では球面上のブシネスク流体のプリミティブ方程式系を、水平方向にスペクトル法、鉛直方向には中央差分法を用いた離散化の方法を記す。

まず、方程式系を以下に記す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \nu_u, \quad (\text{B.91})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \nu_v, \quad (\text{B.92})$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\Theta) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v\Theta \cos \phi) + \frac{\partial (w\Theta)}{\partial z} = \kappa_\Theta - \frac{(\Theta - \Theta_e)}{\tau}, \quad (\text{B.93})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\Theta}{\Theta_0}, \quad (\text{B.94})$$

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.95})$$

ここで、 $\nu_u, \nu_v$  は粘性・拡散項を、 $\kappa_\Theta$  は熱拡散の項を表す。  $\Phi = p/\rho_0$  で、 $\Theta_e$  はニュートン加熱/冷却の基準温位、 $\Theta_0$  は  $\Theta_e$  の全球平均である。上下端の境界条件は Held and Hou (1980) にならう

$$z = H \quad \text{で} \quad w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.96})$$

$$z = 0 \quad \text{で} \quad w = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \quad \nu \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z} = Cv, \quad (\text{B.97})$$

とする。

以下の節では粘性・拡散がラプラシアンで表せ、鉛直と水平の粘性係数を  $\nu_V, \nu_H$  とする。ただし、運動量を球面ラプラシアンで拡散させる伝統的な方法は運動量の再分配の際に角運動量を保存せず、正確ではない。これに関しては次節 B.4 で説明する Becker (2001) の形式を用いることで、角運動量を保存する正しい水平拡散となることに留意したい。

#### B.3.1 トロイダル・ポロイダル展開の利用

速度ベクトル  $\mathbf{u}$  に関して (B.95) より  $\text{div} \mathbf{u} = 0$  なので  $\mathbf{u}$  をトロイダル・ポロイダル展開して、

$$\mathbf{u} = -\nabla \times \psi \mathbf{k} + \nabla \times \nabla \times \chi \mathbf{k}, \quad (\text{B.98})$$

と表す (Chandrasekhar, 1981). ここで,  $\mathbf{k}$  は  $z$  成分の単位ベクトルである. 成分表示すれば

$$u = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right), \quad (\text{B.99})$$

$$v = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right), \quad (\text{B.100})$$

$$w = -\frac{1}{a \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\cos \phi}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right) \right\} = -\nabla_H^2 \chi, \quad (\text{B.101})$$

と書ける. すると鉛直渦度  $\zeta$  と水平発散  $D$  は

$$\zeta = \nabla_H^2 \psi, \quad (\text{B.102})$$

$$D = \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_H^2 \chi), \quad (\text{B.103})$$

と書ける.

$$U = u \cos \phi, \quad V = v \cos \phi, \quad \mu = \sin \phi, \quad (\text{B.104})$$

を導入して渦度・発散方程式を求めると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \mu} + \nu_H \nabla_H^2 \zeta + \nu_V \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad (\text{B.105})$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \nabla_H^2 \left( \Phi + \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right) + \nu_H \nabla_H^2 D + \nu_V \frac{\partial^2 D}{\partial z^2}, \quad (\text{B.106})$$

ただし,

$$A = (\zeta + 2\Omega\mu)U + w \frac{\partial V}{\partial z}, \quad B = (\zeta + 2\Omega\mu)V - w \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (\text{B.107})$$

である. (B.106) を両辺  $z$  微分して (B.94) を利用すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\nabla_H^2 \chi) &= \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \nabla_H^2 \left( \frac{g}{\Theta_0} \Theta + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right] \right) \\ &\quad + \nu_H \nabla_H^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\nabla_H^2 \chi) + \nu_V \frac{\partial^4}{\partial z^4} (\nabla_H^2 \chi), \end{aligned} \quad (\text{B.108})$$

である.  $U, V$  を  $\psi, \chi$  で表すと

$$U = -\frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right), \quad (\text{B.109})$$

$$V = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right), \quad (\text{B.110})$$

となる.

### B.3.2 スペクトル展開

東西方向の切断波数を  $M$  とする.  $\psi, \chi, \Theta$  および  $\zeta, D$  を球面調和関数で展開する.

$$\psi(\lambda, \mu, z, t) = a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \psi_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.111})$$

$$\chi(\lambda, \mu, z, t) = a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \chi_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.112})$$

$$\Theta(\lambda, \mu, z, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \Theta_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.113})$$

$$\zeta(\lambda, \mu, z, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \zeta_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.114})$$

$$D(\lambda, \mu, z, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M D_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (\text{B.115})$$

(B.102), (B.103) の関係から

$$\zeta_n^m = -n(n+1)\psi_n^m, \quad (\text{B.116})$$

$$D_n^m(z, t) = -n(n+1) \frac{\partial \chi_n^m(z, t)}{\partial z}, \quad (\text{B.117})$$

である.  $U, V$  も球面調和関数展開すると

$$U(\lambda, \mu, z, t) = a \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+1} U_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.118})$$

$$V(\lambda, \mu, z, t) = a \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+1} V_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.119})$$

であり, (B.109), (B.110) および (B.29) より

$$U_n^m(z, t) = -\psi_{n+1}^m(z, t)(n+2)\varepsilon_{n+1}^m + \psi_{n-1}^m(z, t)(n-1)\varepsilon_n^m + im \frac{\partial \chi_n^m(z, t)}{\partial z}, \quad (\text{B.120})$$

$$V_n^m(z, t) = im\psi_n^m(z, t) + (n+2)\varepsilon_{n+1}^m \frac{\partial \chi_{n+1}^m(z, t)}{\partial z} - (n-1)\varepsilon_n^m \frac{\partial \chi_{n-1}^m(z, t)}{\partial z}, \quad (\text{B.121})$$

となる.



### B.3.3 非線形項の変換

非線形項の計算は科学数値計算ライブラリ ISPACK(石岡, 2005) を利用することを念頭に各項ごとに球面調和関数変換するほうが簡単である.

$A, B, \left[ \frac{U^2+V^2}{2(1-\mu^2)} \right], U\Theta, V\Theta, w\Theta$  の球面調和関数変換を  $A_n^m, B_n^m, E_n^m, (U\Theta)_n^m, (V\Theta)_n^m, (w\Theta)_n^m$  とする.

### B.3.4 鉛直方向の離散化

鉛直方向の格子の取り方にはチャーニー・フィリップス格子 (Charney and Phillips, 1953) やロレンツ格子 (Lorenz, 1960) などの取り方が, 一般のプリミティブ方程式を扱うときには用いられる. このような格子を用いるのは数値的な安定性が高くなるためである. しかし, ここでは取り扱っているの方程式系の形から  $\psi$  と  $\chi$  のスタッカード格子にする. つまり,  $\chi, w$  は整数格子 ( $k = 0, 1, 2, \dots, K$ ) で定義し,  $\psi, U, V, \Theta$  は半整数格子 ( $\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, \dots, (K-1) + \frac{1}{2}$ ) に定義する. (図 B.2)  $z$  軸を次の通りに離散化する (整

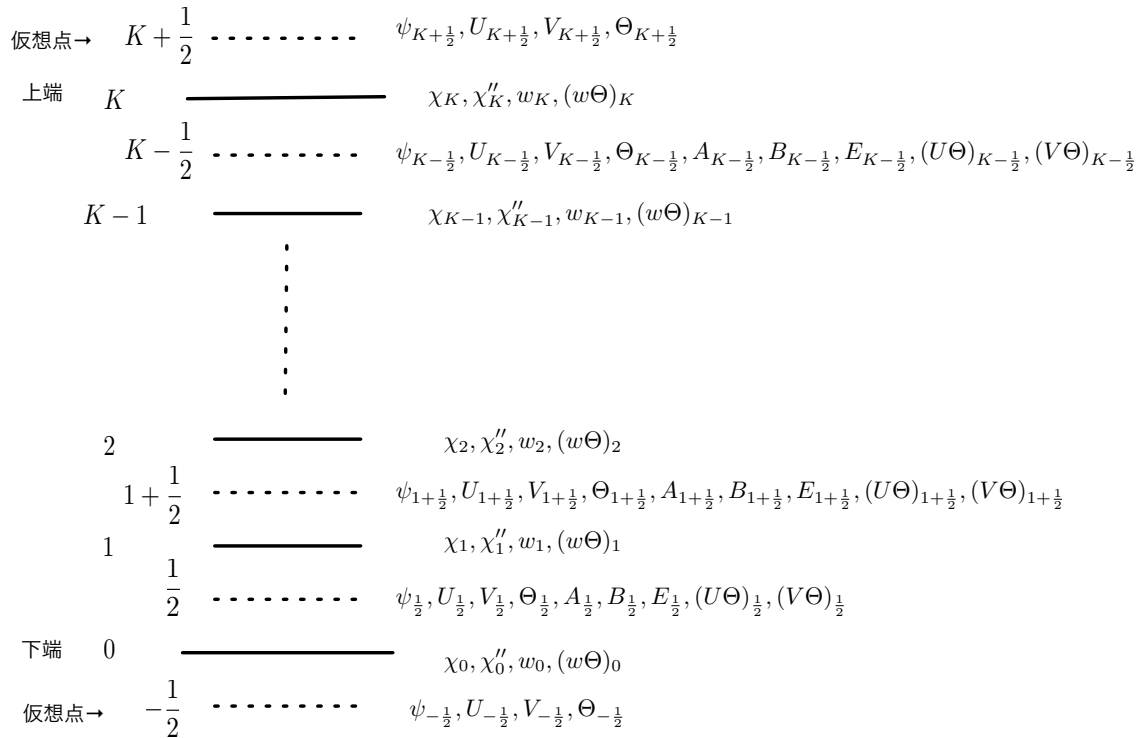


図 B.2 鉛直格子の取り方.  $\chi''$  は  $\chi$  の  $z^2$  階微分を表す.

数格子の場合).

$$z_k = k\Delta z, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K), \quad (\text{B.122})$$

ただし

$$\Delta z = \frac{H}{K}, \quad (\text{B.123})$$

である.  $z_0, z_K$  がそれぞれ下端と上端になる. 半整数格子は, 整数格子間の中点の高さにとる. 整数格子で定義された変数  $x$  の  $z$  微分は半整数格子上で求められ

$$\frac{\partial x(z_{k+\frac{1}{2}})}{\partial z} = \frac{x(z_{k+1}) - x(z_k)}{\Delta z}, \quad (\text{B.124})$$

で近似される. また, 簡単のため  $x_k \equiv x(z_k)$  と下付き文字で表す.

以上から展開係数で表した支配方程式は以下の通りになる.

$$\begin{aligned} -n(n+1) \frac{\partial \psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m}{\partial t} = & \\ & - \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left\{ (-im) A_{n,k+\frac{1}{2}}^m + (n+2) \varepsilon_{n+1}^m B_{n+1,k+\frac{1}{2}}^m - (n-1) \varepsilon_n^m B_{n-1,k+\frac{1}{2}}^m \right\} \\ & + \nu_H \frac{(-n)^2 (n+1)^2}{a^2} \psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m + \nu_V (-n)(n+1) \frac{\psi_{n,k+\frac{3}{2}}^m - 2\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m + \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^m}{(\Delta z)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.125})$$

$$\begin{aligned} -n(n+1) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,k}^m = & \\ & \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left\{ (-im) \frac{B_{n,k+\frac{1}{2}}^m - B_{n,k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} \right. \\ & \left. - (n+2) \varepsilon_{n+1}^m \frac{A_{n+1,k+\frac{1}{2}}^m - A_{n+1,k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} + (n-1) \varepsilon_n^m \frac{A_{n-1,k+\frac{1}{2}}^m - A_{n-1,k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} \right\} \\ & + \frac{n(n+1)}{a^2} \left\{ \frac{g}{\Theta_0} \frac{\Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m + \Theta_{n,k-\frac{1}{2}}^m}{2} + \frac{E_{n,k+\frac{1}{2}}^m - E_{n,k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} \right\} \\ & + \nu_H \frac{(-n)^2 (n+1)^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,k}^m + \nu_V (-n)(n+1) \frac{\left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,k+1}^m - 2 \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,k}^m + \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,k-1}^m}{(\Delta z)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.126})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m}{\partial t} = & -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \left\{ (-im)[U\Theta]_{n,k+\frac{1}{2}}^m + (n+2)\varepsilon_{n+1,k+\frac{1}{2}}^m [V\Theta]_{n+1,k+\frac{1}{2}}^m - (n-1)\varepsilon_n^m [V\Theta]_{n-1,k+\frac{1}{2}}^m \right\} \\
& - \frac{[w\Theta]_{n,k+1}^m - [w\Theta]_{n,k}^m}{\Delta z} - \frac{(\Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m - \Theta_e)}{\tau} \\
& + \kappa_H \frac{(-n)(n+1)}{a^2} \Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m + \kappa_V \frac{\Theta_{n,k+\frac{3}{2}}^m - 2\Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m + \Theta_{n,k-\frac{1}{2}}^m}{(\Delta z)^2}, \tag{B.127}
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
A_{n,k+\frac{1}{2}}^m = & \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \\
& \times \left\{ \left( \zeta_{i,j,k+\frac{1}{2}} + 2\Omega\mu_j \right) U_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \left( \frac{w_{i,j,k+1} + w_{i,j,k}}{2} \right) \frac{V_{i,j,k+\frac{3}{2}} - V_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right\}, \tag{B.128}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{n,k+\frac{1}{2}}^m = & \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \\
& \times \left\{ \left( \zeta_{i,j,k+\frac{1}{2}} + 2\Omega\mu_j \right) V_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \left( \frac{w_{i,j,k+1} + w_{i,j,k}}{2} \right) \frac{U_{i,j,k+\frac{3}{2}} - U_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right\}, \tag{B.129}
\end{aligned}$$

$$E_{n,k+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \left\{ \frac{U_{i,j,k+\frac{1}{2}}^2 + V_{i,j,k+\frac{1}{2}}^2}{2(1-\mu^2)} \right\}, \tag{B.130}$$

$$(U\Theta)_{n,k+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) U_{i,j,k+\frac{1}{2}} \Theta_{i,j,k+\frac{1}{2}}, \tag{B.131}$$

$$(V\Theta)_{n,k+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) V_{i,j,k+\frac{1}{2}} \Theta_{i,j,k+\frac{1}{2}}, \tag{B.132}$$

$$(w\Theta)_{n,k}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) w_{i,j,k} \frac{\Theta_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \Theta_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{2}. \tag{B.133}$$

### B.3.5 計算手順・上下端境界の取り扱い

今, ある時刻での仮想点\*2 ( $k = -\frac{1}{2}, K + \frac{1}{2}$ ) を含む全格子点上の全ての変数 (鉛直微分含む) の値が既知のときに,

- (1) (B.125), (B.127) (ただし  $k = 0, \dots, K - 1$ ) から次の時刻の  $\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m, \Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m$  ( $k = 0, \dots, K - 1$ ) が求められる. また, (B.126)(ただし  $k = 1, \dots, K - 1$ ) より  $\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)_{n,k}^m$  ( $k = 1, \dots, K - 1$ ) が求められる.
- (2) 境界条件  $w(0) = w(H) = 0$  から,

$$\chi_{n,K}^m = \chi_{n,0}^m = 0, \quad (\text{B.134})$$

なので,

$$\frac{\chi_{n,k+1}^m - 2\chi_{n,k}^m + \chi_{n,k-1}^m}{(\Delta z)^2} = \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)_{n,k}^m. \quad (\text{B.135})$$

ゆえに以下が成立する.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{n,1}^m \\ \chi_{n,2}^m \\ \chi_{n,3}^m \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_{n,K-1}^m \end{pmatrix} = (\Delta z)^2 \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)_{n,1}^m \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)_{n,K-1}^m \end{pmatrix}. \quad (\text{B.136})$$

この連立一次方程式 (三重対角行列) を解くことで  $\chi_{n,k}^m$  ( $k = 1, \dots, K - 1$ ) が求められる.

- (3) 上端の境界条件  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$  は離散化すれば

$$U_{n,K-\frac{1}{2}}^m = U_{n,K+\frac{1}{2}}^m, \quad V_{n,K-\frac{1}{2}}^m = V_{n,K+\frac{1}{2}}^m, \quad \Theta_{n,K-\frac{1}{2}}^m = \Theta_{n,K+\frac{1}{2}}^m, \quad (\text{B.137})$$

と書ける. ここで  $k = K + 1$  は仮想点である.  $\psi$  は

$$\psi_{n,K+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{-n(n+1)} \zeta_{n,K+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{-n(n+1)} \zeta_{n,K-\frac{1}{2}}^m = \psi_{n,K-\frac{1}{2}}^m, \quad (\text{B.138})$$

$\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)$  は

$$\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)_{n,K}^m = \frac{1}{-n(n+1)} \left(\frac{\partial D_{n,K}^m}{\partial z}\right) = 0, \quad (\text{B.139})$$

\*2 仮想点とは半整数格子で定義された変数が, 整数格子上で位置する上下境界での境界条件を満たすために導入する点 ( $k = -\frac{1}{2}, K + \frac{1}{2}$ ) である.

と書ける.

(4) 下端境界条件  $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{C}{\nu}U$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{C}{\nu}V$  は次の通りに離散化できる.

$$\frac{U_{\frac{1}{2}} - U_{-\frac{1}{2}}}{\Delta z} = \frac{C}{\nu_V}U_0 = \frac{C}{\nu_V} \frac{U_{\frac{1}{2}} + U_{-\frac{1}{2}}}{2}. \quad (\text{B.140})$$

これを  $U_{-\frac{1}{2}}$  について解けば

$$U_{-\frac{1}{2}} = \left( \frac{2\nu_V - C\Delta z}{2\nu_V + C\Delta z} \right) U_{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.141})$$

となる. 簡単のため

$$\alpha \equiv \left( \frac{2\nu_V - C\Delta z}{2\nu_V + C\Delta z} \right), \quad (\text{B.142})$$

としておく. よって下端境界条件は

$$U_{n,-\frac{1}{2}}^m = \alpha U_{n,\frac{1}{2}}^m, \quad V_{n,-\frac{1}{2}}^m = \alpha V_{n,\frac{1}{2}}^m, \quad (\text{B.143})$$

と書ける. これから  $\psi$  は

$$\psi_{n,-\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{-n(n+1)} \zeta_{n,-\frac{1}{2}}^m = \frac{\alpha}{-n(n+1)} \zeta_{n,\frac{1}{2}}^m = \alpha \psi_{n,\frac{1}{2}}^m, \quad (\text{B.144})$$

であり,  $\left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)$  は

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,0}^m &= \frac{1}{-n(n+1)} \left( \frac{\partial D_{n,0}^m}{\partial z} \right), \\ &= \frac{1}{-n(n+1)} \frac{D_{n,\frac{1}{2}}^m - D_{n,-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z}, \\ &= \frac{1}{-n(n+1)} \frac{D_{n,\frac{1}{2}}^m - \alpha D_{n,\frac{1}{2}}^m}{\Delta z}, \\ &= \frac{1}{-n(n+1)} \frac{(1-\alpha)}{\Delta z} D_{n,\frac{1}{2}}^m, \\ &= \frac{(1-\alpha)}{-n(n+1)\Delta z} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_H^2 \chi)_{n,\frac{1}{2}}^m, \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\Delta z} \frac{\chi_{n,1}^m - \chi_{n,0}^m}{\Delta z}, \\ &= \frac{(1-\alpha)}{(\Delta z)^2} \chi_{n,1}^m, \end{aligned} \quad (\text{B.145})$$

と書ける. また,  $\Theta$  に関しては上端と同様で

$$\Theta_{n,-\frac{1}{2}}^m = \Theta_{n,\frac{1}{2}}^m, \quad (\text{B.146})$$

である.

(5)  $\chi_{n,k}^m, \psi_{n,k}^m$  から  $U_{n,k}^m, V_{n,k}^m$  を求める式は (B.109), (B.110) より

$$U_{n,k+\frac{1}{2}}^m = -\psi_{n+1,k+\frac{1}{2}}^m (n+2)\varepsilon_{n+1}^m + \psi_{n-1,k+\frac{1}{2}}^m (n-1)\varepsilon_n^m + im \frac{\chi_{n,k+1}^m - \chi_{n,k}^m}{\Delta z}, \quad (\text{B.147})$$

$$V_{n,k+\frac{1}{2}}^m = im\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m + (n+2)\varepsilon_{n+1}^m \frac{\chi_{n+1,k+1}^m - \chi_{n+1,k}^m}{\Delta z} - (n-1)\varepsilon_n^m \frac{\chi_{n-1,k+1}^m - \chi_{n-1,k}^m}{\Delta z}, \quad (\text{B.148})$$

となる.

以上の境界条件を用いれば上下端 ( $k = 0, K$ ) および仮想点 ( $k = -\frac{1}{2}, K + \frac{1}{2}$ ) の値も求まり, 時間発展が記述できる (図 B.3).

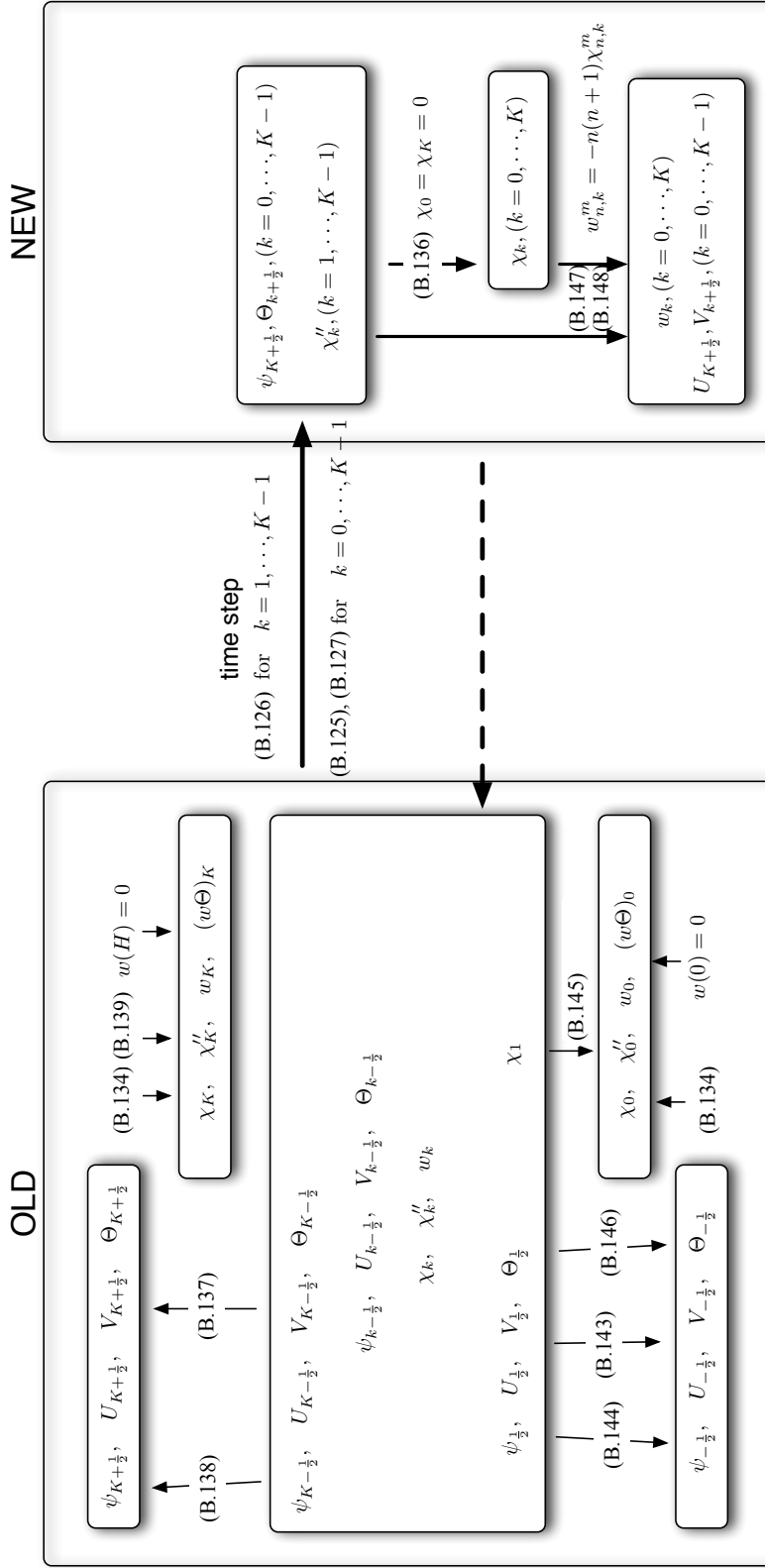


図 B.3 計算の流れ

## B.4 角運動量を保存する水平拡散

これまでは水平拡散として水平ラプラシアンを用いてきたが、これは Becker (2001) により、角運動量を正しく保存しない事が示されている。Becker (2001) による角運動量を保存する水平拡散項は以下の形で書かれる。

$$\mathbf{H}_\mu = \nu_H \left( \nabla_H^2 \mathbf{v}_\mu + \nabla \hat{D}_\mu + 2 \frac{\mathbf{v}_\mu}{a^2} \right). \quad (\text{B.149})$$

ただし  $\mu$  が  $\mu \geq 1$  のとき超粘性を、 $\mu = 0$  のとき物理的に意味のある通常の粘性を表している (前節までのサイン緯度の  $\mu$  ではないので注意)。また

$$\mathbf{v}_\mu = (-1)^\mu a^{2\mu} \nabla_H^{2\mu} \mathbf{v}, \quad (\text{B.150})$$

$$\hat{D}_\mu = \nabla \cdot \mathbf{v}_\mu, \quad (\text{B.151})$$

である。

これを渦度・発散方程式のスペクトル法における展開係数の予報式の形に直せば以下の形になる。

$$\frac{d\zeta_n^m}{dt} = \dots - \frac{\nu_H}{a^2} \left\{ [n(n+1)]^{1+\mu} - 2[n(n+1)]^\mu \right\} \zeta_n^m, \quad (\text{B.152})$$

$$\frac{dD_n^m}{dt} = \dots - \frac{\nu_H}{a^2} \left\{ 2[n(n+1)]^{1+\mu} - 2[n(n+1)]^\mu \right\} D_n^m. \quad (\text{B.153})$$

ここで、 $\mu = 0$ 、軸対称 ( $\partial/\partial\lambda = 0$ ) とすると、東西風  $u$  の運動方程式に表れる水平拡散項は

$$(\mathbf{H}_0)_\lambda = \nu_H \left\{ \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{u}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{2u}{a^2} \right\} \quad (\text{B.154})$$

となる。また、南北風  $v$  の運動方程式に出てくるのは

$$(\mathbf{H}_0)_\phi = \nu_H \left\{ \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - \frac{v}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) \right] + \frac{2v}{a^2} \right\} \quad (\text{B.155})$$

という形をとる。

式 (B.154) から  $(\mathbf{H}_0)_\lambda = 0$  になるのは

$$u = u_0 \cos \phi \quad (\text{B.156})$$

(ただし  $u_0$  は定数) のときである事が分かる。つまり、水平粘性項は東西風速場を剛体回転に近づけるように働くのである。



## B.5 実装

本節では B.3 節で導いた離散化した方程式を、実際に計算機のプログラムとして実装する上での要点を記す。必要なルーチンとそのために用いるライブラリは以下の 4 つである。なお、軸対称モデルの場合は、東西波数を  $m = 0$  のみとして、球面調和関数変換の代わりにルジャンドル変換を使用する。

- 球面調和関数変換 (ルジャンドル変換): ISPACK/SNPACK(LTPACK).
- 三重対角行列で表される連立一次方程式の解を求める: LAPACK/DGTTRF, DGTTRS (Anderson et al., 1999).
- 時間発展: 4 次のルンゲ・クッタ法を自作.
- データの入出力: gt4f90io.

### ISPACK/SNPACK(LTPACK)

ISPACK(Ishioka Scientific PACKage) は、主に簡単な流体方程式の数値計算に必要な基本的な道具 (スペクトル変換, 時間積分, IO, 等) をサブルーチン群としてまとめたものである。その中で SNPACK(LTPACK) は球面調和関数変換 (ルジャンドル変換) の正変換・逆変換および、緯度微分・経度微分を作用させた各変換を行うサブルーチンを提供してくれる。これを用いることで、 $\psi, \chi$  から  $U, V$  の計算が簡単に行える。

### LAPACK/DGTTRF, DGTTRS

LAPACK (Linear Algebra PACKage) は線形代数計算用ライブラリである。BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) ライブラリ上に構築されており、線形方程式や固有値問題を扱うことができる。OS や CPU に依存する最適化を BLASで行っているため、BLAS が提供されている計算機なら、特別に意識することなく最適性能が得られることが特徴。その中で DGTTRF は実三重対角行列  $A$  について  $LU$  分解を計算し、DGTTRS はこの  $LU$  分解を用いて、連立一次方程式  $A * X = B$  の解を計算する。

#### 4 次のルンゲ・クッタ法

4 次のルンゲ・クッタ法は時間発展計算に広く用いられている。常微分方程式  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  の時間発展は以下で表される (小国, 1997)。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{k}_1}{6} + \frac{\mathbf{k}_2}{3} + \frac{\mathbf{k}_3}{3} + \frac{\mathbf{k}_4}{6}, \quad (\text{B.157})$$

ただし

$$\mathbf{k}_1 = dt \cdot \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \quad (\text{B.158})$$

$$\mathbf{k}_2 = dt \cdot \mathbf{f}(t_n + dt/2, \mathbf{x}_n + \mathbf{k}_1/2), \quad (\text{B.159})$$

$$\mathbf{k}_3 = dt \cdot \mathbf{f}(t_n + dt/2, \mathbf{x}_n + \mathbf{k}_2/2), \quad (\text{B.160})$$

$$\mathbf{k}_4 = dt \cdot \mathbf{f}(t_n + dt, \mathbf{x}_n + \mathbf{k}_3). \quad (\text{B.161})$$

#### gt4f90io

gt4f90io は gtool4 NetCDF 規約 (豊田 et al., 2006) に従った数値データの入出力ライブラリである。NetCDF 形式の読み書きを非常に容易に実現することが出来る。なお、NetCDF(Network Common Data Form) とは機種依存のない自己記述的 (座標軸, 物理量の名前, 単位, 作成者名等の情報を付加できる) データ形式である (Rew et al., 1997)。気象海洋業界で広く普及しており, NetCDF 形式を扱える解析・可視化用ソフトウェアが豊富なことが特徴。

## B.6 モデルテスト

離散化した通りに正しくソースコードを書けば、数値計算は問題なく実行可能となるが、書かれたソースコードはほぼ確実にバグを含んでいる。例え、コンパイルエラーがでなくなっても計算が正しく行われているかの確認が必要である。この節では、幾つかのテスト方法を紹介する。ここで取り扱う方程式系を再び以下に記す。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \mu} + \nu_H \nabla_H^4 \psi + \nu_V \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_H^2 \psi, \quad (\text{B.162})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_H^2 \chi &= \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \nabla_H^2 \left( \frac{g}{\Theta_0} \Theta + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right] \right) \\ &\quad + \nu_H \nabla_H^4 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \nu_V \frac{\partial^4}{\partial z^4} \nabla_H^2 \chi, \end{aligned} \quad (\text{B.163})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(U\Theta)}{\partial z} - \frac{1}{a} \frac{\partial(V\Theta)}{\partial \mu} - \frac{\partial(w\Theta)}{\partial z} \\ &\quad + \kappa_H \nabla_H^2 \Theta + \kappa_V \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\Theta - \Theta_e}{\tau}, \end{aligned} \quad (\text{B.164})$$

ただし、

$$A = (\nabla_H^2 \psi + 2\Omega\mu)U + w \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (\text{B.165})$$

$$B = (\nabla_H^2 \psi + 2\Omega\mu)V + w \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (\text{B.166})$$

$$U = -\frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right), \quad (\text{B.167})$$

$$V = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right), \quad (\text{B.168})$$

$$w = -\nabla_H^2 \chi, \quad (\text{B.169})$$

である。

### B.6.1 ロスビー波テスト：水平方向のチェック

上記の方程式系は非粘性、等温、順圧場のときに  $\psi$  で閉じる。つまり

$$\nu_H = \nu_V = 0, \quad \Theta = \Theta_e = \Theta_0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.170})$$

このとき方程式系は

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi = \frac{1}{a^2} \left\{ \left( \nabla_H^2 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \left( \nabla_H^2 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right\}, \quad (\text{B.171})$$

となる. この方程式に対して

$$\psi = Y_n^m e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.172})$$

を代入する. ここで  $Y_n^m$  は球面調和関数である. すると以下の分散関係式が得られる.

$$\frac{\omega}{m} = \frac{-2\Omega}{n(n+1)}. \quad (\text{B.173})$$

つまり, 初期に与えた位相  $\psi = Y_n^m$  が, この位相速度で西進することを確認することで水平方向のチェックになる (図 B.4).

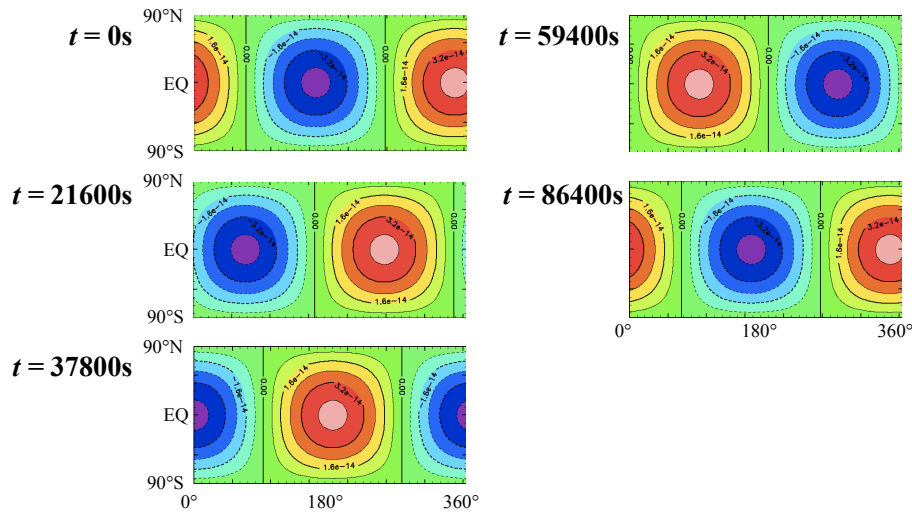


図 B.4 ロスビー波テスト.  $\psi = Y_1^1 e^{-i\omega t}$  の場合の  $\psi$ . すなわち位相速度は  $-\Omega$  で周期が 1 地球日 (day) = 86400s.

## B.6.2 重力波テスト: 鉛直方向のチェック

次は方程式系に対して, 基本場の温位勾配一定, 自転なし, 非粘性, 非拡散を仮定する.

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} = \text{一定}, \quad \Omega = \nu_H = \nu_V = \kappa_H = \kappa_V = 0. \quad (\text{B.174})$$

ここで  $\bar{\Theta}$  は基本温位場である. さらに, 基本場の  $\psi, \chi$  はゼロとし, 微小擾乱を与える. すると方程式系は線形化できて,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_H^2 \chi = -\frac{g}{\Theta_0} \nabla_H^2 \Theta', \quad (\text{B.175})$$

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial t} = -w \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z}, \quad (\text{B.176})$$

となる. ここで  $\Theta'$  は温度擾乱である. (B.175) を時間微分して (B.176) を代入すると,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_H^2 \chi = N^2 \nabla_H^2 \chi, \quad (\text{B.177})$$

が得られる. ただし  $N$  はブラント・バイサラ振動数で

$$N^2 \equiv \frac{g}{\Theta_0} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z}, \quad (\text{B.178})$$

である. (B.177) に対して微小な  $\chi$  を

$$\chi = Y_n^m \sin(l\pi z/H) e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.179})$$

で与えれば, 以下の分散関係式が得られる.

$$\omega^2 = \frac{N^2 n(n+1)}{a^2 l^2 \pi^2 / H^2}. \quad (\text{B.180})$$

つまり, 初期に与えた擾乱  $\chi = Y_n^m \sin(l\pi z/H)$  が上記の分散関係式を満たす振動数  $\omega$  で振動することを確認することで, 鉛直方向のチェックになる (図 B.5).

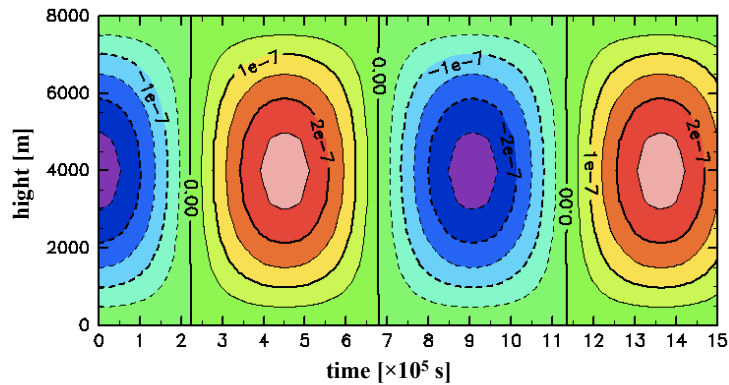


図 B.5 重力波テスト.  $m = n = l = 1, N^2 = 1.5 \times 10^{-4}$  の場合の  $\chi$ . すなわち周期は  $9.1 \times 10^5 \text{s}$ .

## B.7 高拡散係数時の数値計算法

数値モデルにおいて、拡散係数の値を大きくしていくと、強い拡散項の影響で早く定常に達することが予想される。しかし、実際は拡散係数を大きくすると CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件から時間刻み幅を小さくする必要があるため、結果として定常状態に達するまでに要する計算回数が多くなり、計算時間が増大する。

このような、解自体は急激に一定値に収束するが、陽的公式では刻み幅を十分に小さくしないと正しい解が得られない常微分方程式のことを硬い方程式 (**stiff equation**) と呼ぶ。この節では硬い方程式を効率的に数値計算するための一般的な解法を述べた後に、B.3 節のブシネスク流体プリミティブ方程式系に対して、この解法を実装する。

### B.7.1 硬い方程式の解法

以下のような線形常微分方程式を考える。

$$\frac{dx}{dt} = -ax. \quad (\text{B.181})$$

ただし、 $a > 0$  である。これを通常の陽的オイラー法で差分化すると

$$x_{n+1} = (1 - a\Delta t)x_n, \quad (\text{B.182})$$

なので

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = |1 - a\Delta t|, \quad (\text{B.183})$$

となり、安定のためには  $\Delta t < a^{-1}$  を満たす必要がある。つまり  $a$  が大きくなるほど、時間刻み幅を小さくとらなければならない。

そこで、陰的公式を用いれば (B.181) は、

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + a\Delta t} x_n, \quad (\text{B.184})$$

と差分化される。ゆえに

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{1}{1 + a\Delta t} \right| < 1, \quad (\text{B.185})$$

となり、時間刻み幅を大きくとっても安定に計算できる。

今の場合、方程式が線形なので陰的公式で素直に解けたが、非線形で多変数の場合は時間ステップ毎に非線形の連立方程式を解かねばならず、演算回数が多くなってしまう。し

かし、方程式の硬さの原因が線形項にある場合は、陽的公式の形を書き換えて、硬さを回避できる場合がある。

次のような微分方程式を考える。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{B.186})$$

ここで  $A(t)\mathbf{x}(t)$  が線形項で  $A(t)$  は係数行列である。  $\mathbf{f}(t)$  は非斉次項、  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  が非線形項である。非線形項がなかった場合の解は、ある時刻  $s$  での解を  $\mathbf{x}(s)$  として

$$\mathbf{x}(t) = R(t, s)\mathbf{x}(s) + \int_s^t R(t, u)\mathbf{f}(u)du, \quad (\text{B.187})$$

で与えられる行列  $R(t, s)$  が存在する。  $R(t, s)$  は解核行列と呼ばれ、

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t), \quad (\text{B.188})$$

に対する解を

$$\mathbf{x}(t) = R(t, s)\mathbf{x}(s), \quad (\text{B.189})$$

と記述する行列である。  $R(t, s)$  には以下の性質がある。

- (1)  $R(s, s) = I$ , (単位行列)
- (2)  $R(t, s)R(s, t) = I$ ,
- (3)  $R(t, s)^{-1} = R(s, t)$ ,
- (4)  $\frac{\partial R(t, s)}{\partial t} = A(t)R(t, s)$ ,
- (5)  $\frac{\partial R(t, s)}{\partial s} = -R(t, s)A(s)$ .

以上の性質を用いるとルンゲ・クッタ公式は以下で書かれる。<sup>\*3</sup>

$$\mathbf{x}(t+h) = L\left(t+h, t+\frac{h}{2}\right) \left[ L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) \left[ \mathbf{x}(t) + \frac{1}{6}\mathbf{k}_1 \right] + \frac{1}{3}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \right] + \frac{1}{3}\mathbf{k}_4, \quad (\text{B.190})$$

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t), \quad (\text{B.191})$$

$$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{g}\left(L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) \left[ \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1 \right], t+\frac{h}{2}\right), \quad (\text{B.192})$$

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{g}\left(L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) [\mathbf{x}(t)] + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2, t+\frac{h}{2}\right), \quad (\text{B.193})$$

$$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{g}\left(L\left(t+h, t+\frac{h}{2}\right) \left[ L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) [\mathbf{x}(t)] + \mathbf{k}_3 \right], t+h\right), \quad (\text{B.194})$$

<sup>\*3</sup> 詳しい導出は石岡 (2004) 参照。

ただし

$$L(t, s)[\mathbf{x}(s)] = R(t, s)\mathbf{x}(s) + \int_s^t R(t, u)\mathbf{f}(u)du, \quad (\text{B.195})$$

である.

一般の  $A(t)$  に対して,  $R(t, s)$  を求めることは容易ではないが,  $A(t) = A$  すなわち定係数のときは具体的に計算できる.  $n$  次正方形行列  $A$  に対して

$$\exp(At) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad (\text{B.196})$$

とおき, これを  $At$  の指数関数と定義する. すると

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad (\text{B.197})$$

の解核行列は

$$R(t, s) = \exp(A(t - s)), \quad (\text{B.198})$$

で与えられる. なぜなら

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \exp(A(t - s)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(t - s)^{k-1}}{k!} A^k, \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - s)^k}{k!} A^k, \\ &= A \exp(A(t - s)), \end{aligned}$$

だからである.

$\exp(At)$  は  $A$  が対角化可能なときには計算が容易になる. まず,  $A$  が対角行列のときは

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix},$$

とすれば

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix},$$



だから

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} \sum \frac{t^k}{k!} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sum \frac{t^k}{k!} \lambda_2^k & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix},$$

である. 一方, 対角化可能な行列  $A$  は, ある正則行列  $T$ , 対角行列  $D$  で表せて  $A = TDT^{-1}$  なので,  $A^k = TD^kT^{-1}$  である. ゆえに

$$\exp(At) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} T^{-1}, \quad (\text{B.199})$$

となる. ここで  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  は  $A$  の固有値である. さらに,  $A$  が対称行列なら  $T$  の列ベクトルは固有ベクトルに対応し,  $T$  は直交行列 ( $T^{-1} = T^T$ ) になる.

なお, 解核行列に関しては笠原 (1982) を参照のこと.

## B.7.2 ブシネスク方程式への応用

式 (B.125)-(B.127) の常微分方程式に対して, 先ほどの陰的公式を用いる. ただし, ここでは硬さの原因となるのは水平拡散項のみであると考え, 鉛直拡散項は非線形項と一緒に扱う. すると非線形項を除いた線形の微分方程式は各変数 ( $\psi, \chi, \Theta$ ), 各層 ( $k = \frac{1}{2}, \dots, K - \frac{1}{2}, 1, \dots, K - 1$ ), 各波数成分に対して, 1 変数の微分方程式として取り扱える. すなわち, 係数行列は対角行列となり, 各層で拡散係数の値は変化しないので係数行列  $A$  は  $I$  を単位行列とすれば

$$A = -\nu_H \frac{n(n+1)}{a^2} I, \quad (\text{B.200})$$

で表される (右辺分母の  $a$  は惑星半径). 今

$$a_n \equiv -\nu_H \frac{n(n+1)}{a^2}, \quad (\text{B.201})$$

と置けば, 解核行列は前節の内容をふまえて

$$R_n(t, s) = e^{a_n(t-s)} I, \quad (\text{B.202})$$

となる. 非斉次項も今は考えておらず, 非線形項は時間に陽的に依存しないので, 前述のルンゲ・クッタ公式は次のように簡単になる.

$$k_1 = hg(x(t)), \quad (\text{B.203})$$

$$k_2 = hg\left(e^{a_n \frac{h}{2}} \left(x(t) + \frac{1}{2}k_1(n)\right)\right), \quad (\text{B.204})$$

$$k_3 = hg\left(e^{a_n \frac{h}{2}} x(t) + \frac{1}{2}k_2(n)\right), \quad (\text{B.205})$$

$$k_4 = hg\left(e^{a_n \frac{h}{2}} \left(e^{a_n \frac{h}{2}} x(t) + k_3(n)\right)\right), \quad (\text{B.206})$$

$$x(t+h) = e^{a_n \frac{h}{2}} \left[ e^{a_n \frac{h}{2}} \left(x(t) + \frac{1}{6}k_1\right) + \frac{1}{3}(k_2 + k_3) \right] + \frac{1}{6}k_4. \quad (\text{B.207})$$

ここで,  $g(x)$  は非線形項を表す関数である. また温位の式では  $\nu_H$  は  $\kappa_H$  に変わることにも注意したい.

### B.7.3 実際に計算する上での注意

本節で扱ってきた硬い方程式の解法は, 数値計算の安定性は向上するが, 安定に走ったからといって, その結果の信頼性を保証するものではない. 実際上は方程式の“硬さ”が大きくなると, 時間刻み幅が大きいときはその刻み幅に結果が依存するようになってしまう. 刻み幅を徐々に細かくしていき, 結果が変わらないようになれば, その結果は信頼できる.

## 付録 C

# 変形オイラー平均方程式系とエリアッセン・パームフラックスに関する補足

付録 C では東西平均場における波と平均流の相互作用解析に欠かせない、変形オイラー平均 (Transformed Eulerian Mean, TEM) 方程式系とエリアッセン・パーム (Eliassen-Palm, EP) フラックスに関する補足を行う。はじめに伝統的な TEM 方程式系を示し、次にブシネスク系で伝統的な TEM 方程式系を Vallis (2006) を参考に導出する。そして、Ferrari and Plumb (2003) で提案された、一般化した TEM 方程式系を導出する。

### C.1 伝統的な変形オイラー平均方程式系とエリアッセン・パームフラックス

Eliassen and Palm (1961) は任意の水平・鉛直シアを伴う東西平均流と波擾乱との相互作用に関する基本的な定理を初めて提出した。伝統的な TEM 方程式系は Andrews and McIntyre (1976) によって定式化され、Edmon et al., (1980) が EP フラックスとその収束発散を矢印と等値線でそれぞれ表した子午面断面図を描き、波と平均流の相互作用の診断方法を提案した。この診断方法は現在では非常に広く活用されている。

対数圧力座標  $Z = -H \ln(p/p_R)$  (ここで  $p_R$  は基準圧力,  $H$  はスケールハイト) で記述された、伝統的な TEM 方程式系は以下の通りである (Vallis, 2006)。ただし、以下では上線 ( $\bar{\cdot}$ ) は東西平均を、下付き文字は偏微分を表し、 $\rho_R = \rho_0 \exp(-Z/H)$  で  $\rho_0$  は定数とす

る.

東西運動方程式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \bar{v}^* \cos \phi) + \frac{\partial (\bar{u} \bar{w}^*)}{\partial Z} - \left( f + \frac{\bar{u} \tan \phi}{a} \right) \bar{v}^* - \bar{X} = \frac{1}{a \rho_R \cos \phi} \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{C.1})$$

ただし

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial Z} \left( \rho_R \frac{\overline{v' \Theta'}}{\Theta_Z} \right), \quad (\text{C.2})$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\overline{v' \Theta'}}{\Theta_Z} \cos \phi \right), \quad (\text{C.3})$$

$$F^\phi = a \rho_R \cos \phi \left( \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\overline{v' \Theta'}}{\Theta_Z} - \overline{u' v'} \right), \quad (\text{C.4})$$

$$F^Z = a \rho_R \cos \phi \left( \left[ f - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \cos \phi) \right] \frac{\overline{v' \Theta'}}{\Theta_Z} - \overline{u' w'} \right), \quad (\text{C.5})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F^\phi \cos \phi) + \frac{\partial F^Z}{\partial Z}. \quad (\text{C.6})$$

南北運動方程式

$$\bar{u} \left( f + \frac{\bar{u} \tan \phi}{a} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \phi} = \hat{S}. \quad (\text{C.7})$$

ここで  $G$  は傾度風平衡からずれようとする項だが, 多くの場合  $\hat{S}$  は非常に小さく, 力学的な寄与は無視できる (Andrews et al., 1987).

静力学平衡の式

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial Z} = \frac{R}{H} \bar{\Theta} e^{-\kappa Z/H}. \quad (\text{C.8})$$

連続の式

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{v}^* \cos \phi) + \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial (\rho_R \bar{w}^*)}{\partial Z} = 0. \quad (\text{C.9})$$

熱力学方程式

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{v}^* \cdot \nabla \bar{\Theta} = S - \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial Z} \left( \rho_R \frac{\overline{v' \Theta'} a^{-1} \bar{\Theta}_\phi}{\Theta_Z} + \rho_R \overline{w' \Theta'} \right). \quad (\text{C.10})$$

TEM 方程式系の導出過程の詳細は塚原 (2005) に示されている.

この TEM 方程式系にブシネスク近似を行い、 $z$  座標系で書くと以下の通りになる。

東西運動方程式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \bar{v}^* \cos \phi) + \frac{\partial (\bar{u} \bar{w}^*)}{\partial z} - \left( f + \frac{\bar{u} \tan \phi}{a} \right) \bar{v}^* - \bar{X} = \frac{1}{a \cos \phi} \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{C.11})$$

ただし

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{v' \Theta'}}{\bar{\Theta}_z} \right), \quad (\text{C.12})$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\overline{v' \Theta'}}{\bar{\Theta}_z} \cos \phi \right), \quad (\text{C.13})$$

$$F^\phi = a \cos \phi \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\overline{v' \Theta'}}{\bar{\Theta}_z} - \overline{u' v'} \right), \quad (\text{C.14})$$

$$F^z = a \cos \phi \left( \left[ f - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \cos \phi) \right] \frac{\overline{v' \Theta'}}{\bar{\Theta}_z} - \overline{u' w'} \right), \quad (\text{C.15})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F^\phi \cos \phi) + \frac{\partial F^z}{\partial z}. \quad (\text{C.16})$$

南北運動方程式

$$\bar{u} \left( f + \frac{\bar{u} \tan \phi}{a} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \phi} = \hat{S}. \quad (\text{C.17})$$

静力学平衡の式

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = g \frac{\bar{\Theta}}{\bar{\Theta}_0}. \quad (\text{C.18})$$

連続の式

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{v}^* \cos \phi) + \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z} = 0. \quad (\text{C.19})$$

熱力学方程式

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{v}^* \cdot \nabla \bar{\Theta} = S - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{v' \Theta' a^{-1} \bar{\Theta}_\phi}}{\bar{\Theta}_z} + \overline{w' \Theta'} \right). \quad (\text{C.20})$$

ここで注意したいのは EP フラックス  $\mathbf{F}$  は分母に  $\bar{\Theta}_z$  を持っているということである。すなわち、本研究で用いたような熱フラックスなしの境界条件だと  $\bar{\Theta}_z = 0$  となり、EP フラックスは境界に近づくにつれ、無限大に発散してしまう。それは残差子午面循環が閉じないということでもある。このような問題は主にブシネスク流体として扱われる海洋を対象としたときにも現れる。これを解決するために TEM 方程式系を拡張する必要があるが、その準備として次節で Vallis (2006) による TEM 方程式系の導出方法を紹介する。

## C.2 Vallis (2006) による導出

本節で紹介する TEM 方程式系の導出方法は Vallis (2006) を参考にしたものだが、彼は Held and Schneider (1999), Ferrari and Plumb (2003), Plumb and Ferrari (2005) を参考にしている。

### C.2.1 渦誘導速度 (eddy induced velocity) の導入

オイラー平均方程式から TEM 方程式に変換するために次の形で表される  $\bar{\mathbf{v}}^*$  を定義する必要がある。

$$\bar{\mathbf{v}}^* = \bar{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}} + \nabla \times \psi. \quad (\text{C.21})$$

つまり渦誘導速度 (eddy induced velocity)  $\tilde{\mathbf{v}}$  を決める必要がある。

まず、運動量と熱力学のオイラー平均方程式をベクトルで書けば以下のようなになる。なお、本節の上線は任意の平均を表すもので、東西平均でなくてもよい。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \times \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{\Phi} + \mathbf{R}, \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\Theta} = S[\Theta] - \nabla \cdot \mathbf{F}[\Theta]. \quad (\text{C.23})$$

また、任意のトレーサー (追跡子; ラグランジュ保存量)  $\Xi$  に対して

$$\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\Xi} = S[\Xi] - \nabla \cdot \mathbf{F}[\Xi], \quad (\text{C.24})$$

である。ここで、 $\mathbf{R}$  はレイノルズ応力を表す項、 $S$  は生成消滅項、 $\mathbf{F}$  は渦フラックスを表す項である。すなわち、(中辺はデカルト座標の場合)

$$\nabla \cdot \mathbf{F}[\Theta] = \frac{\partial \overline{u'\Theta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'\Theta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'\Theta'}}{\partial z} = \nabla \cdot \overline{\mathbf{v}'\Theta'}, \quad (\text{C.25})$$

である。

ここで、渦フラックス  $\mathbf{F}$  を、そのトレーサー (以下では温位  $\Theta$  の例として進める) の等値線に直交する成分  $\mathbf{F}_\perp$  と平行な成分  $\mathbf{F}_\parallel$  に分ける。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_\parallel = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F})\mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \times \mathbf{n}. \quad (\text{C.26})$$

ここで  $\mathbf{n} = \nabla\bar{\Theta}/|\nabla\bar{\Theta}|$  であり, すなわち

$$\mathbf{F}_{\perp} = \frac{\mathbf{F} \cdot \nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} \nabla\bar{\Theta}, \quad (\text{C.27})$$

$$\mathbf{F}_{\parallel} = \frac{\nabla\bar{\Theta} \times \mathbf{F}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} \times \nabla\bar{\Theta}, \quad (\text{C.28})$$

である.  $\mathbf{F}_{\parallel}$  はスキューフラックス (skew flux) と呼ばれている. ベクトル恒等式  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla\phi) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \nabla\phi$  を用いることで,  $\mathbf{F}_{\parallel}$  の発散は,

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_{\parallel} = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla\bar{\Theta} \times \mathbf{F}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} \times \nabla\bar{\Theta} \right) = \left( \nabla \times \frac{\nabla\bar{\Theta} \times \mathbf{F}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} \right) \cdot \nabla\bar{\Theta} \equiv \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla\bar{\Theta}, \quad (\text{C.29})$$

と書ける. さらに  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$  より  $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla\bar{\Theta} = \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{v}}\bar{\Theta})$  であり, つまり, スキューフラックスは  $\bar{\Theta}$  を再分配するだけで, これは  $\bar{\Theta}$  の移流のように扱える.

(C.23) に (C.21) を代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}^* \cdot \nabla\bar{\Theta} &= S - \nabla \cdot \mathbf{F} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla\bar{\Theta}, \\ &= S - \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot (\bar{\Theta} \nabla \times \boldsymbol{\psi}), \\ &= S - \nabla \cdot [\mathbf{F} - \bar{\Theta}(\nabla \times \boldsymbol{\psi})], \\ &= S - \nabla \cdot (\mathbf{F} + \nabla\bar{\Theta} \times \boldsymbol{\psi}), \\ &\equiv S - \nabla \cdot \mathbf{F}^*. \end{aligned}$$

ここで  $\mathbf{F}^*$  は残差フラックスである.

$$\mathbf{F}^* \equiv \mathbf{F} + \nabla\bar{\Theta} \times \boldsymbol{\psi}. \quad (\text{C.30})$$

上式から,  $\mathbf{F}^*$  と  $\mathbf{F}$  とは, トレーサーの等値線に直交する成分は同じであることが分かる.

$$\mathbf{F}^* \cdot \frac{\nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|} = \mathbf{F} \cdot \frac{\nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|}. \quad (\text{C.31})$$

しかし, 等値線に平行な成分は異なる. そこで

$$\mathbf{F}_{\parallel}^* = 0, \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{F}_{\perp}, \quad (\text{C.32})$$

となるように,  $\boldsymbol{\psi}$  を定める. すなわち

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{\nabla\bar{\Theta} \times \mathbf{F}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2}, \quad (\text{C.33})$$

とする。このとき

$$\nabla\bar{\Theta} \times \boldsymbol{\psi} = \nabla\bar{\Theta} \times \frac{\nabla\bar{\Theta} \times \mathbf{F}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} = -\mathbf{F}_{\parallel}, \quad (\text{C.34})$$

である。以上のとき、まとめると

$$\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}^* \cdot \nabla\bar{\Theta} = S - \nabla \cdot \mathbf{F}^*, \quad (\text{C.35})$$

$$\bar{\mathbf{v}}^* = \bar{\mathbf{v}} - \nabla \times \frac{\mathbf{F} \times \nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2}, \quad (\text{C.36})$$

$$\mathbf{F}^* = \frac{\mathbf{F} \cdot \nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} \nabla\bar{\Theta}, \quad (\text{C.37})$$

である。ただし、この方程式内で  $\Theta$  は他のトレーサーでも構わないことに注意したい。

## C.2.2 変形オイラー平均方程式系の導出

前節は任意の平均に対する議論であったが、ここでは、トレーサーを  $\Theta$ 、平均を東西平にして、TEM 方程式系を求めることにする。

平均は東西平均だから

$$\mathbf{F}[\Theta] = \overline{\mathbf{v}'\Theta} = \overline{v'\Theta'}\mathbf{j} + \overline{w'\Theta'}\mathbf{k}, \quad (\text{C.38})$$

なので、( $\phi, z$  の下付き文字は微分を表す)

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F} \times \nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} &= \frac{v'\Theta' \bar{\Theta}_z - \overline{w'\Theta'} a^{-1} \bar{\Theta}_\phi}{a^{-2} \bar{\Theta}_\phi^2 + \bar{\Theta}_z^2} \mathbf{i}, \\ &\approx \frac{\overline{v'\Theta'}}{\bar{\Theta}_z} \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

2 行目への近似は  $a^{-2} \bar{\Theta}_\phi^2 \ll \bar{\Theta}_z^2$ ，および鉛直渦  $\Theta$  フラックスの無視によるものである。

(C.36), (C.39) より

$$\bar{\mathbf{v}}^* = \bar{\mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{v'\Theta'}}{\bar{\Theta}_z} \right), \quad (\text{C.40})$$

$$\bar{\mathbf{w}}^* = \bar{\mathbf{w}} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\overline{v'\Theta'}}{\bar{\Theta}_z} \cos \phi \right). \quad (\text{C.41})$$



また,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^*[\Theta] &= \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi + \overline{w'\Theta'}\overline{\Theta}_z}{a^{-2}\overline{\Theta}_\phi^2 + \overline{\Theta}_z^2} (a^{-1}\overline{\Theta}_\phi\mathbf{j} + \overline{\Theta}_z\mathbf{k}), \\ &\approx \left( \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi}{\overline{\Theta}_z^2} + \frac{\overline{w'\Theta'}}{\overline{\Theta}_z} \right) (a^{-1}\overline{\Theta}_\phi\mathbf{j} + \overline{\Theta}_z\mathbf{k}),\end{aligned}\quad (\text{C.42})$$

なので,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F}^* &\approx \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left( \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi}{\overline{\Theta}_z^2} + \frac{\overline{w'\Theta'}}{\overline{\Theta}_z} \right) a^{-1}\overline{\Theta}_\phi \cos \phi \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi}{\overline{\Theta}_z^2} + \frac{\overline{w'\Theta'}}{\overline{\Theta}_z} \right) \overline{\Theta}_z \right], \\ &\approx \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi}{\overline{\Theta}_z} + \overline{w'\Theta'} \right),\end{aligned}\quad (\text{C.43})$$

となる. 2行目への近似は  $a^{-2} \ll H^{-2}$  によるものである.

(C.35), (C.43) から

$$\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}^*} \cdot \nabla \overline{\Theta} = S - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi}{\overline{\Theta}_z} + \overline{w'\Theta'} \right) \quad (\text{C.44})$$

となり, TEM 方程式系の熱力学方程式が導けたことになる ((C.20) と同じ). 後は (C.40), (C.41) を用いて, オイラー平均方程式系を変形すれば, TEM 方程式系 (C.11)-(C.20) が得られる.

### C.3 一般化した変形オイラー平均方程式系とエリアッセン・パームフラックス

前節で TEM 方程式系を導くにあたって, 以下の3つの仮定に基づく近似が行われている.

- (1) 等温位面線は水平に近い:  $a^{-1}\overline{\Theta}_\phi \ll \overline{\Theta}_z$ ,
- (2) 鉛直渦  $\Theta$  フラックスは無視できる:  $\overline{w'\Theta'} \ll \overline{v'\Theta'}$ ,
- (3) 大気のアスペクト比 (縦横比) は小さい:  $a^{-1} \ll H^{-1}$ .

すなわち, 従来の TEM 方程式系および EP フラックスは上記の仮定が破れるときには不適切だということである (本研究の熱的境界条件が仮定 (1) を破る顕著な例).

そこで, 上の仮定による近似をせずに, 一般化した TEM 方程式系および EP フラックスを導出すると以下の通りになる.

まず,

$$\frac{\mathbf{F} \times \nabla \bar{\Theta}}{|\nabla \bar{\Theta}|^2} = \frac{v' \bar{\Theta}' \bar{\Theta}_z - w' \bar{\Theta}' a^{-1} \bar{\Theta}_\phi}{a^{-2} \bar{\Theta}_\phi^2 + \bar{\Theta}_z^2} \mathbf{i} \equiv \psi \mathbf{i}, \quad (\text{C.45})$$

とおく. (符号に注意  $\boldsymbol{\psi} = -\psi \mathbf{i}$ )

ゆえに

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (\text{C.46})$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\psi \cos \phi), \quad (\text{C.47})$$

であり,

東西運動方程式は

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \bar{v}^* \cos \phi) + \frac{\partial (\bar{u} \bar{w}^*)}{\partial z} - \left( f + \frac{\bar{u} \tan \phi}{a} \right) \bar{v}^* - \bar{X} = \frac{1}{a \cos \phi} \nabla \cdot \mathbf{F}_u, \quad (\text{C.48})$$

ただし

$$F_u^\phi = a \cos \phi \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \psi - \bar{u}' v' \right), \quad (\text{C.49})$$

$$F_u^z = a \cos \phi \left( \left[ f - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \cos \phi) \right] \psi - \overline{u' w'} \right), \quad (\text{C.50})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_u = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_u^\phi \cos \phi) + \frac{\partial F_u^z}{\partial z}. \quad (\text{C.51})$$

熱力学方程式は

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}^* \cdot \nabla \bar{\Theta} = S - \nabla \cdot \mathbf{F}_\Theta, \quad (\text{C.52})$$

ただし

$$F_\Theta^\phi = \left( \frac{v' \bar{\Theta}' a^{-1} \bar{\Theta}_\phi + w' \bar{\Theta}' \bar{\Theta}_z}{a^{-2} \bar{\Theta}_\phi^2 + \bar{\Theta}_z^2} \right) a^{-1} \bar{\Theta}_\phi, \quad (\text{C.53})$$

$$F_\Theta^z = \left( \frac{v' \bar{\Theta}' a^{-1} \bar{\Theta}_\phi + w' \bar{\Theta}' \bar{\Theta}_z}{a^{-2} \bar{\Theta}_\phi^2 + \bar{\Theta}_z^2} \right) \bar{\Theta}_z, \quad (\text{C.54})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_\Theta = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\Theta^\phi \cos \phi) + \frac{\partial F_\Theta^z}{\partial z}. \quad (\text{C.55})$$

その他の方程式は通常の TEM 方程式系と同様である.

本研究では3次元解の EP フラックス解析には上記の一般化された EP フラックスを用いている.

# 付録 D

## 図集

本研究で得られた数値解を示す.

- 図 D.1-D.9: 2次元解の東西風速場と子午面流線関数.
- 図 D.10-D.18: 2次元解の温位場.
- 図 D.19: 3次元解の準定常状態の時間平均東西平均温位場.

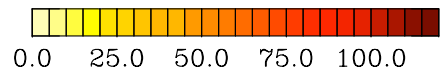
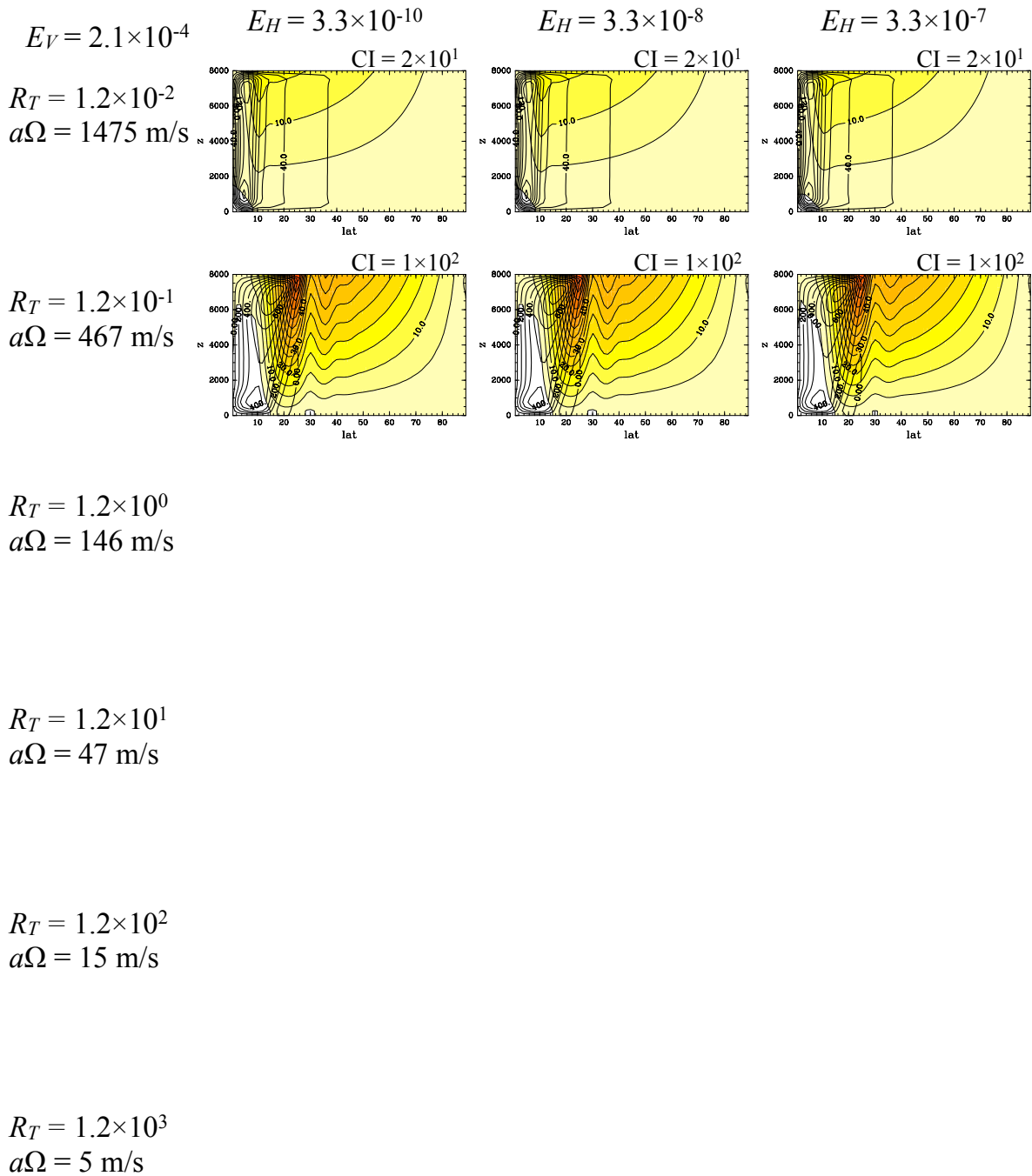


図 D.1 定常状態の東西風 [m/s] (色調) と子午面流線関数 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] (等値線) 等値線間隔 (contour interval, CI) は各パネル上部に表示. パラメータの値はそれぞれ図中に示した通り. パネルのない箇所は定常解が得られなかった場合である.

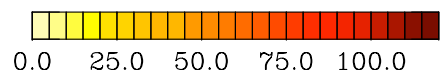
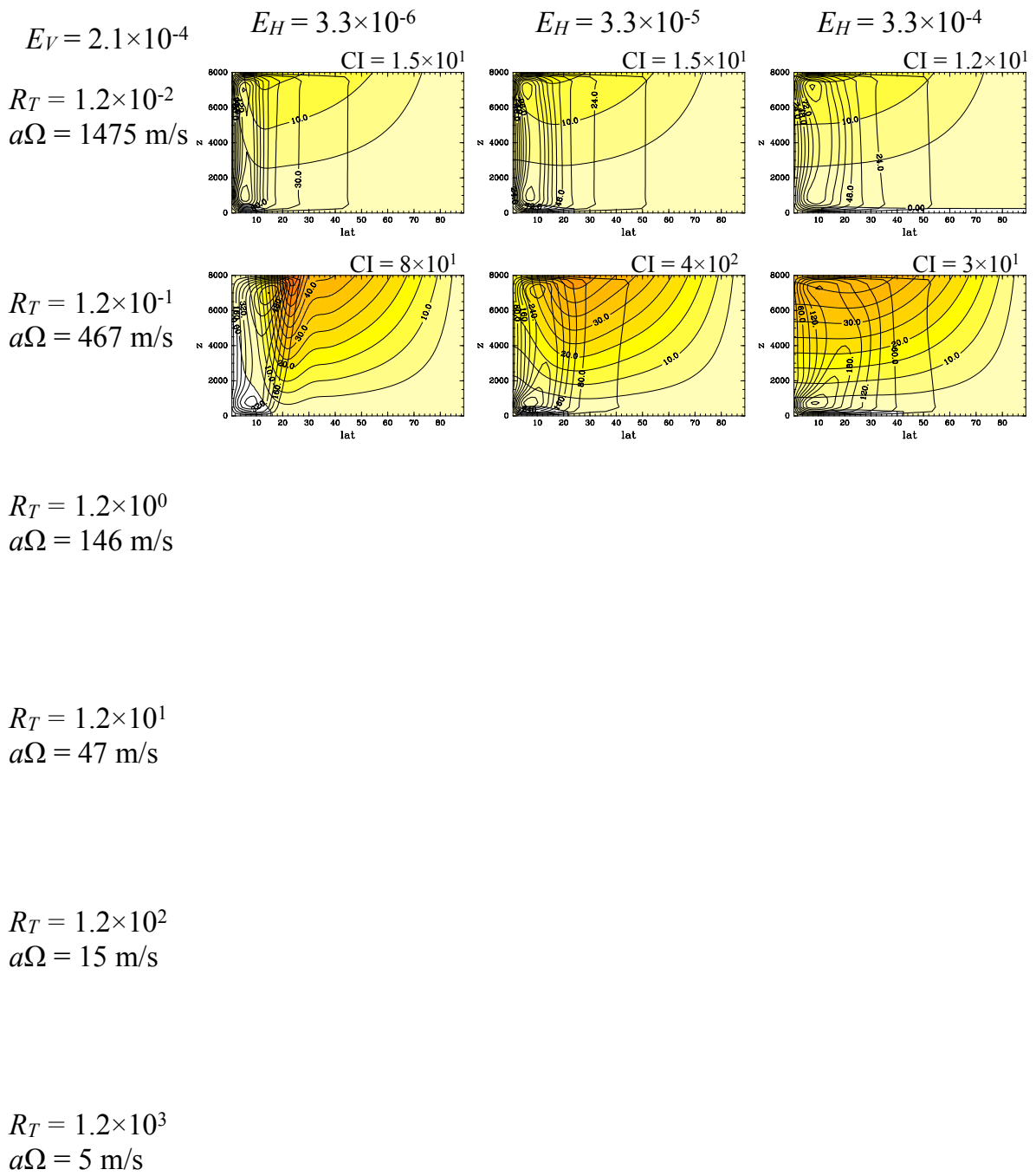


図 D.2 図 D.1 に同じ.

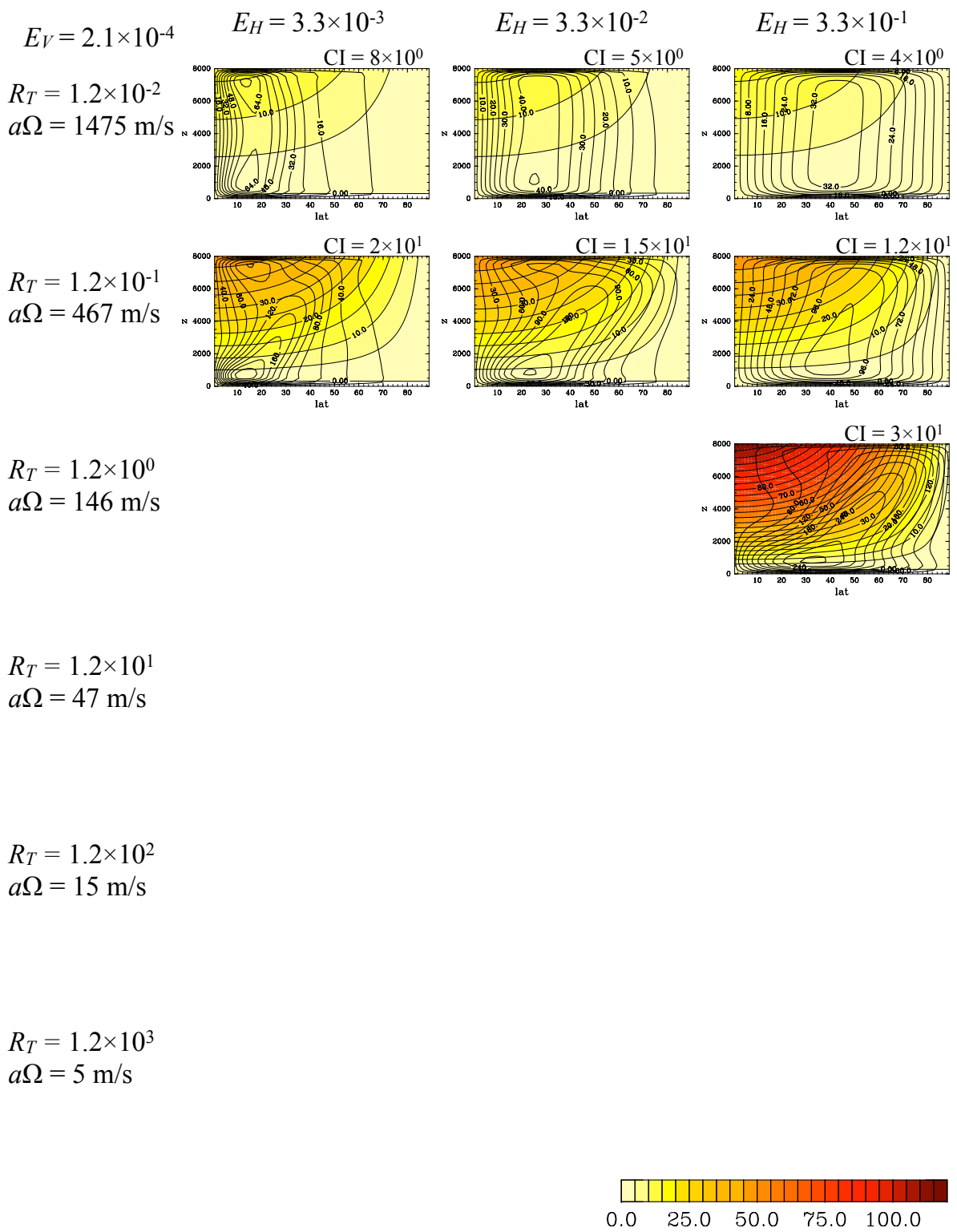


図 D.3 図 D.1 に同じ.

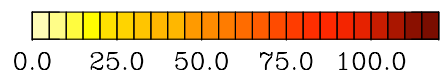
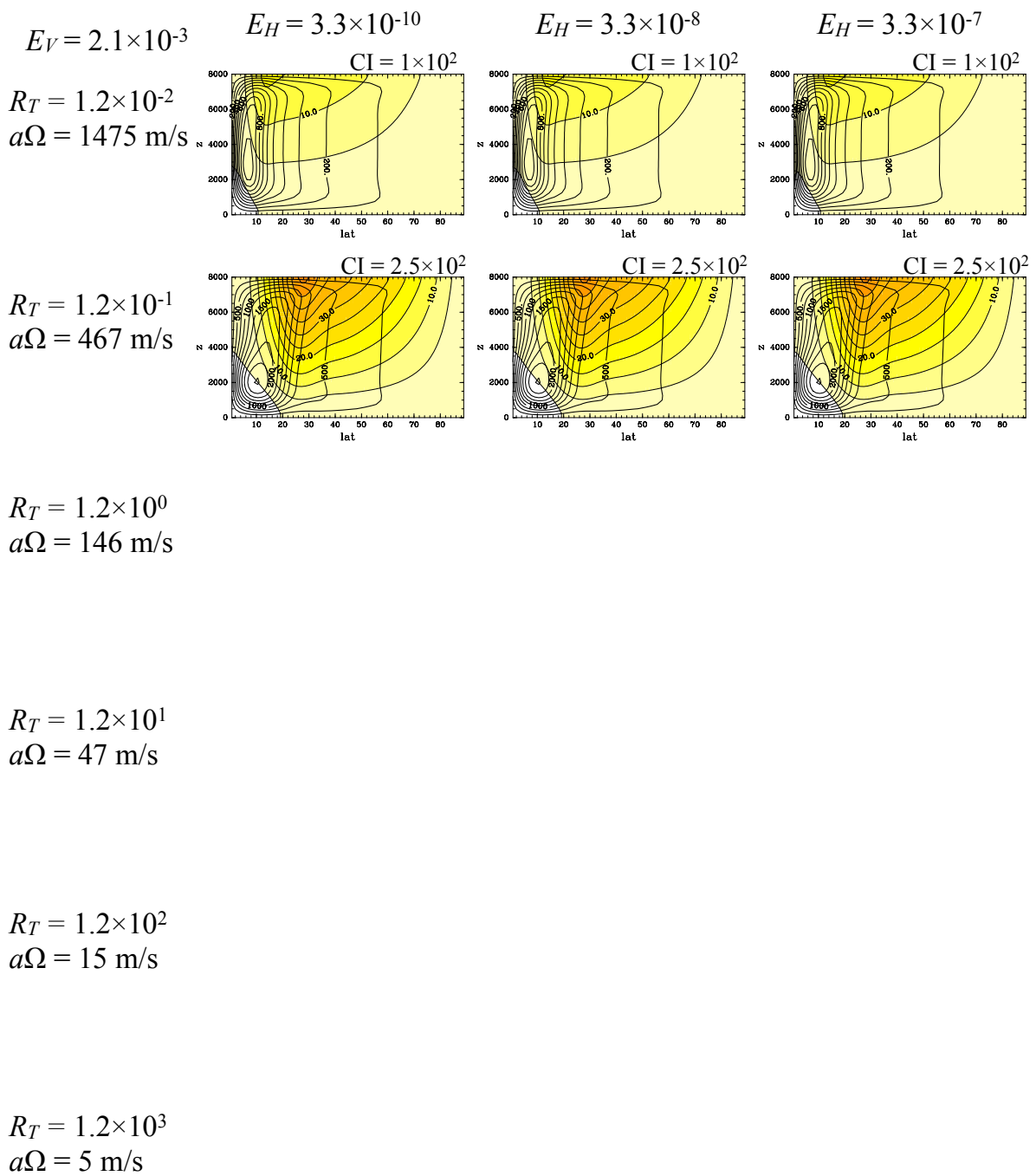


図 D.4 図 D.1 に同じ.

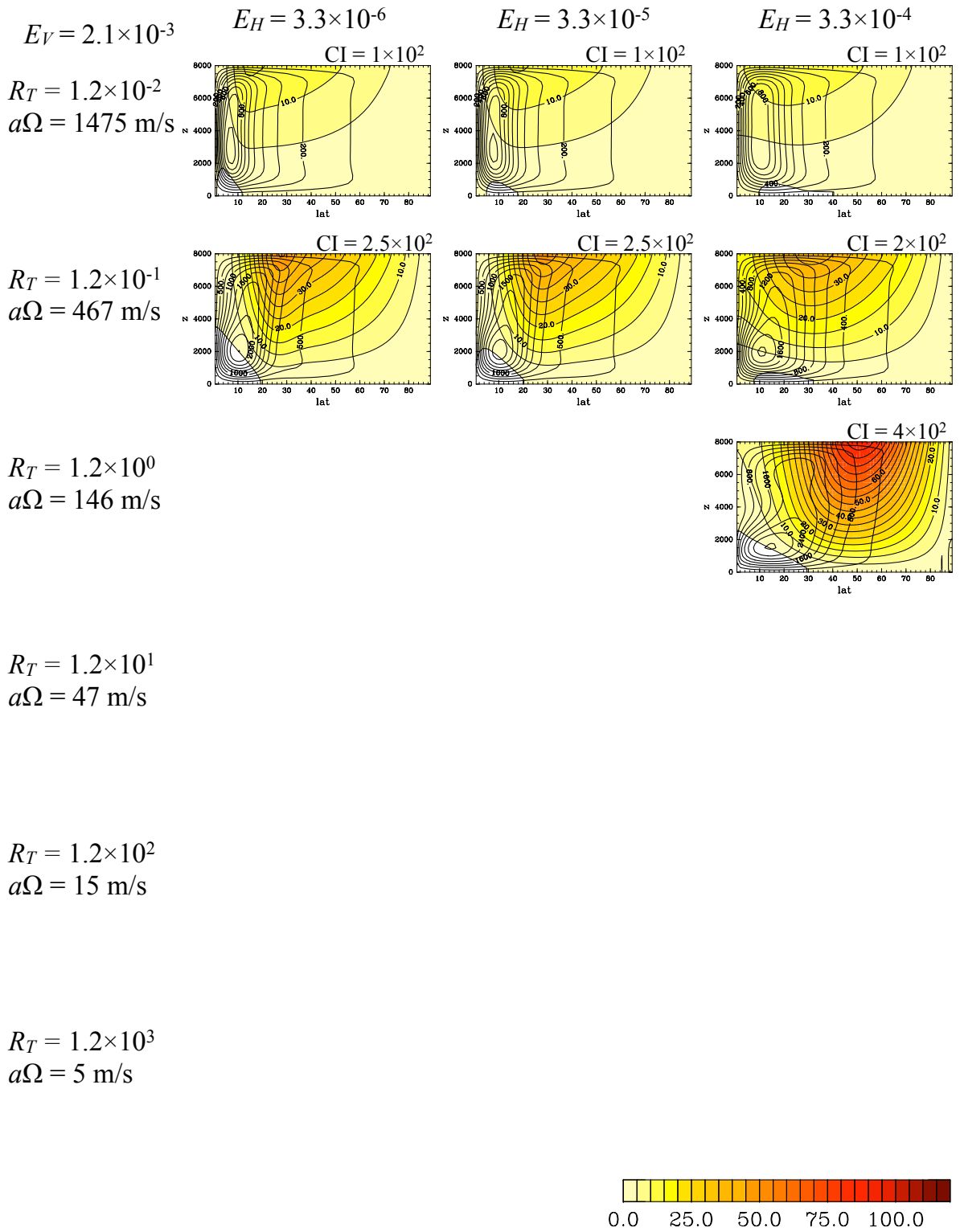


図 D.5 図 D.1 に同じ.



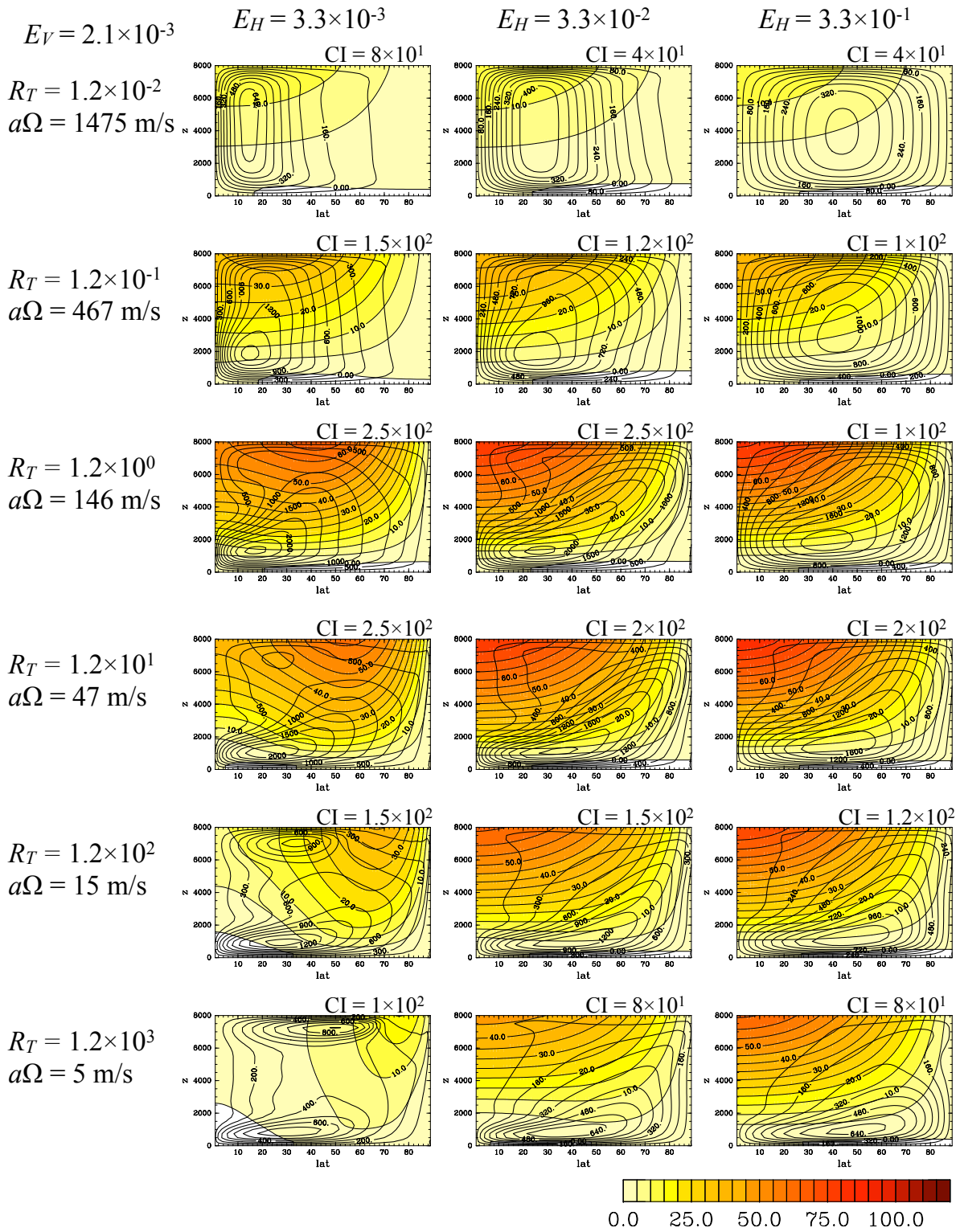


図 D.6 図 D.1 に同じ.

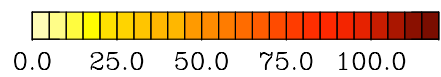
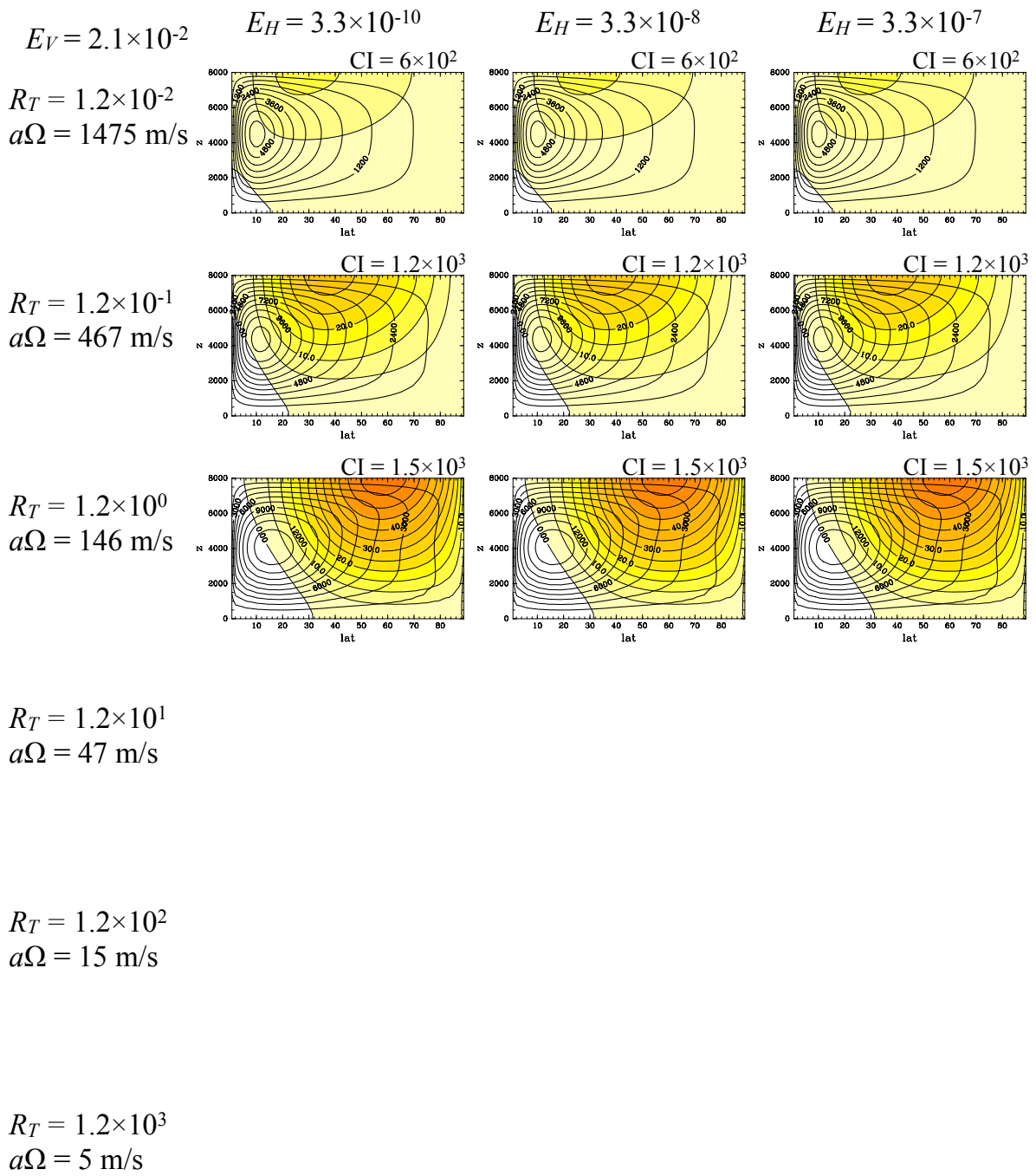


図 D.7 図 D.1 に同じ.

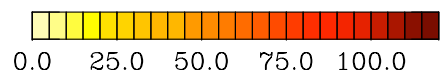
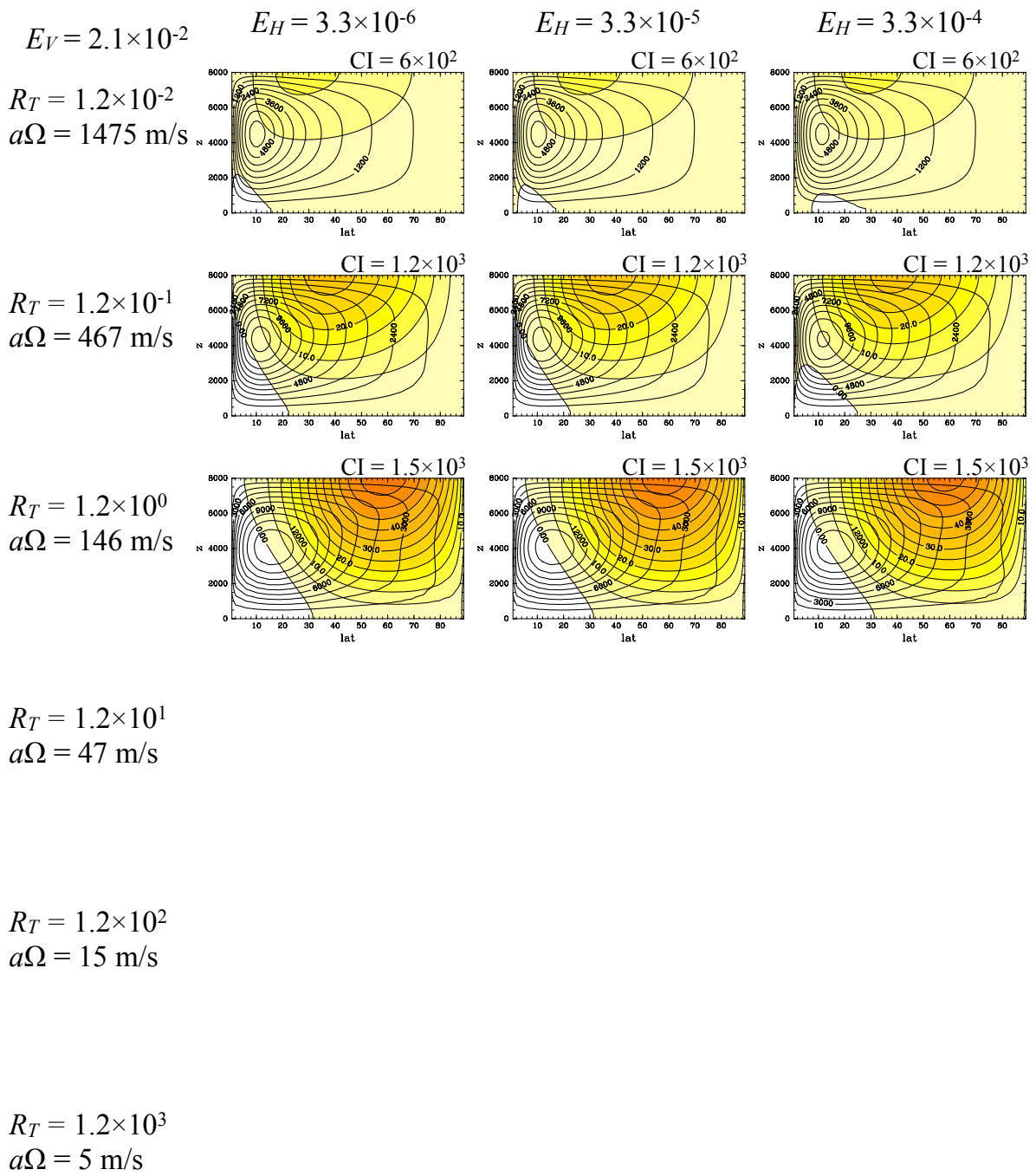


図 D.8 図 D.1 に同じ.

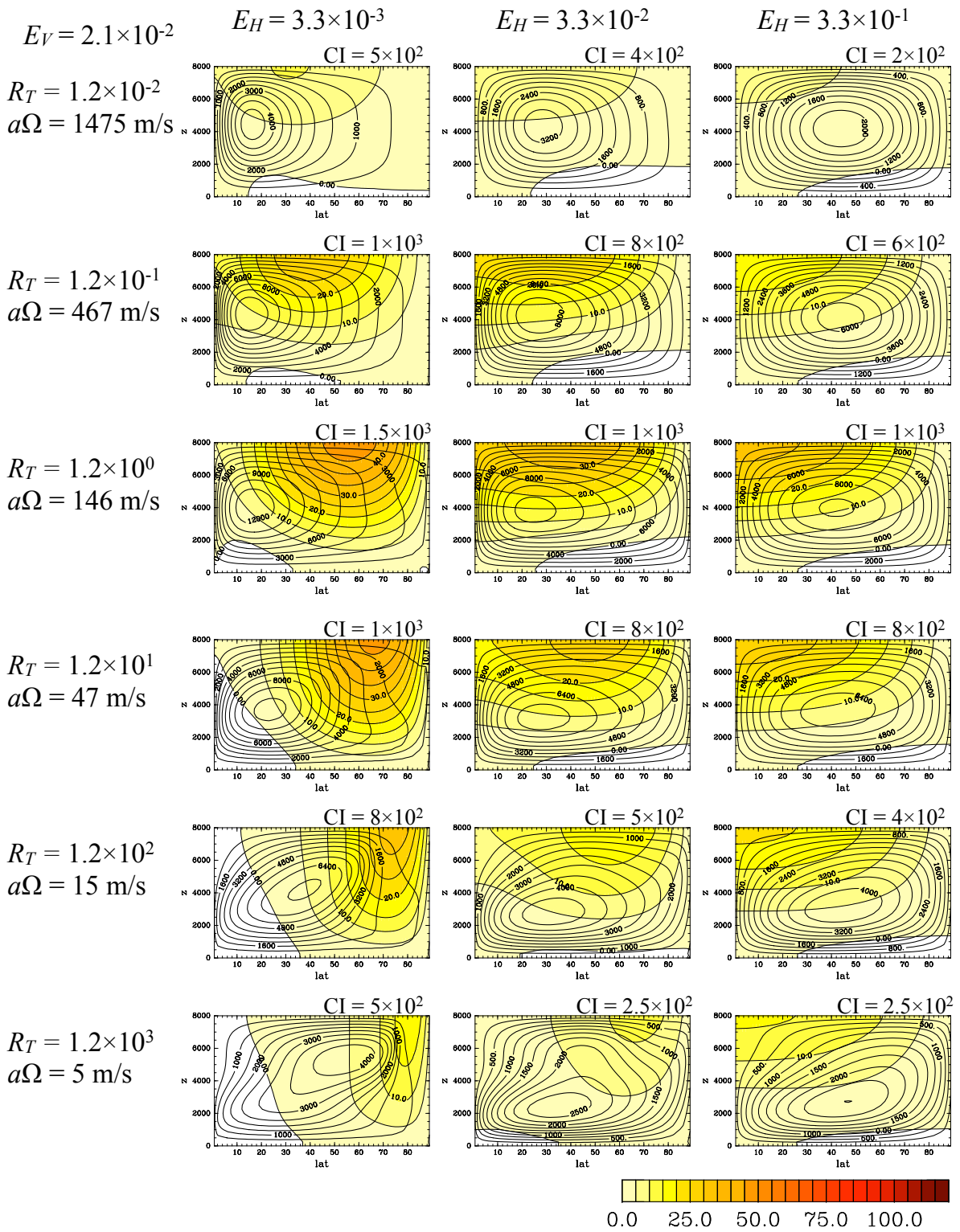


図 D.9 図 D.1 に同じ.

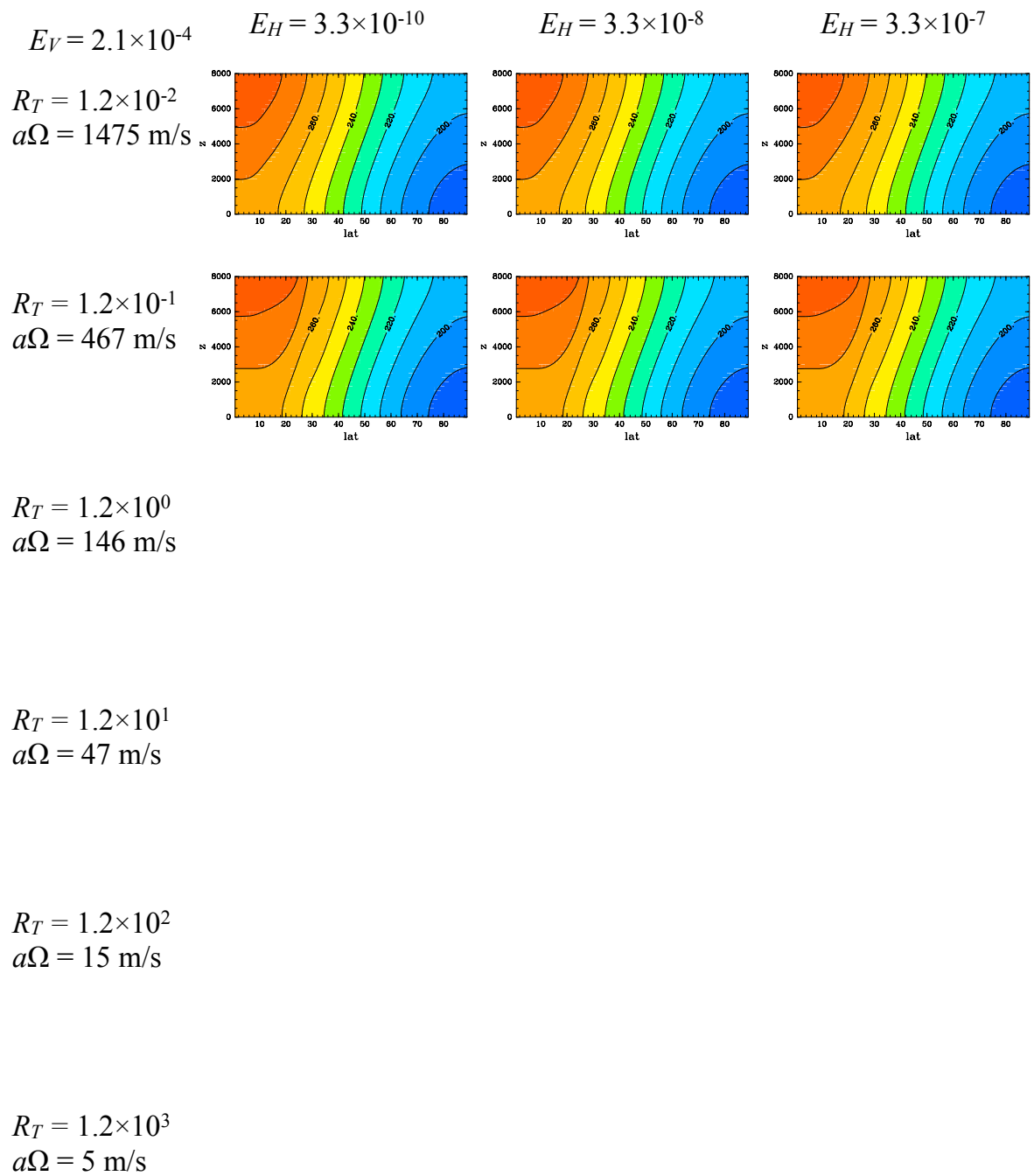


図 D.10 定常状態での温位場 [K]. 等値線間隔は 10. パラメータの値はそれぞれ図中に示した通り. パネルのない箇所は定常解が得られなかった場合である.

$$E_V = 2.1 \times 10^{-4}$$

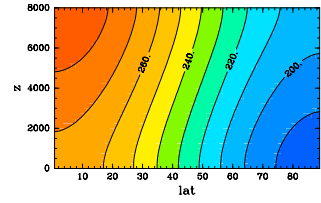
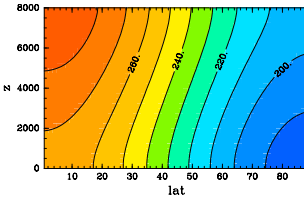
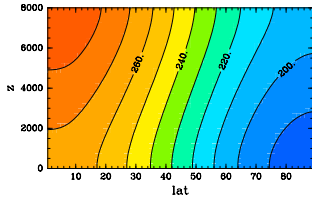
$$E_H = 3.3 \times 10^{-6}$$

$$E_H = 3.3 \times 10^{-5}$$

$$E_H = 3.3 \times 10^{-4}$$

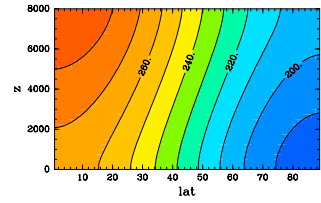
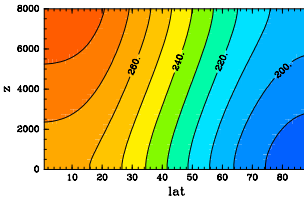
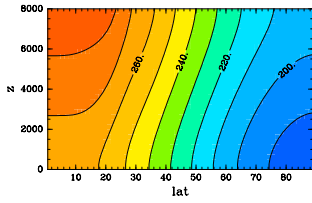
$$R_T = 1.2 \times 10^{-2}$$

$$a\Omega = 1475 \text{ m/s}$$



$$R_T = 1.2 \times 10^{-1}$$

$$a\Omega = 467 \text{ m/s}$$



$$R_T = 1.2 \times 10^0$$

$$a\Omega = 146 \text{ m/s}$$

$$R_T = 1.2 \times 10^1$$

$$a\Omega = 47 \text{ m/s}$$

$$R_T = 1.2 \times 10^2$$

$$a\Omega = 15 \text{ m/s}$$

$$R_T = 1.2 \times 10^3$$

$$a\Omega = 5 \text{ m/s}$$

図 D.11 図 D.10 に同じ.

$$E_V = 2.1 \times 10^{-4}$$

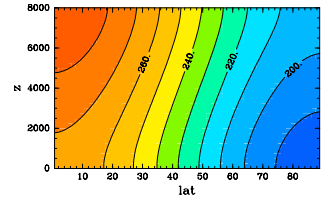
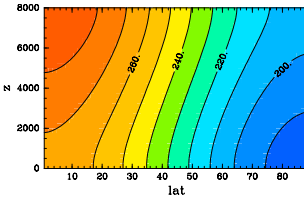
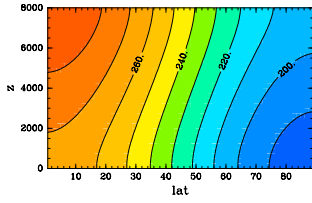
$$E_H = 3.3 \times 10^{-3}$$

$$E_H = 3.3 \times 10^{-2}$$

$$E_H = 3.3 \times 10^{-1}$$

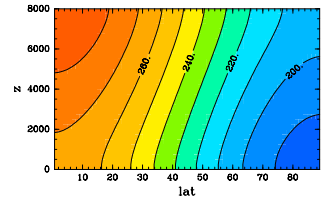
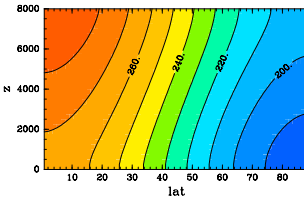
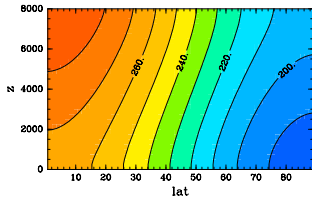
$$R_T = 1.2 \times 10^{-2}$$

$$a\Omega = 1475 \text{ m/s}$$



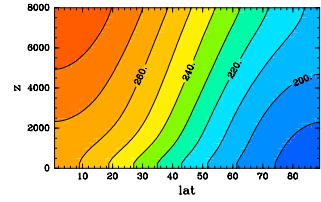
$$R_T = 1.2 \times 10^{-1}$$

$$a\Omega = 467 \text{ m/s}$$



$$R_T = 1.2 \times 10^0$$

$$a\Omega = 146 \text{ m/s}$$



$$R_T = 1.2 \times 10^1$$

$$a\Omega = 47 \text{ m/s}$$

$$R_T = 1.2 \times 10^2$$

$$a\Omega = 15 \text{ m/s}$$

$$R_T = 1.2 \times 10^3$$

$$a\Omega = 5 \text{ m/s}$$

図 D.12 図 D.10 に同じ.

$$E_V = 2.1 \times 10^{-3}$$

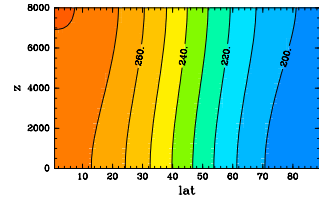
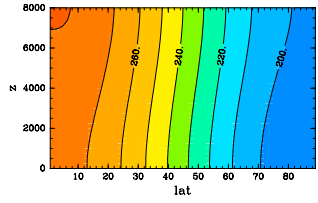
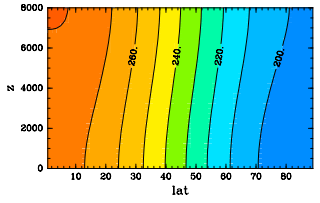
$$E_H = 3.3 \times 10^{-10}$$

$$E_H = 3.3 \times 10^{-8}$$

$$E_H = 3.3 \times 10^{-7}$$

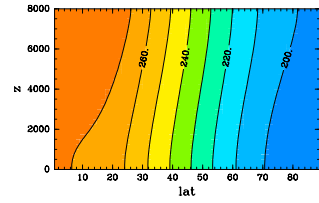
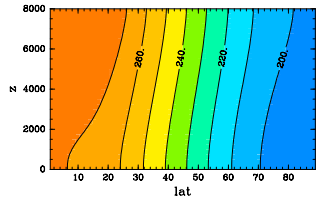
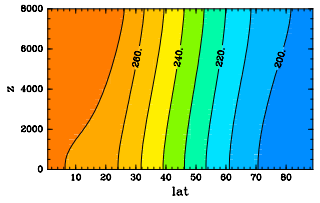
$$R_T = 1.2 \times 10^{-2}$$

$$a\Omega = 1475 \text{ m/s}$$



$$R_T = 1.2 \times 10^{-1}$$

$$a\Omega = 467 \text{ m/s}$$



$$R_T = 1.2 \times 10^0$$

$$a\Omega = 146 \text{ m/s}$$

$$R_T = 1.2 \times 10^1$$

$$a\Omega = 47 \text{ m/s}$$

$$R_T = 1.2 \times 10^2$$

$$a\Omega = 15 \text{ m/s}$$

$$R_T = 1.2 \times 10^3$$

$$a\Omega = 5 \text{ m/s}$$

図 D.13 図 D.10 に同じ.



$$E_V = 2.1 \times 10^{-3}$$

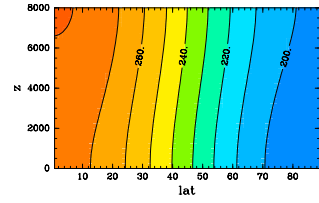
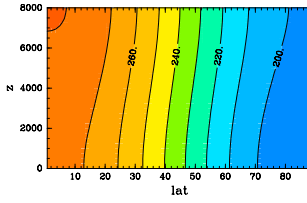
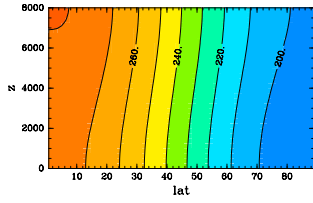
$$E_H = 3.3 \times 10^{-6}$$

$$E_H = 3.3 \times 10^{-5}$$

$$E_H = 3.3 \times 10^{-4}$$

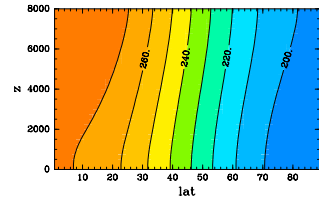
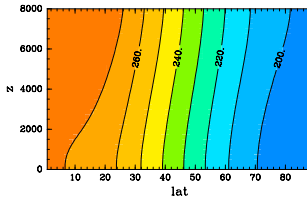
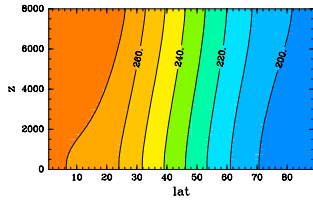
$$R_T = 1.2 \times 10^{-2}$$

$$a\Omega = 1475 \text{ m/s}$$



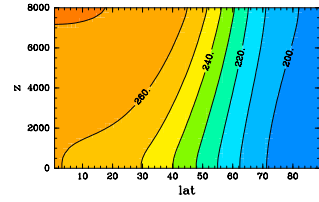
$$R_T = 1.2 \times 10^{-1}$$

$$a\Omega = 467 \text{ m/s}$$



$$R_T = 1.2 \times 10^0$$

$$a\Omega = 146 \text{ m/s}$$



$$R_T = 1.2 \times 10^1$$

$$a\Omega = 47 \text{ m/s}$$

$$R_T = 1.2 \times 10^2$$

$$a\Omega = 15 \text{ m/s}$$

$$R_T = 1.2 \times 10^3$$

$$a\Omega = 5 \text{ m/s}$$

図 D.14 図 D.10 に同じ.

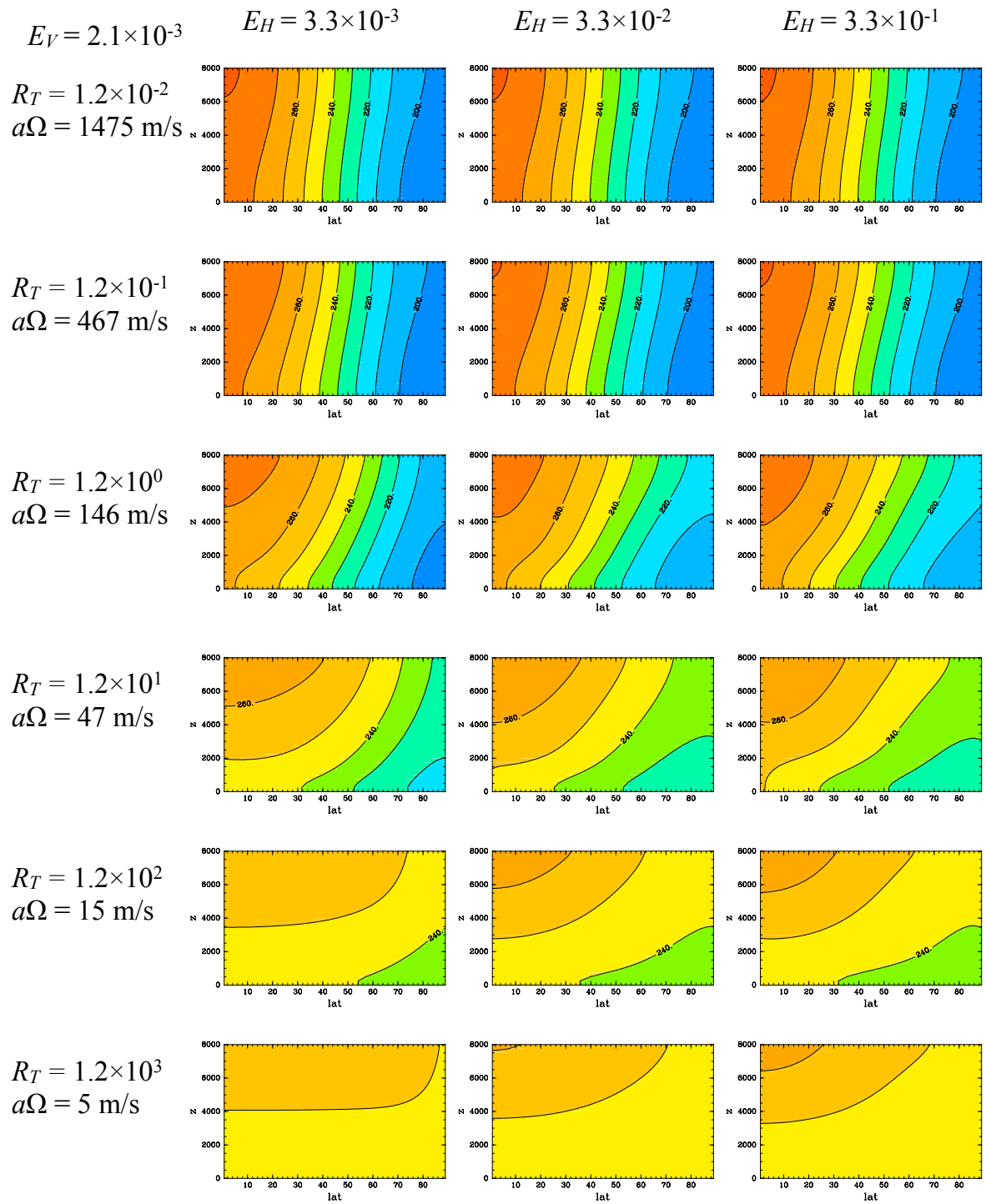


図 D.15 図 D.10 に同じ.

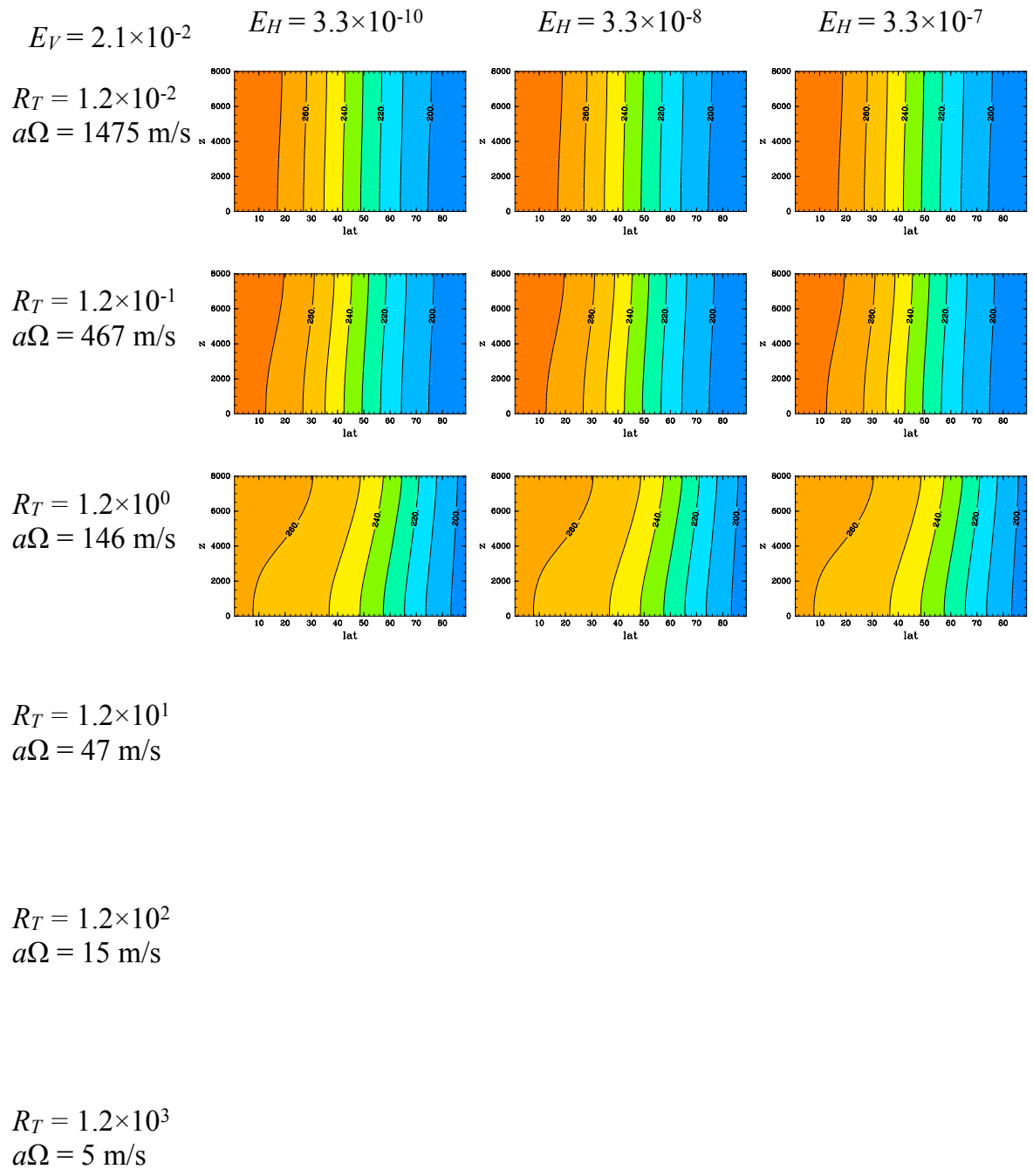


図 D.16 図 D.10 に同じ.

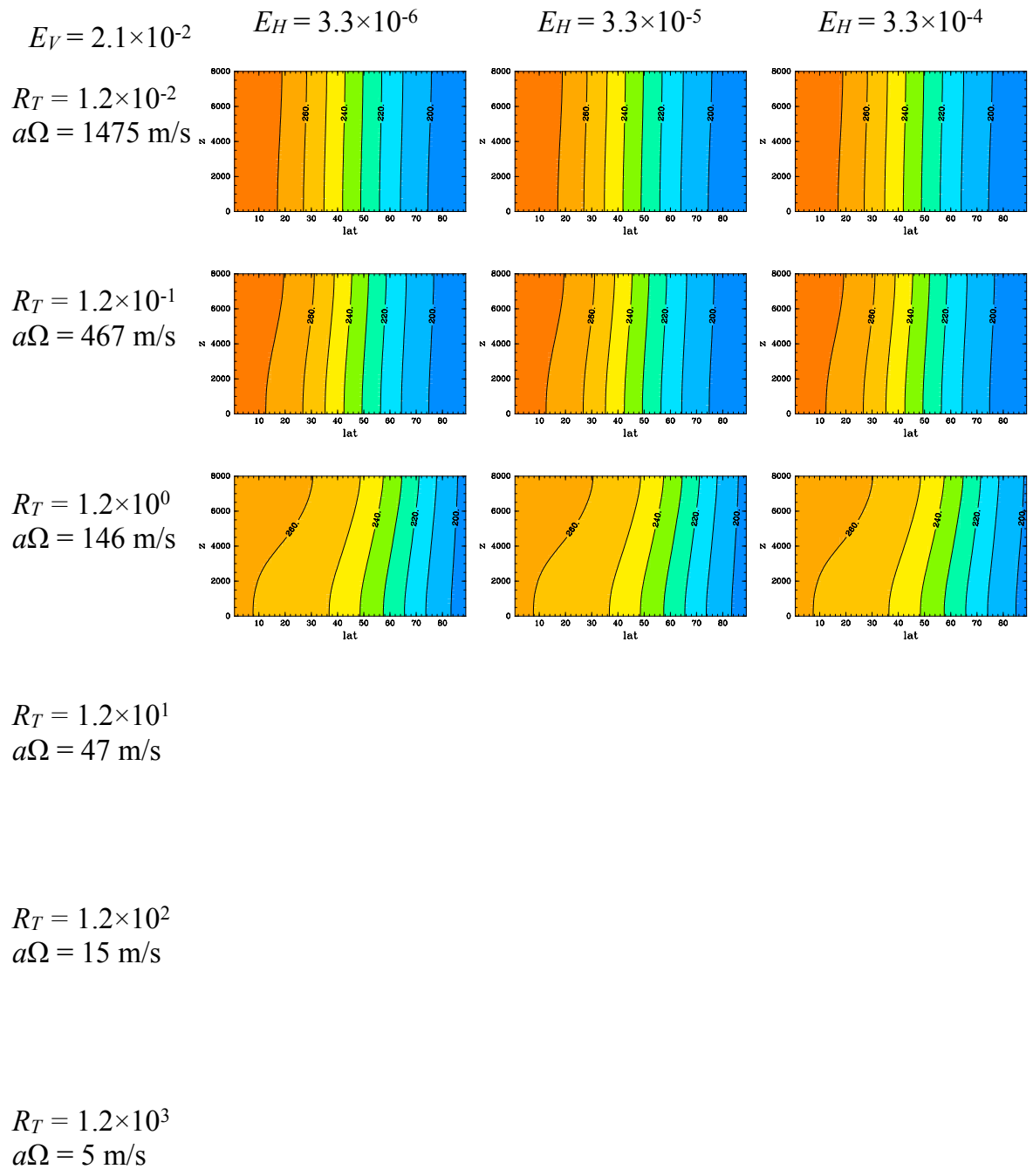


図 D.17 図 D.10 に同じ.

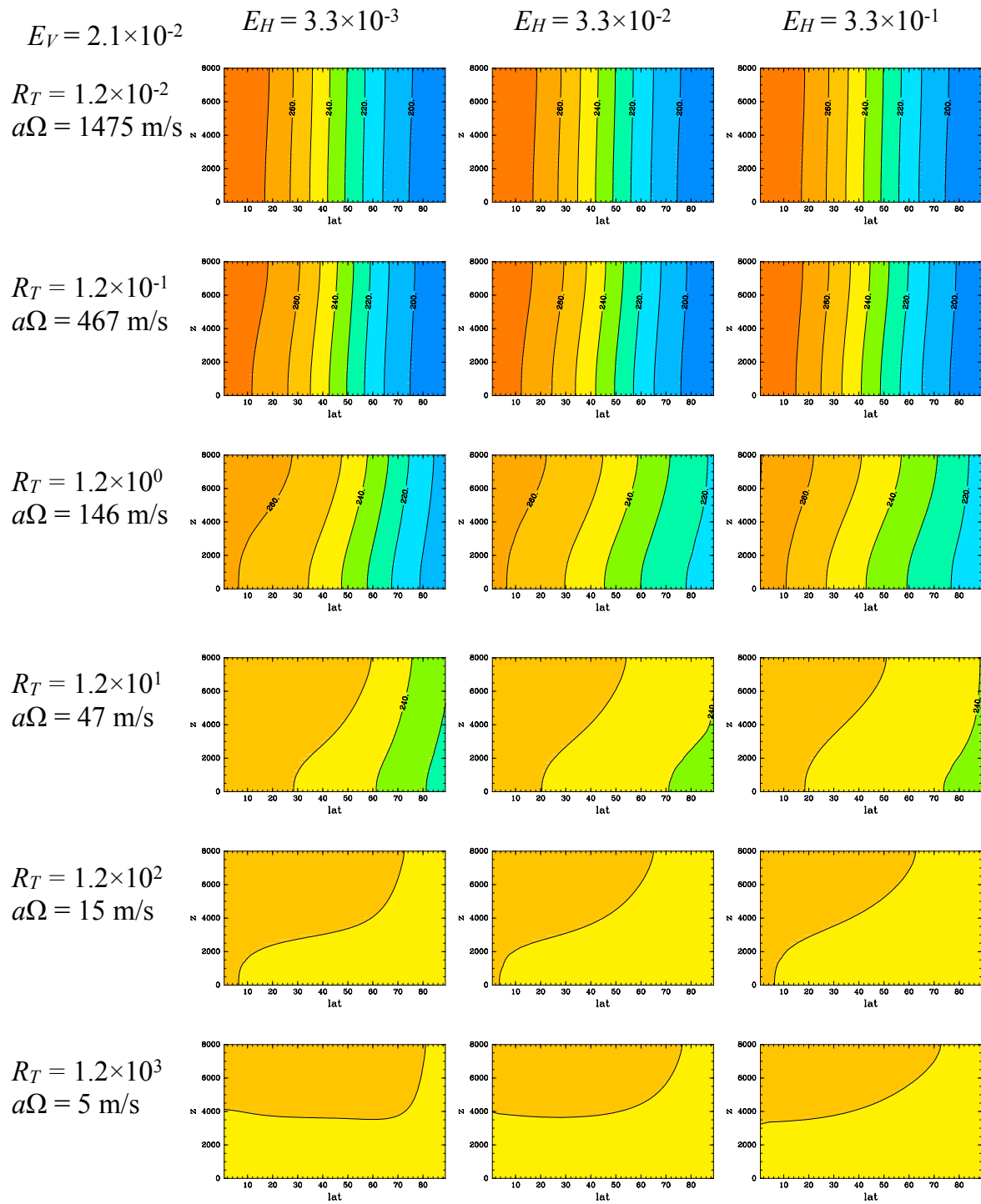


図 D.18 図 D.10 に同じ.

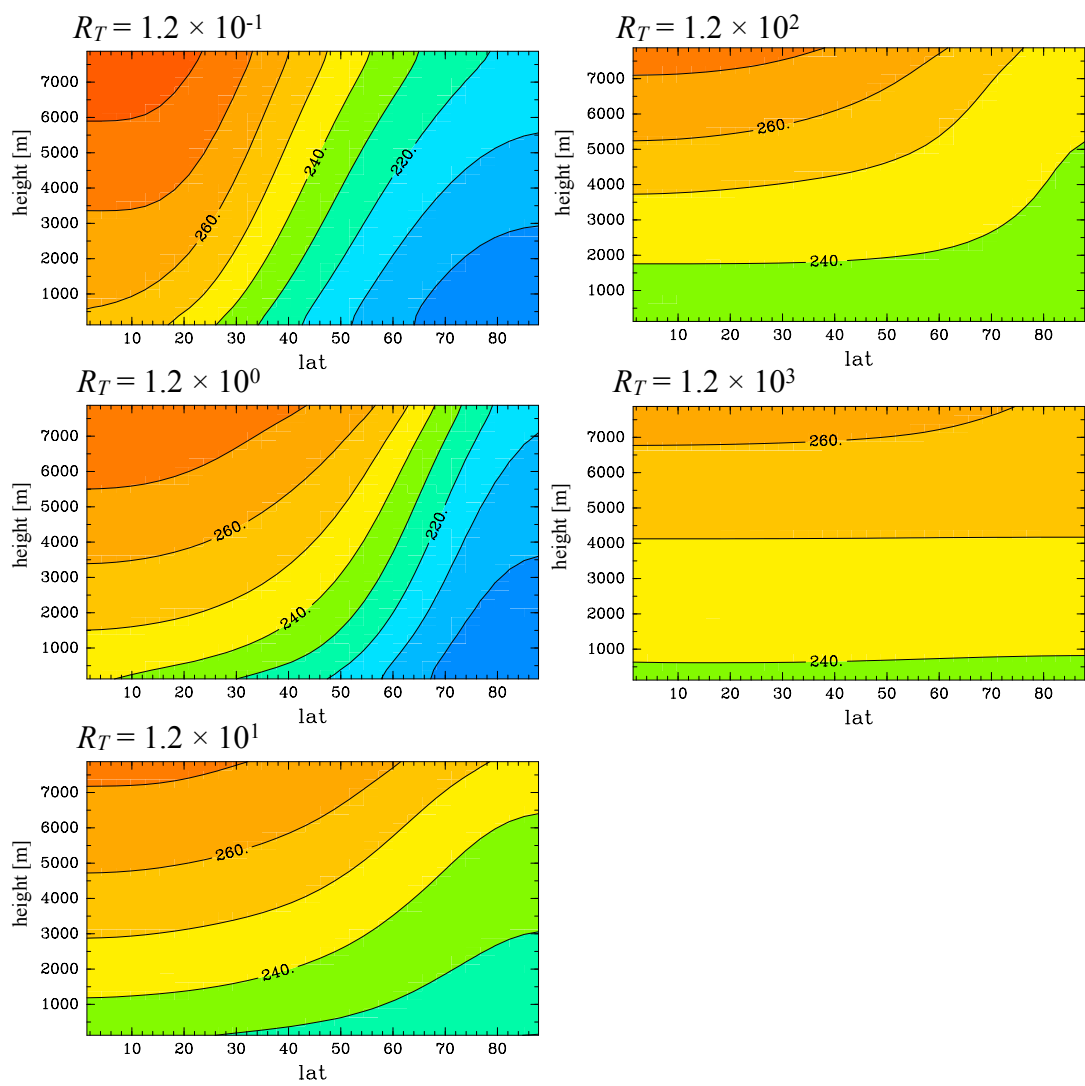


図 D.19 3次元解の準定常状態の時間平均東西平均温度場 [K]. 等値線間隔は10.  $R_T$ の値は各パネル上部に表示.

## 参考文献

- Anderson E, Bai Z, Bischof C, Blackford S, Demmel J, Dongarra J, Du Croz J, Greenbaum A, Hammarling S, McKenney A, Sorensen D. 1999. *LAPACK Users' Guide Third Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Andrews DG, Holton JM, Leovy CB. 1987. *Middle Atmosphere Dynamics*. Academic Press.
- Andrews DG, McIntyre ME. 1976. Planetary Waves in Horizontal and Vertical Shear: The Generalized Eliassen-Palm Relation and the Mean Zonal Acceleration. *J. Atmos. Sci.* **33**: 2031-2048.
- Bird MK, Allison M, Asmar SW, Atkinson DH, Avruch IM, Dutta-Roy R, Dzierma Y, Edenhofer P, Folkner WM, Gurvits LI, Johnston DV, Plettemeier D, Pogrebenko SV, Preston RA, Tyler GL. 2005. The vertical profile of winds on Titan. *Nature*. **438**: 800-802.
- Boyer C, Gurein P. 1969. Etude de la rotation rétrograde, en 4 jours, de la couche extérieure nuageuse de Vénus. *Icarus*. **11**: 338-355.
- Caballero R, Pierrehumbert RT, Mitchell JL. 2008. Axisymmetric, nearly inviscid circulations in non-condensing radiative-convective atmospheres. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **134**: 1269-1285.
- Chandrasekhar S. 1981. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover edition). Oxford University Press.
- Charney JG. 1973. Planetary fluid dynamics in *Dynamical Meteorology*. Edited by Morel P, Reidel, Dordrecht, Holland.
- Charney JG, Phillips NA. 1953. Numerical integration of the quasigeostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flows. *J. Meteor.* **10**: 71-99.
- Del Genio AD, Zhou W. 1996. Simulation of superrotation on slowly rotating planets: Sensitivity to rotation and initial conditions. *Icarus*. **120**: 332-343.
- Edmon Jr HJ, Hoskins BJ, McIntyre ME. 1980. Eliassen-Palm Cross Sections for the Troposphere. *J. Atmos. Sci.* **37**: 2600-2616.
- Eliassen A, Palm E. 1961. On the transfer of the energy stationary mountain waves. *Geophys. Publ.* **22**: 1-23.
- Fels SB, Lindzen RS. 1974. The interaction of thermally excited gravity waves with mean flows. *Geophys. Fluid Dyn.* **6**: 149-191.

- Ferrari R, Plumb RA. 2003. Residual circulation in the ocean. *Near-Boundary Processes and Their Parameterization: Proc. 'Aha Huliko'a Hawaiian Winter Workshop*: 219-228.
- Flasar FM, Allison M, Lunine JJ. 1997. Titan zonal wind model in *Huygens: Science, Payload and Mission, Proceedings of an ESA conference*. Edited by Wilson A. ESA Publications
- Gierasch PJ. 1975. Meridional circulation and the maintenance of the Venus atmospheric rotation. *J. Atmos. Sci.* **32**: 1038-1044.
- Hadley G. 1735. Concerning the cause of the general trade winds. *Philosophical Transactions of Royal Society of London.* **39**: 58-62.
- Halley E. 1686. An historical account of the trade winds, and monsoons, observable in the seas between and near the tropicks, with an attempt to assign the physical cause of the said winds. *Transactions of Royal Society of London.* **16**: 153-168.
- Held IM, Hou AY. 1980. Non-linear axially-symmetric circulations in a nearly inviscid atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **37**: 515-533.
- Held IM, Schneider T. 1999. The surface branch of the zonally averaged mass transport circulation in the troposphere. *J. Atmos. Sci.* **56**: 1688-1697.
- Held IM, Suarez MJ. 1994. A Proposal for the Intercomparison of the Dynamical Cores of Atmospheric General Circulation Models. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* **75**: 1825-1830.
- Hide R. 1969. Dynamics of the atmospheres of the major planets with an appendix on the viscous boundary layer at the rigid bounding surface of an electrically-conducting rotating fluid in the presence of a magnetic field. *J. Atmos. Sci.* **26**: 841-853.
- Hou AY. 1984. Axisymmetric circulations forced by heat and momentum sources: A simple model applicable to the Venus atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **41**: 3437-3455.
- Hou AY and Lindzen RS. 1992. The influence of concentrated heating on the Hadley circulation. *J. Atmos. Sci.* **49**: 1233-1241.
- ホートン JT. 1979. 大気物理学. みすず書房 (廣田勇, 会田勝 訳)
- Iga S, Matsuda Y. 1999. A mechanism of super-rotation in the Venus atmosphere: Meridional circulation and barotropic instability. *Theoretical and applied mechanics.* **48**: 379-383.
- 石岡圭一. 2004. スペクトル法による数値計算入門. 東京大学出版会.
- 石岡圭一. 2005. ispack-0.71. <http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/>. 地球流体 電脳倶楽部.
- James IN. 2002. Hadley circulation in *Encyclopedia of Atmospheric Sciences*. Edited by Holton JR, Curry JA, Pyle JA. Academic Press.
- Kalnay E et al. 1996. The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* **77**: 437-431.



- 笠原皓司. 1982. 微分方程式の基礎. 朝倉書店.
- Lindzen RS and Hou AY. 1988. Hadley circulations for zonally averaged heating centered off the equator. *J. Atmos. Sci.* **45**: 2416-2427.
- Lindzen RS. 1990. *Dynamics in Atmospheric Physics*. Cambridge University Press.
- Lebonnois S, Cressin A, Hourdin F, Eymet V, Fournier R, Dufresne JL. 2006. Super-rotation simulated with the new LMD Venus General Circulation Model. *European Planetary Science Congress 2006*.
- Lee C, Lewis SR, Read PL. 2005. A numerical model of the atmosphere of Venus. *Advances in Space Research*. **36**: 2142-2145.
- Lorenz EN. 1960. Energy and numerical weather prediction. *Tellus*. **12**: 364-373.
- Lorenz EN. 1967. *The Nature and Theory of the General Circulation of the Atmosphere*. World Meteorological Organization Monograph No. 218. TP 115.
- Matsuda Y. 1980. Dynamics of the four-day circulation in the Venus atmosphere. *J. Meteor. Soc. Japan*. **58**: 443-470.
- Matsuda Y. 1982. A further study of dynamics of the four-day circulation in the Venus atmosphere. *J. Meteor. Soc. Japan*. **60**: 245-254.
- 松田佳久. 1987. 金星大気の力学. 気象研究ノート. **155**: 61-80.
- 松田佳久. 2000. 惑星気象学. 東京大学出版会.
- 松田佳久, 高木征弘. 2005. 金星大気のスーパー・ローテーション. 天文月報. **98**: 14-21.
- 松田佳久, 余田成男. 1985. 気象とカタストロフィー 気象学における解の多重性. 気象研究ノート. **151**: 1-145.
- 小国力. 1997. Fortran 95, C & Java による新数値計算方法—数値計算とデータ解析—. サイエンス社.
- 小倉義光. 1997. メソ気象の基礎理論. 東京大学出版会.
- Persson A. 2006. Hadley's principle: Understanding and misunderstanding the trade winds. *History of Meteorology*. **3**: 17-42.
- Plumb RA, Ferrari R. 2005. Transformed Eulerian-mean theory. Part I: Nonquasi-geostrophic theory for eddies on a zonal-mean flow. *J. Phys. Oceanogr.* **35**: 165-174.
- Rew R, Davis G, Emmerson S, Davies H. 1997. NetCDF User's Guide for FORTRAN. <http://www.unidata.ucar.edu/software/netcdf/guide/>. Unidata Program Center.
- Rossow WB. 1983. A general circulation model of a Venus-like atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **40**: 273-302.
- 佐藤正樹. 1992. 軸対称モデルによる放射対流平衡: ハドレー循環の力学 (学位論文)
- Satoh M. 1994. Hadley circulations in radiative-convective equilibrium in an axially symmetric atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **51**: 1947-1968.
- Satoh M. 2004. *Atmospheric Circulation Dynamics and General Circulation Mod-*

- els.* Springer.
- Satoh M, Shiobara M, Takahashi M. 1995. Hadley circulations and their rôles in the global angular momentum budget in two- and three-dimensional models. *Tellus*. **47A**: 548-560.
- Schneider EK. 1977. Axially-symmetric steady-state models of basic state for instability and climate studies. II. Nonlinear calculations. *J. Atmos. Sci.* **34**: 280-296.
- Schneider EK. 1983. Martin great dust storms: Interpretive axially symmetric models. *Icarus*. **55**: 302-331.
- Schubert G, Whitehead JA. 1969. Moving flame experiment with liquid mercury: Possible implications for Venus atmosphere. *Science*. **163**: 71-72.
- Schubert G. 1983. General Circulation and the dynamical state of the Venus atmosphere *in Venus*. University of Arizona Press.
- Thompson R. 1970. Venus general circulation is a merry-go-round. *J. Atmos. Sci.* **27**: 1107-1116.
- 豊田英司, 石渡正樹, 森川靖大, 堀之内武, 小高正嗣, 竹広真一, 林祥介, 地球流体電脳倶楽部 Davis プロジェクト. 2006. gtool4 netCDF 規約. <http://www.gfd-dennou.org/library/gtool4/>. 地球流体電脳倶楽部.
- 塚原大輔, 堀之内武. 2005. NumRu:: GPhys:: EP Flux 数理ドキュメント. [http://www.gfd-dennou.org/library/ruby/products/gphys/tutorial/ep\\_flux/math-doc/document.pdf](http://www.gfd-dennou.org/library/ruby/products/gphys/tutorial/ep_flux/math-doc/document.pdf). 地球流体電脳倶楽部.
- Vallis GK. 2006. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- Williams GP. 2003. Jet sets. *J. Meteor. Soc. Japan*. **81**: 439-476.
- Wirth V. 2006. A unified perspective on the dynamics of axisymmetric hurricanes and monsoons. *J. Atmos. Sci.* **63**: 2529-2547.
- 山本博基. 2007. 軸対称モデルにおけるハドレー循環に関する研究、および温暖化研究からみたモデルの階層性に関するレビュー (卒業論文)
- Yamamoto M, Takahashi M. 2003. The fully developed superrotation simulated by a general circulation model of a Venus-like atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **60**: 561-574.
- Young RE, Pollack JB. 1977. A three-dimensional model of dynamical processes in the Venus atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **34**: 1315-1351.

## 参考論文

Yamamoto H, Ishioka K, Yoden S. 2009. Axisymmetric Steady Solutions in an Idealized Model of Atmospheric General Circulations: Hadley Circulation and Super-rotation. *Theoretical and Applied Mechanics Japan*. **57**: 147-158.



# Axisymmetric Steady Solutions in an Idealized Model of Atmospheric General Circulations: Hadley Circulation and Super-rotation

Hiroki YAMAMOTO\*, Keiichi ISHIOKA\* and Shigeo YODEN\*

*\*Graduate School of Science, Kyoto University, Kyoto*

Fundamental dynamics of two-dimensional atmospheric general circulations symmetric about the rotation axis of planets is investigated to obtain a wide perspective from the Held and Hou model of the Hadley circulation to the Venus-like super-rotation driven by the Gierasch mechanism. A parameter sweep experiment is performed to explore steady solutions of the axisymmetric primitive equations of the Boussinesq fluid on a rotating sphere. Sweep parameters are the external thermal Rossby number ( $R_T$ ), the horizontal Ekman number ( $E_H$ ), and the vertical Ekman number ( $E_V$ ). Two indices are introduced to make a dynamical analysis of the numerically obtained circulations: a measure of the intensity of super-rotation ( $S$ ) and a measure of rigid rotation ( $Rg$ ). The characteristics of steady solutions change largely in a certain range of  $E_H$  for given  $R_T$  and  $E_V$ . Approximate positions of this transition can be estimated theoretically as  $E_H \sim E_V S(R_T)$ , where  $S \sim R_T$  for  $R_T \leq 1$  and  $S \sim \sqrt{R_T}$  for  $R_T > 1$ .

## 1. INTRODUCTION

The Hadley circulation is an important part of the general circulation of the atmosphere. Schneider (1977)<sup>1)</sup> and Held and Hou (1980<sup>2)</sup>, HH80 hereafter) studied the Hadley circulation by using an idealized two-dimensional numerical model symmetric with respect to the rotation axis of the Earth with no horizontal eddy diffusion. HH80 explained the basic dynamics of the Hadley circulation with a few physical principles: (i) the polewards moving air conserves its axial angular momentum, whereas the zonal flow associated with the near-surface, equatorwards moving flow is frictionally retarded and is weak; (ii) the circulation is in thermal wind balance (Vallis, 2006<sup>3)</sup>). This is known as the Held and Hou (HH hereafter) model. After this theory, a lot of studies applying the HH model were carried out; see Lindzen (1990)<sup>4)</sup>, James (1994)<sup>5)</sup>, Satoh (1994)<sup>6)</sup>, Williams (2003)<sup>7)</sup> and their references.

Super-rotation, a state of an atmosphere rotating much faster than the planet, is one of the prominent phenomena observed in the Venus and the Titan, which is the largest moon of the Saturn. Gierasch (1975)<sup>8)</sup> studied the mechanism of the super-rotation assuming an axial symmetric circulation and an infinitely large horizontal eddy diffusion. The Gierasch mechanism was studied by Matsuda (1980<sup>9)</sup>, 1982<sup>10)</sup>, M80/82 hereafter) using a model of Boussinesq fluid with a finitely large horizontal eddy diffusion.

Actually, both HH80 and M80/82 used the same system: the primitive equations of Boussinesq fluid with a Newtonian heating/cooling to force the flow field, assuming a steady state, and axial and equatorial symmetries. The main differences between them are the values of the horizontal eddy diffusion coefficient ( $\nu_H$ ) and the angular velocity of the planet ( $\Omega$ ). In other words, this

system has the Hadley solution of HH type when  $\Omega$  is large (like the Earth) and  $\nu_H = 0$ ; on the other hand, when  $\Omega$  is small (like the Venus) and  $\nu_H$  is very large, the system has the super-rotation solution of Gierasch-Matsuda (GM hereafter) type: an atmosphere rotating much faster than the planet in nearly rigid rotation.

In the present study, we explore steady solutions from the HH type circulation to the GM type circulation by a parameter sweep experiment. Transition between two types of circulation and its parameter dependence are investigated by introducing a measure of the intensity of super-rotation and that of rigid rotation.

## 2. DESCRIPTIONS OF THE SYSTEM

### Governing equations

The governing equations used in this study are the primitive equations of Boussinesq fluid with a Newtonian heating/cooling, under the assumptions of a steady state ( $\partial/\partial t = 0$ , where  $t$  is time), axial symmetry ( $\partial/\partial \lambda = 0$ , where  $\lambda$  is longitude), and equatorial symmetry. The equations in spherical geometry are given by,

$$\frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi = \nu_H D_H(u) + \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \nu_H D_H(v) + \nu_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$\frac{v}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\frac{\Theta - \Theta_e}{\tau} + \kappa_V \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g\alpha\Theta, \quad (4)$$

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Here  $u, v, w$  are the zonal, meridional, and vertical components of the velocity,  $\Theta$  is the potential temperature, and  $\Phi \equiv p/\rho$ , where  $p$  is the pressure and  $\rho$  is the density. Independent variables  $\phi$  and  $z$  are the latitude and height, respectively. The constants  $a$  and  $\Omega$  are the radius and angular velocity of the planet,  $g$  is the gravitational acceleration,  $\tau$  is the time constant for Newtonian heating/cooling,  $\nu_H$  and  $\nu_V$  are the horizontal and vertical diffusion coefficients,  $\kappa_V$  is the vertical thermal diffusion coefficient, and  $\alpha$  is the thermal expansion coefficient.

The quantity  $\Theta_e$  in the Newtonian heating/cooling term in equation (3) is a potential temperature in radiative equilibrium which is given by the form

$$\frac{\Theta_e}{\Theta_0} = 1 - \frac{2}{3} \Delta_H P_2(\sin \phi) + \Delta_V \left( \frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right), \quad (6)$$

where  $\Theta_0$  is the global mean of  $\Theta_e$ ,  $\Delta_H$  and  $\Delta_V$  are the fractional change of potential temperature in radiative equilibrium from equator to pole and from the top to the bottom, respectively, and  $P_2$  is the second Legendre polynomial  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ . We assume the thermal expansion coefficient as  $\alpha = 1/\Theta_0$ .

Horizontal diffusion terms,  $D_H(u)$  and  $D_H(v)$ , are defined in the form to conserve angular mo-

mentum (Becker, 2001<sup>11</sup>), as follows:

$$D_H(u) = \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{u}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{2u}{a^2}, \quad (7)$$

$$D_H(v) = \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - \frac{v}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) \right] + \frac{2v}{a^2}. \quad (8)$$

A zero stress condition is imposed at the top boundary, at  $z = H$ , and the stress at the ground is taken to be proportional to the surface wind. Zero vertical heat flux is imposed at both top and bottom boundaries, so boundary conditions are

$$w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad z = H, \quad (9)$$

$$w = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \quad \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \quad \nu_V \frac{\partial v}{\partial z} = Cv \quad \text{at} \quad z = 0, \quad (10)$$

where  $C$  is a drag coefficient.

### Non-dimensionalization

To clarify the dependence of obtained solutions on the external parameters, we derive non-dimensional form of the governing equations. First, we write variables as,

$$u = Uu^*, \quad v = Vv^*, \quad w = Ww^*, \quad \Theta = \Theta_0 \Theta^*, \quad \text{and} \quad z = Hz^*, \quad (11)$$

where  $U, V, W, \Theta_0$ , and  $H$  are the scaling values, and the asterisk denotes non-dimensional variables. From the hydrostatic equation (4),  $\Phi$  can be scaled as

$$\Phi = gH\Phi^*, \quad (12)$$

and from the meridional derivative of (4),  $\partial\Phi/\partial\phi$  can be scaled as

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \beta\Delta_H gH \frac{\partial\Phi^*}{\partial\phi}, \quad (13)$$

where  $\beta \equiv (\partial\Theta/\partial\phi)/(\partial\Theta_e/\partial\phi)$  is the ratio between meridional gradient of potential temperature and that in the radiative equilibrium state. Substituting (11), (12), and (13) to the governing equations (1)-(5), the non-dimensional equations are obtained as follows (asterisks are omitted),

$$R_v v \frac{\partial u}{\partial \phi} + R_w w \frac{\partial u}{\partial z} - R_v u v \tan \phi - \frac{2}{\gamma} v \sin \phi = E_H D_H(u) + E_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (14)$$

$$R_v v \frac{\partial v}{\partial \phi} + R_w w \frac{\partial v}{\partial z} + R_v \gamma^2 u^2 \tan \phi + 2\gamma u \sin \phi = -\beta \frac{R_T}{R_v} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + E_H D_H(v) + E_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (15)$$

$$R_v v \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} + R_w w \frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\frac{1}{\epsilon} \left[ \Theta - 1 + \frac{2}{3} \Delta_H P_2(\sin \phi) - \Delta_V \left( z - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{E_V}{Pr_V} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Theta, \quad (17)$$

$$R_v \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) + R_w \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Here the non-dimensional numbers are

external thermal Rossby number:  $R_T \equiv \frac{gH\Delta_H}{a^2\Omega^2}$ ,

horizontal and vertical Ekman numbers:  $E_H \equiv \frac{\nu_H}{a^2\Omega}$  and  $E_V \equiv \frac{\nu_V}{H^2\Omega}$ ,

vertical Prandtl number:  $Pr_V \equiv \frac{\nu_V}{\kappa_V}$ ,

Rossby numbers scaled with meridional and vertical velocity:  $R_v \equiv \frac{V}{a\Omega}$  and  $R_w \equiv \frac{W}{H\Omega}$ ,

the ratio of zonal velocity to meridional velocity:  $\gamma \equiv \frac{U}{V}$ ,

and the ratio of the time constant for Newtonian heating/cooling to the period of the rotation:  $\epsilon \equiv \tau\Omega$ .

From (18), we can show  $R_v \sim R_w$  immediately. From the boundary condition (10), we obtain another non-dimensional number  $\zeta \equiv \nu_V/(C\delta z)$ , where  $\delta z$  is the height of the lowest layer.

These non-dimensional parameters consist of two groups depending on whether the value is determined externally in each experiment, or not. External parameters are  $R_T, E_H, E_V, Pr_V, \epsilon, \zeta, \Delta_H$ , and  $\Delta_V$ , while internal parameters are  $R_v, \beta$ , and  $\gamma$ . If we fix the non-dimensional external parameters, the solution of the governing equations is expected to be similar.

### 3. A PARAMETER SWEEP EXPERIMENT

A parameter sweep experiment is designed to investigate steady solutions of the system, from the HH type Hadley circulation to the GM type super-rotation. Because  $R_T, E_H$ , and  $E_V$  are key parameters of HH80 and M80/82, these are chosen for sweep parameters. Constructing a parameter space  $(R_T, E_H, E_V)$  as Fig.1, we can draw the planes which correspond to the parameter ranges of HH80 and M80/82. Our main interest is the transition of the steady solutions between two well

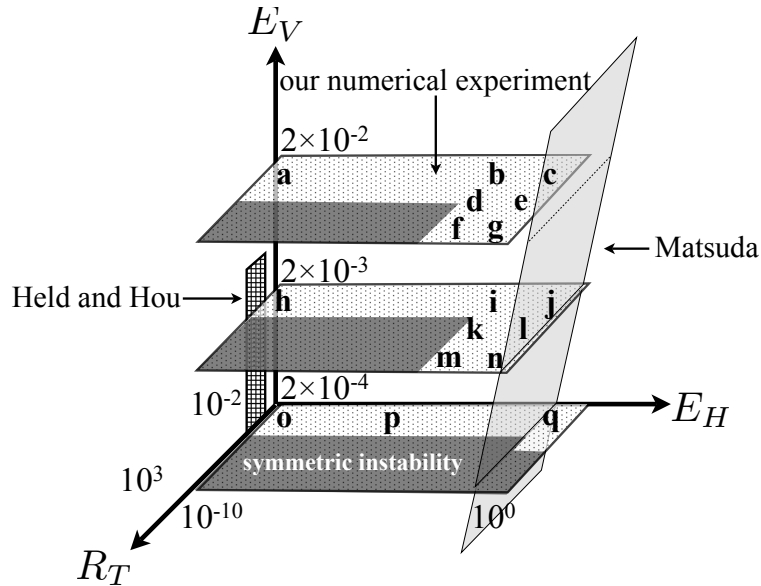


Fig. 1: Positions of Held and Hou (1980, mesh plane), Matsuda (1980, 1982, light gray plane), and our numerical experiment (dotted plane) in a parameter space  $(R_T, E_H, E_V)$ . The dark areas denote the regions where the solution fails to achieve a steady state because of a symmetric instability. Alphabet letters indicate the positions of the cases where zonal wind fields and meridional streamfunctions are shown in Fig.2 and Fig.3.



known situations. Note that the Grashof number ( $G_r$ ) which M80/82 used for a sweep parameter is related to  $R_T$  and  $E_V$  by  $G_r = R_T/E_V^2$ . Furthermore, the plane of M80/82 drawn in Fig.1 corresponds to only a part of the investigated range in M80/82.

We construct a numerical model of the time-dependent version of the governing equations (1)-(10), using a spectral transform method for meridional direction, a central difference method for vertical direction, and the 4th order Runge-Kutta method for the time-integrations. The truncation order of Legendre polynomial is 85 (64 grid points from equator to pole for the Gaussian latitudes) and the number of layers in vertical is 32. The initial condition is a state at rest with a constant potential temperature  $\Theta_0$ , and the time-integrations are done with a time step of 1 hour until a steady state is achieved.

To sweep  $R_T$ ,  $E_H$ , and  $E_V$  with other non-dimensional external parameters fixed, we change the values of  $\Omega$ ,  $\tau$ ,  $\nu_H$ ,  $\nu_V$ ,  $\kappa_V$ , and  $C$  while the other parameters are fixed as follows:  $a = 6.4 \times 10^6$  m,  $H = 8 \times 10^3$  m,  $\delta z = 250$  m,  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>,  $\Theta_0 = 250$  K,  $\Delta_H = 1/3$ , and  $\Delta_V = 1/8$ . Sweeping ranges are  $1.2 \times 10^{-2} \leq R_T \leq 1.2 \times 10^3$ ,  $3.3 \times 10^{-10} \leq E_H \leq 1.3 \times 10^0$ , and  $2.1 \times 10^{-4} \leq E_V \leq 2.1 \times 10^{-2}$  as shown in Fig.1. The other non-dimensional external parameters are fixed as  $Pr_V = 1$ ,  $\epsilon = 126$ , and  $\zeta = 0.8$ .

## 4. NUMERICAL RESULTS

We execute 342 runs to obtain steady solutions numerically in the parameter range described above. However, the calculations indicated by the dark areas in Fig.1 fail to achieve a steady state. Spatial distribution of the potential vorticity indicates that symmetric instability occurs when the numerical solution does not converge to a steady state. In this study, however, we focus on the steady solutions, not on time-dependent ones.

Figures 2 and 3 show zonal wind fields and meridional streamfunctions, respectively, of steady solutions for the cases indicated by alphabet letters in Fig.1. The parameter values for the case **o** are similar to those given in HH80, and the obtained steady solution is also similar: the Hadley circulation with weak indirect Ferrel cell. The panels **p** and **q** ( $E_H = 3.3 \times 10^{-5}$ ,  $3.3 \times 10^{-1}$ ), which are for the cases of much larger  $E_H$  than **o** ( $E_H = 3.3 \times 10^{-10}$ ), show that the zonal wind field changes to a rigid rotation state, and the Hadley circulation weakens and expands to pole. Similar transition can be seen for the cases of  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$  (**h**, **i**, and **j**). The cases **j** and **q** correspond to the solution of thermal wind balance of the Earth type in M80/82. When  $R_T$  is increased at large  $E_H$  of  $3.3 \times 10^{-1}$ , the pattern of rigid rotation does not change very much, but the relative rotation speed of the atmosphere to the planet increases. When  $R_T = 1.2 \times 10^3$  (the case **n**), the zonal wind speed at the top boundary is about ten times faster than the rotation speed of the planet  $a\Omega$  (about 4.7 m/s). This is a typical super-rotation state, and corresponds to the solution of thermal wind balance of the Venus type in M80/82. For a large value of  $E_V = 2.1 \times 10^{-2}$ , the zonal wind speed is reduced for all parameter values of  $R_T$  and  $E_H$  because of the strong vertical diffusion as shown in the panels **a-g**.

## 5. DYNAMICAL ANALYSIS OF THE TRANSITION

For the dynamical analysis of the transition from the HH type Hadley circulation to the GM type super-rotation, we consider this transition as two parts by introducing two indices: the increase of the intensity of super-rotation and the transition of the zonal wind field to a rigid rotation state.

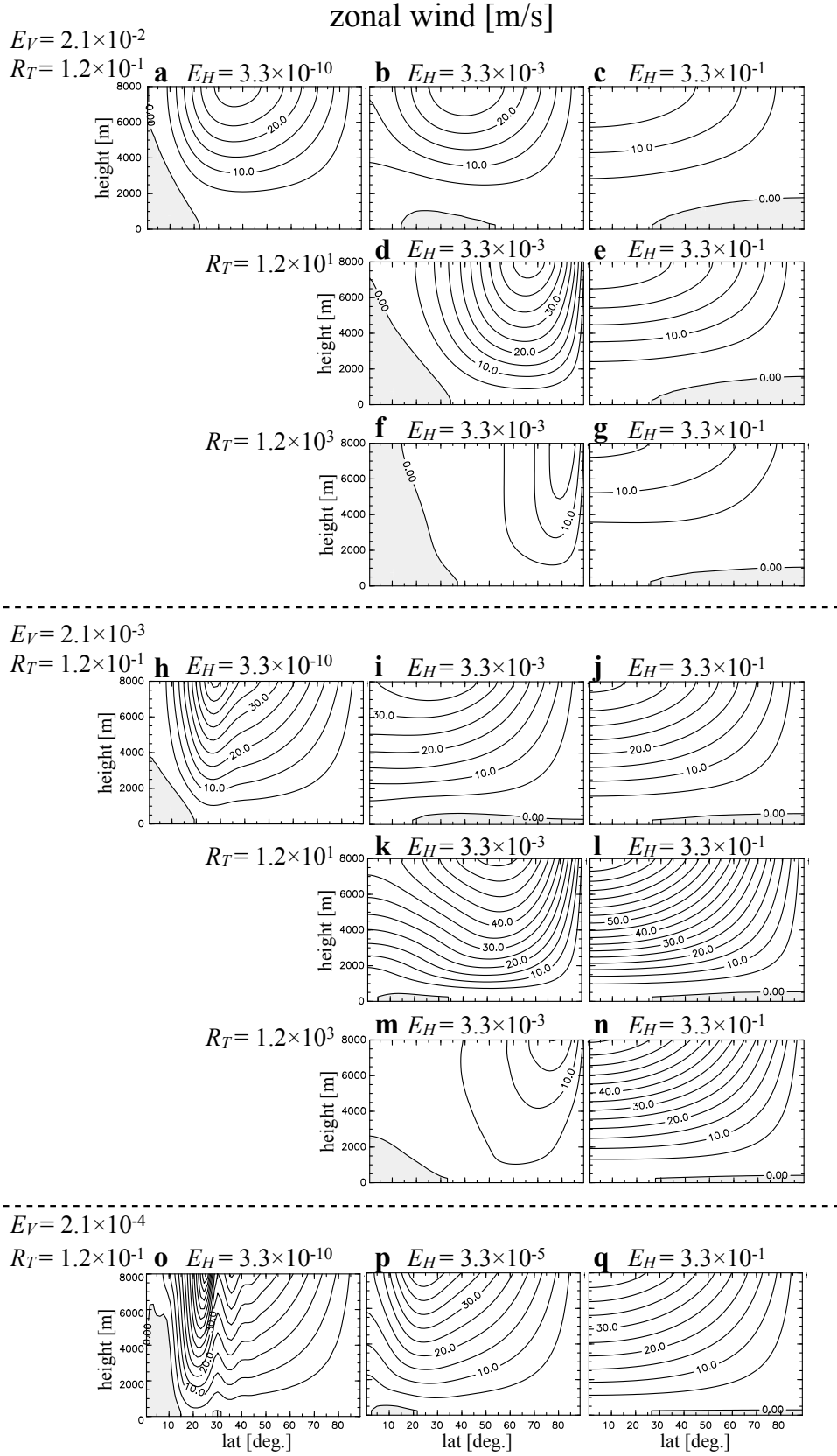


Fig. 2: Numerically obtained zonal wind fields for some combinations of external parameters  $R_T$ ,  $E_H$ , and  $E_V$ . Values of the sweep parameters are shown in the top and left of each panels. Alphabet letters on this figure correspond to those on Fig.1. Contour intervals are 5 m/s. Shade areas indicate the regions of negative values.

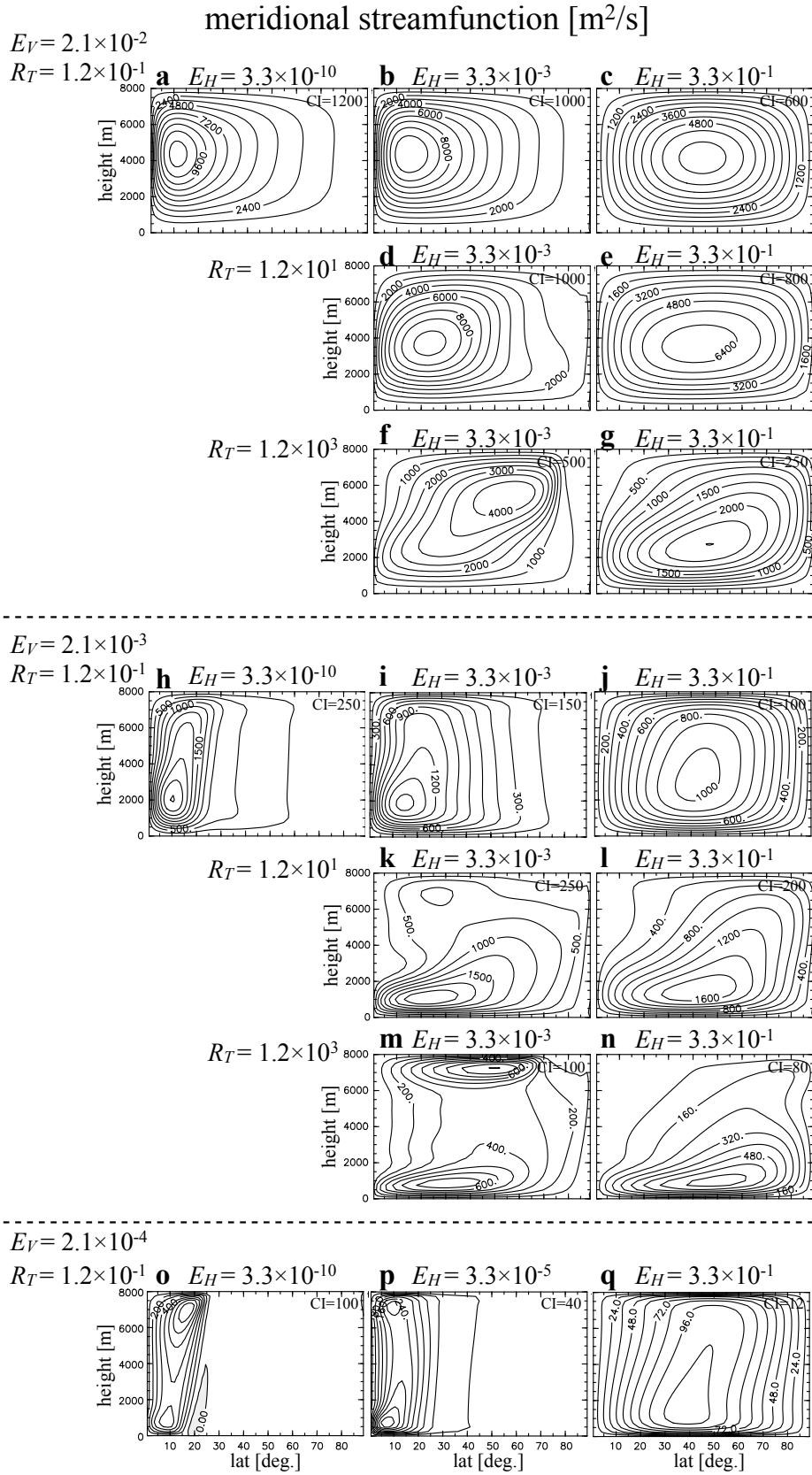


Fig. 3: Same as Fig.2, but for meridional streamfunctions. Contour intervals are shown at right top of each panels.

## Intensity of super-rotation

We introduce a measure of the intensity of super-rotation,  $S$ , which is defined as a latitudinally averaged zonal wind at the top boundary, from equator to pole, divided by the planetary rotation speed; namely  $S \equiv U/(a\Omega)$ . In this study, we call a state with  $S \geq 1$  a super-rotation state. The dependence of  $S$  on  $R_T, E_H$ , and  $E_V$  are shown in Fig.4. The value of  $S$  becomes larger than unity when both  $E_H$  and  $R_T$  are large:  $R_T \geq 4$  for  $E_H = 3.3 \times 10^{-1}$  and  $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$ , and  $R_T \geq 60$  for  $E_H = 3.3 \times 10^{-1}$  and  $E_V = 2.1 \times 10^{-2}$ . However, when the horizontal diffusion  $E_H$  is not so large ( $E_H = 3.3 \times 10^{-3}$ ),  $S$  is less than unity, even if  $R_T$  becomes large as  $R_T = 1.2 \times 10^3$ . This diagram shows a very large horizontal diffusion is necessary for super-rotation, and a smaller vertical diffusion is preferable for that.

From a simple consideration of geostrophic balance and cyclostrophic balance, we can obtain the estimate of  $S$  as a function of  $R_T$ . If we neglect the advection terms and the diffusion terms, the equation (15) becomes

$$S^2 u^2 \tan \phi + 2Su \sin \phi \sim -R_T \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}. \quad (19)$$

Here,  $R_v \gamma$  is approximated by  $S$ , and  $\beta$  is assumed to be unity. From equation (19),  $S$  is approximated as:

$$S \sim \begin{cases} R_T & \text{for } R_T \ll 1 : \text{geostrophic balance} \\ \sqrt{R_T} & \text{for } R_T \gg 1 : \text{cyclostrophic balance} \end{cases}. \quad (20)$$

Even when  $R_T \sim 1$ , this can be applied as:

$$S \sim \begin{cases} R_T & \text{for } R_T \leq 1 \\ \sqrt{R_T} & \text{for } R_T > 1 \end{cases}, \quad (21)$$

in Fig.4 (solid line). Equation (21) is a good estimate over a wide parametric range of  $R_T$ , when  $E_V$  is small and  $E_H$  is large. We should note that above estimation corresponds to the argument on thermal wind balance of the Earth type and the Venus type done by M80 (his equation 3.13)

## A measure of rigid rotation

The second index is a measure of rigid rotation,  $Rg$ , defined as the ratio of the rigid rotation component of the kinetic energy of the zonal wind to the zonal kinetic energy at the top boundary,

$$Rg \equiv \frac{\text{rigid rotation component of } KE \text{ of the zonal wind}}{KE \text{ of the zonal wind}} \Big|_{z=H} = \frac{2|\psi_1|^2}{\sum n(n+1)|\psi_n|^2} \Big|_{z=H}, \quad (22)$$

where  $\psi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) is a Legendre polynomial expansion coefficient of the horizontal streamfunction. Figure 5 shows the dependence of  $Rg$  on  $E_H$  for five combinations of  $R_T$  and  $E_V$ . When  $E_H$  is very large,  $Rg$  is nearly unity; namely the zonal wind field is almost rigid rotation. The zonal wind at the top boundary for the case **(vi)** in Fig.6 shows such a rigid rotation state. In contrast, when  $E_H$  is very small,  $Rg$  takes a certain constant value which depends mostly on  $R_T$ . This solution corresponds to the HH type Hadley circulation as shown by Fig.6 **(i)**. The circulation changes largely from the HH type solution to the rigid rotation state in a certain range of  $E_H$  as **(ii)**-**(v)** in Fig.5. The zonal wind increases at low latitudes in the cases for this range as shown in Fig.6.

An approximate position of the transition in Fig.5 where the circulation type changes from the HH type to rigid rotation can be estimated with the  $u$ -momentum equation (1), whose terms in left hand side are rewritten with absolute angular momentum per unit mass,  $M \equiv a^2 \Omega \cos^2 \phi + ua \cos \phi$ ,

$$\frac{1}{a \cos \phi} \nabla \cdot (\mathbf{v}M) = \nu_H D_H(u) + \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (23)$$

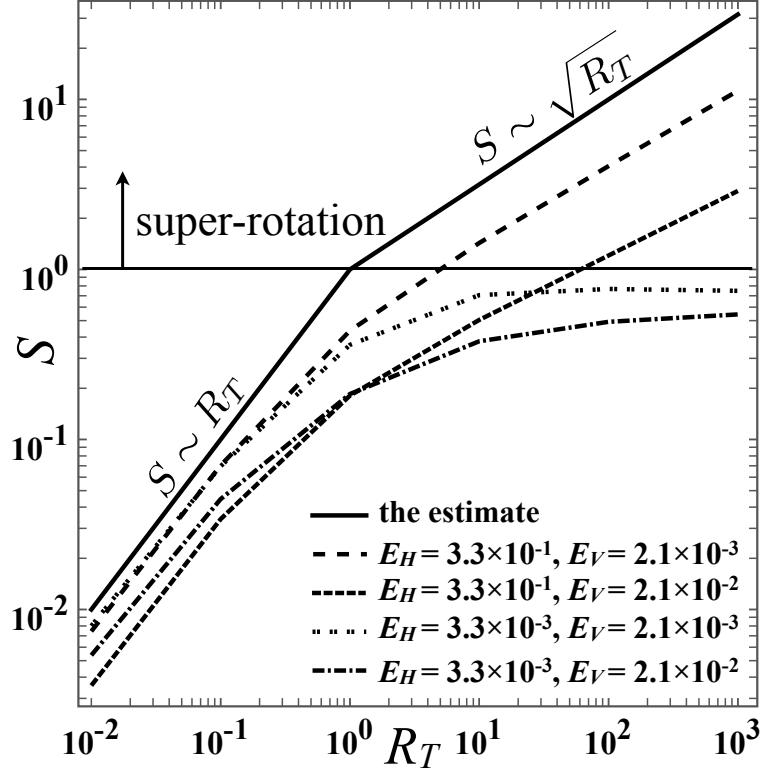


Fig. 4: The dependence of the intensity of super-rotation  $S$  on the external thermal Rossby number  $R_T$ , for some combinations of the horizontal Ekman number  $E_H$  and the vertical Ekman number  $E_V$ . The solid line represents the estimate of  $S$  under the assumption of geostrophic balance and cyclostrophic balance.

where  $\mathbf{v} \equiv (v, w)$  is the velocity, and  $\nabla \equiv [(a \cos \phi)^{-1} \partial(\cos \phi) / \partial \phi, \partial / \partial z]$  is the gradient operator in the meridional plane. When  $\nu_H$  is small enough, the balance between the flux divergence term and the vertical diffusion term is dominant for the HH type Hadley circulation. As  $\nu_H$  increase, the second term in equation (23) becomes large. It is expected that the transition takes place when the horizontal diffusion term is comparable to the vertical diffusion term. The magnitude of the horizontal diffusion term in the HH type circulation is estimated as follows. Outside the Hadley cell, zonal wind field is in a rigid rotation state as  $u_E = a\Omega[(1 + 2R_T z/H)^{1/2} - 1] \cos \phi$ , because of the thermal wind balance to the radiative equilibrium potential temperature field, and the horizontal diffusion term becomes zero. In the Hadley cell, on the other hand, zonal winds at the top boundary are determined by the angular momentum conservation as  $u_M = a\Omega \sin^2 \phi / \cos \phi$ . Therefore, the magnitude of the horizontal diffusion term in the HH type circulation is the order of  $\nu_H a \Omega / a^2$ , so the transition takes place when

$$\nu_H \frac{a\Omega}{a^2} \sim \nu_V \frac{U}{H^2}, \quad (24)$$

so that

$$E_H \sim E_V S. \quad (25)$$

The relationship (21) is used for the value of  $S$  to estimate the position of the transition with equation (25). Arrows in Fig.5 show the estimates for the combination of  $R_T$  and  $E_V$ , and these points agree well with the transitions.

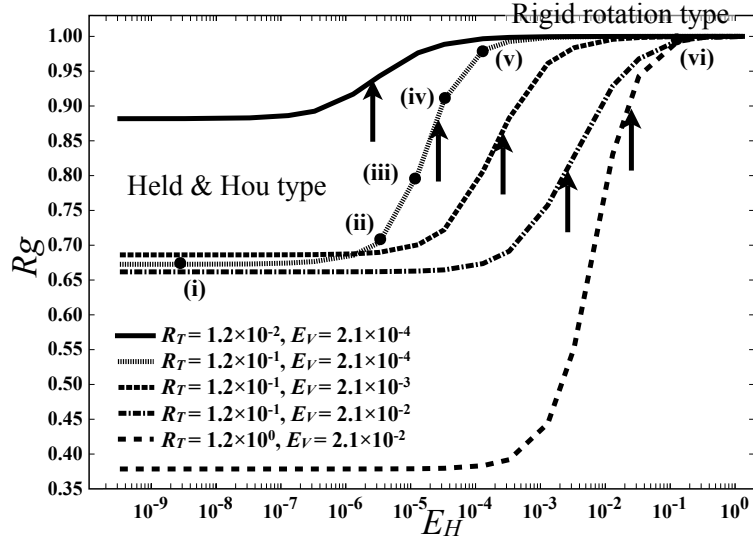


Fig. 5: The dependence of the measure of rigid rotation  $Rg$  on the horizontal Ekman number  $E_H$ , for some combinations of the external thermal Rossby number  $R_T$  and the vertical Ekman number  $E_V$ . Estimated transition points ( $E_H \sim E_V S$ ) are shown by arrows. Roman numerals correspond to those of Fig.6.

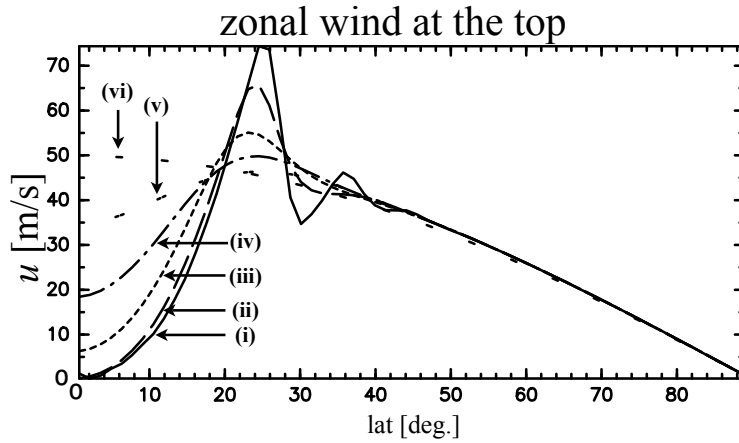


Fig. 6: Meridional profile of zonal winds at the top boundary. Values of the sweep parameters are  $E_H =$  (i)  $3.3 \times 10^{-9}$ , (ii)  $3.3 \times 10^{-6}$ , (iii)  $1.3 \times 10^{-5}$ , (iv)  $3.3 \times 10^{-5}$ , (v)  $1.3 \times 10^{-4}$ , (vi)  $1.3 \times 10^{-1}$ ,  $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$ , and  $E_V = 2.1 \times 10^{-4}$ .

## 6. SUMMARY

Axisymmetric steady solutions of planetary atmospheres are investigated numerically with an idealized system: the primitive equations of Boussinesq fluid forced by a Newtonian heating/cooling. Transitions from the Held and Hou (HH hereafter) type Hadley circulation to the super-rotation state driven by the Gierasch mechanism are investigated with a parameter sweep experiment. The dependence of the solution on the external thermal Rossby number ( $R_T$ ), the horizontal Ekman number ( $E_H$ ), and the vertical Ekman number ( $E_V$ ) are explored.

To analyze the transition dynamically, two indices are introduced: a measure of the intensity of super-rotation ( $S$ ) and a measure of rigid rotation ( $Rg$ ). Assuming geostrophic balance and cyclostrophic balance, we can estimate the relationship between  $S$  and  $R_T$  as  $S \sim R_T$  for  $R_T \leq 1$  and  $S \sim \sqrt{R_T}$  for  $R_T > 1$ , respectively. This is a good estimate when  $E_H$  is large enough ( $\sim 10^{-1}$ ) as shown in Fig.4. The value of  $Rg$  increases largely in a certain range of  $E_H$  which depends on  $R_T$  and  $E_V$ , then becomes close to unity (Fig.5), showing that the transition of circulation pattern takes place from the HH type to rigid rotation. An approximate position of this transition is estimated as  $E_H \sim E_V S$ , using the HH theory as shown by arrows in Fig.5.

In this study, we focused on the stable steady solutions obtained by time integrations from a single initial condition. Matsuda (1980, M80 hereafter) drew the famous regime diagrams of dynamical balance types for three cases: (i) infinite horizontal diffusion in zonal momentum equation (Fig.2 of M80), (ii) finitely large horizontal diffusion in zonal momentum equation (Fig.9 of M80), (iii) finitely large horizontal diffusion in zonal and latitudinal momentum equations and thermodynamic equation (Fig.10 of M80). Now, our study has horizontal diffusion in both zonal and latitudinal momentum equations but not in thermodynamic equation, so the situation is not identical to (i), (ii), or (iii). However, in the latitudinal momentum equation, the horizontal diffusion term is much less than other dominant terms, at least, in our parameter range. Therefore, our study may correspond to Fig.9 of M80, so that there is a possibility for the existence of multiple equilibrium solutions in our parameter range. As a next step, it is interesting to explore the multiple equilibrium solutions including unstable steady ones.

## ACKNOWLEDGMENTS

We thank Professor Shin-ichi Takehiro for useful comments. ISPACK-0.71<sup>12</sup>) and LAPACK (<http://www.netlib.org/lapack/>) were used for numerical experiments and analyses. Figures were produced by GFD-DENNOU Libraries (<http://www.gfd-dennou.org/index.html.en>) and MjoGraph (<http://www.oc.hialab.dnj.ynu.ac.jp/mjograph/index.html>).

## REFERENCES

- 1) Schneider, E. K., “Axially symmetric steady-state models of the basic state for instability and climate studies. II. Nonlinear calculations”, *J. Atmos. Sci.* 34 (1977), pp.280-296.
- 2) Held, I. M., and A. Y. Hou, “Nonlinear axially symmetric circulations in a nearly inviscid atmosphere”, *J. Atmos. Sci.* 37 (1980), pp.515-533.
- 3) Vallis, G. K. : Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, 1st ed. (Cambridge University Press, 2006), p.745.
- 4) Lindzen, R. S. : Dynamics in Atmospheric Physics, 1st ed. (Cambridge University Press, 1990), p.310.
- 5) James, I. N. : Introduction to Circulating Atmospheres, 1st ed. (Cambridge University Press, 1994), p.422.

- 6) Satoh, M., "Hadley circulation in radiative-convective equilibrium in an axially symmetric atmosphere", *J. Atmos. Sci.* 51 (1994), pp.1947-1968.
- 7) Williams, G. P., "Jet sets", *J. Meteor. Soc. Japan* 81 (2003), pp.439-476.
- 8) Gierasch, P., "Meridional circulation and the maintenance of the Venus atmospheric rotation", *J. Atmos. Sci.* 32 (1975), pp.1038-1044.
- 9) Matsuda, Y., "Dynamics of the four-day circulation in the Venus atmosphere", *J. Meteor. Soc. Japan* 58 (1980), pp.443-470.
- 10) Matsuda, Y., "A further study of dynamics of the four-day circulation in the Venus atmosphere", *J. Meteor. Soc. Japan* 60 (1982), pp.245-254.
- 11) Becker, E., "Symmetric stress tensor formulation of horizontal momentum diffusion in global models of atmospheric circulation", *J. Atmos. Sci.* 58 (2001), pp.269-282.
- 12) Ishioka, K., "ispack-71", <http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/>, GFD Dennou Club. (2005)