流体力学 授業資料 (2025-12-08)

4. 完全流体

4.1 完全流体とは

粘性も熱的散逸も加熱も無視できる状況にある流体を完全流体または非粘性流体という. 完全流体を記述する式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \mathrm{div}(\rho s \boldsymbol{v}) = 0 \tag{3}$$

非粘性かつ非発散 ($\rho = \rho_0$: 一定) な流体における運動方程式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{5}$$

をオイラー方程式 (Euler equations) という.

4.2 静水力学

4.2.1 重力場中の静止流体

一様な重力場の静止流体について考える. 重力場中のオイラー方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \boldsymbol{g} \tag{6}$$

である. ただし, $\boldsymbol{g}$ は重力加速度ベクトルである. ここで, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ とすると

$$\mathrm{grad}p = \rho \boldsymbol{g} \tag{7}$$

が得られる. これは力学的平衡を表す式である.

4.2.2 重力場中で力学平衡にある流体

(7) が成り立つ場合, p, ρ, T は高度のみの関数となる. その理由は以下の通りである. まず, 座標を導入する. z 軸を鉛直上方にとる. 重力加速度ベクトルは

$$\boldsymbol{g} = (0, 0, -g) \tag{8}$$

grad$p = \rho \boldsymbol{g}$ を成分表示すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \tag{9}$$

最初に, 流体が重力場中で平衡ならば p は z のみの関数である (でないと, 運動が起きてしまう). p が z のみの関数である時, 静水圧平衡式

$$\rho = -\frac{1}{g}\frac{dp}{dz} \tag{10}$$

より ρ も z のみに依存する. 更に, T は p, ρ の関数であるので, T も z のみに依存することがわかる.

4.2.3 静水圧平衡式の積分

非圧縮, 密度一定の場合を考える. 静水圧平衡式の z 成分

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{11}$$

を積分すると以下が得られる.

$$p = -\rho g z + C \tag{12}$$

C は積分定数.

4.3 ベルヌーイの定理

4.3.1 流線, 流跡線

- 流線 (stream line): ある時刻 t でのベクトル場の積分. 流線の微分方程式は以下である.

$$\frac{dx}{v_x(\boldsymbol{x}, t)} = \frac{dy}{v_y(\boldsymbol{x}, t)} = \frac{dz}{v_z(\boldsymbol{x}, t)} \tag{13}$$

- 流跡線 (path line) : 流体粒子の軌道. 流跡線の微分方程式は以下である.

$$\frac{dx}{v_x(\boldsymbol{x}, t)} = \frac{dy}{v_y(\boldsymbol{x}, t)} = \frac{dz}{v_z(\boldsymbol{x}, t)} = dt \tag{14}$$

4.3.2 ベルヌーイの定理の一般形

エネルギー保存則の一般形は以下であった.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\frac{1}{2}v_i^2 + \varepsilon + \Phi\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\rho v_k\left(\frac{1}{2}v_i^2 + \varepsilon + \Phi\right) + v_k p - v_i \sigma'_{ik} + q_k\right\} = \rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q. \tag{15}$$

単位質量あたりのエンタルピーを導入する.

$$h = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \tag{16}$$

エネルギー保存則は以下のようになる.

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi + h\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}(-\sigma'_{ik}v_i + q_k) = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q \tag{17}$$

ここで

- 流れが定常である. ($\partial_t \bullet = 0$)
- 粘性, 熱流束, 加熱がない. ($\sigma'_{ik} = 0, \boldsymbol{q} = 0, Q = 0$)

とすると

$$(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad})\left(\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi + h\right) = 0 \tag{18}$$

$\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi + h$ は, 流線に沿って一定値をとることになる. これをベルヌーイの定理という.

4.3.3 バロトロピック流体 (順圧流体) $\rho = \rho(p)$ の場合

非散逸を仮定しているので $\frac{ds}{dt} = 0$. したがって, 熱力学の関係式 $T\frac{ds}{dt} = \frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}$ に $\rho = \rho(p)$ と $\frac{ds}{dt} = 0$ を用いると,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho(p)}\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\int^p \frac{1}{\rho(p)}dp \equiv \frac{dP(p)}{dt} \tag{19}$$

を得る. 粘性, 熱流束のない定常なバロトロピック流体の流れでは, 流線に沿って

$$\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi + P(p) = \mathrm{const.}\ \text{(流線に沿って)} \tag{20}$$

となる. ただし, $P(p) = \int^p \frac{1}{\rho(p)}dp$. $\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi + P(p)$ をベルヌーイ関数という.

4.3.4 非圧縮・密度一定流体の場合

$$\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi + \frac{p}{\rho_0} = \mathrm{const.}\ \text{(流線に沿って)} \tag{21}$$

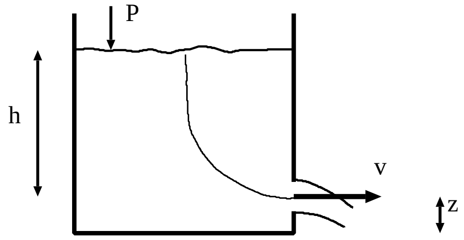

図 1: トリチェリの定理.

4.3.5 トリチェリー (Torricelli) の定理

図 1 の状況を考える. 密度一定流体を入れたバケツの横に穴を開ける. 水深は h. 流れ出すときの流速を求める. 容器に比べて穴が十分小さいとすれば流れはほとんど定常と考えられる. よって, ベルヌーイの定理を適用できる.
この場合, $\Phi = gz$ なのでベルヌーイの定理は

$$\frac{1}{2}v_i^2 + gz + \frac{p}{\rho_0} = \text{const.} \tag{22}$$

となる.

$$\underset{(\,\text{水面}\,)}{gh + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_0}} = \underset{(\,\text{出口}\,)}{\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2} + gz + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_0} \tag{23}$$

圧力は全部 p_{atm}, $z = 0$ とおくと

$$gh = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2, \tag{24}$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{2gh} \tag{25}$$

が得られる. これをトリチェリの定理という.

4.3.6 よどみ圧・ピトー管

流れの中に物体を置くと, その表面に流速 0 の点ができる. これをよどみ点 (stagnation point) という. よどみ点での圧力をよどみ圧 (stagnation pressure) という.
たとえば, 図 2. A は前方のよどみ点, B は後方のよどみ点.

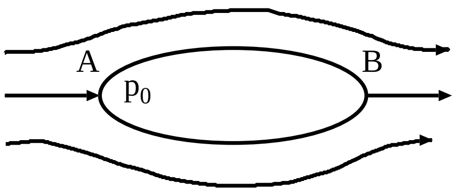

図 2: よどみ点

非圧縮流体の場合で, 重力などのポテンシャル力を無視すると, ベルヌーイの定理により

$$\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{v}|^2 + p = p_0 \tag{26}$$

ここで, p_0 はよどみ圧. 流線に沿っての一定値はよどみ圧に等しい.
普通の圧力 p を静圧 (static pressure), $\rho_0|\boldsymbol{v}|^2$ を動圧 (dynamic pressure) という. p_0 を全圧または総圧 (total pressure) と言う.
縮まない流体の場合, 重力などの外力を無視すると, ベルヌーイの定理は

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = const = p_0 \tag{27}$$

となる. 流線に沿っての一定値は, よどみ圧. この式によれば, 総圧 p_0 と静圧 p を測定すれば,

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \tag{28}$$

より, v が求まる. 総圧はよどみ圧に等しいから, これを測定するには, 管を流れに向けてその中の圧力を測定すれば良い. このような管をピトー管 (pitot tube) という. 飛行機に設置されているピトー管を 図 3(原図は `https://ja.wikipedia.org/wiki/ピトー管`) に示す.

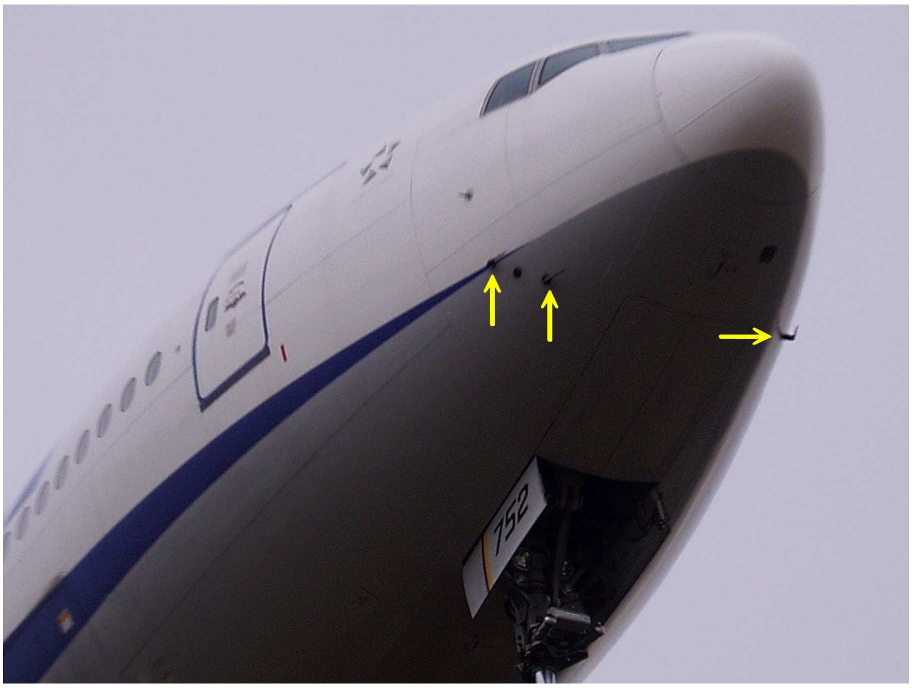

図 3: B777 のピトー管.

4.3.7 例

- 飛行機の飛ぶ原理
- 野球の変化球

  姫野龍太郎氏 (理研) の講演

  `https://www.cps-jp.org/modules/mosir/player.php?v=20101215_himeno`