流体力学 授業資料 (2025-12-15)

4.4 完全流体中の音波

4.4.1 音波の線型方程式

無限領域における, 圧縮性を持つ理想流体を考える. 外力 (重力等) 無し, 起きる現象は全て断熱過程であると仮定する. 基礎方程式は以下の通り.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{2}$$

$$\frac{ds}{dt} = 0. \tag{3}$$

境界条件として, 無限遠で物理量は有限値を持つ, という条件を付けておく.
基本場として次のような状態を考える.

- 運動無し
- 熱力学的に一様・一定 ($\rho = \rho_0$, $p = p_0$)

断熱の式を書き換えておく.

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s (\rho, s)\frac{d\rho}{dt} = c_s^2(\rho, s)\frac{d\rho}{dt} \tag{4}$$

ここで,

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s [m/sec] \tag{5}$$

とおいた.
静止状態に微小な擾乱を加え, 次のように表記する.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}', \tag{6}$$

$$s = s_0 + s', \tag{7}$$

$$p = p_0 + p', \tag{8}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'. \tag{9}$$

これらの表現を基礎方程式に代入し, 線形化を行うと以下の式が得られる.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_j'}{\partial x_j} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial v_i'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_i}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = c_s^2(\rho_0, s_0)\frac{\partial \rho'}{\partial t} \tag{12}$$

基本場は熱力学的に一様なので $c_s^2(\rho_0, s_0)$ は場所によらない.

4.4.2 波動方程式

p' のみの 1 変数の式を作ると

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i'^2} = 0. \tag{13}$$

これは波動方程式, すなわち, 音波の式であり, c_s は音速である.

4.4.3 分散関係式

解として平面波解を考える.

$$\rho' = Re^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{14}$$

$$p' = Pe^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{V}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{16}$$

これらを方程式に代入することにより波数と振動数の関係式が得られる.

$$\omega^3(\omega^2 - c_s^2|\boldsymbol{k}|^2) = 0. \tag{17}$$

音波に対応する部分は ( ) 内の部分

$$\omega^2 - c_s^2|\boldsymbol{k}|^2 = 0 \tag{18}$$

である. これが音波の分散関係式である.
$\boldsymbol{k}$ 方向の位相速度は以下のようになる.

$$c_p = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} \ = \ \pm c_s. \tag{19}$$

4.4.4 モード解

p' は以下のようになる.

$$p' = Pe^{i(kx-\omega t)} = \Re[(Pr + iPi)\{\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)\}] \tag{20}$$

$$= Pr\cos(kx-\omega t) - Pi\sin(kx-\omega t) \tag{21}$$

$$= Pr\cos(kx-kc_r t) - Pi\sin(kx-kc_r t) \tag{22}$$

ρ', $\boldsymbol{v}'$ についても同様の式が得られる.

4.4.5 構造

音波の平面波解 (14) - (16) を運動方程式 (11) に代入すると

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\frac{P}{\rho_0}. \tag{23}$$

これより, 圧力と速度とは同じ位相 (0 または π の差) を持つことがわかる. この関係式から, 音波は縦波, すなわち, $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{k}$ であることもわかる.

熱の式 (12) より

$$R = \frac{1}{c_s^2} P. \tag{24}$$

圧力と密度は同じ位相でなければならない.
連続の式 (10) より

$$\frac{\partial v_j'}{\partial x_j} = i\omega \frac{R}{\rho_0} = i\frac{\omega}{c_s^2}\frac{P}{\rho_0} \tag{25}$$

発散収束と密度 (または圧力) とは $\pi/2$ 位相がずれている.

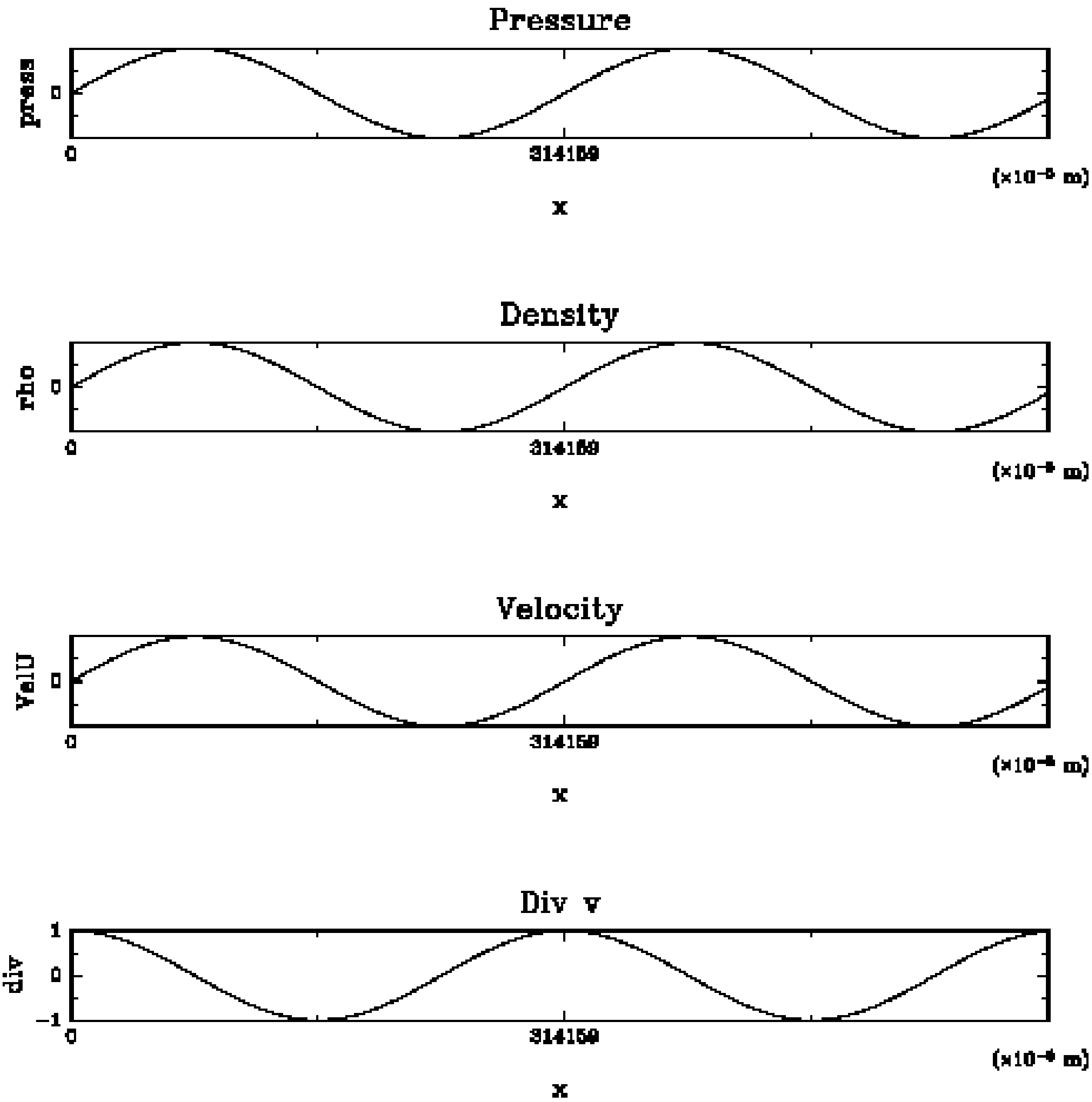

図 1: 1 次元音波の解.

(x, y) 2 次元の場合の音波の構造を図 2 に示す.

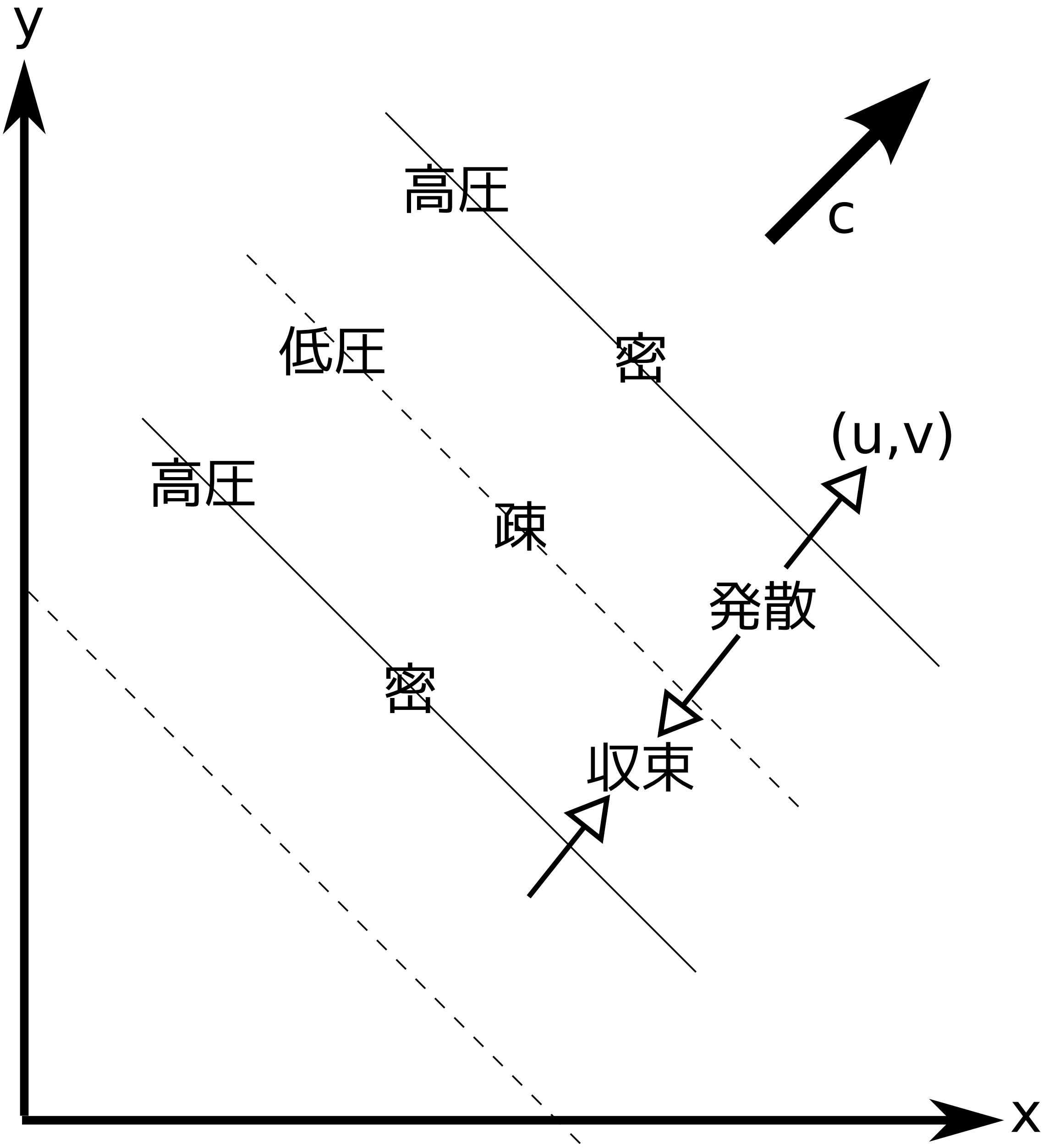

図 2: 2 次元音波の水平構造.