

バスタブ渦の起源と  
その形成メカニズム

神戸大学理学部地球惑星科学科  
地球および惑星大気科学研究室  
柏本光司

**2013/02/08**



## 要旨

本研究では、バスタブ渦の起源とその形成メカニズムについて、数値シミュレーションにより研究した英字論文 (Yokoyama *et al.* 2012) の訳と補足を行った。静止容器と回転容器により赤道やコリオリ力が働く地球上の北半球を模した設定、残存渦度がない場合やランダムに分布している場合等、様々な設定でバスタブ渦について研究した。その結果、バスタブ渦は角運動量の保存則により排水口付近で渦度が大きくなるため発生し、回転方向は容器の軸対称性や残存渦度に大きく影響を受けるが、それらに細心の注意を払えばコリオリ力により決定されることがわかった。

# 目次

第1章 導入	2
第2章 論文: バスタブ渦の起源とその形成メカニズム	3
2.1 概要	3
2.2 導入	3
2.3 定式化と数値的方法	5
2.4 数値計算結果	9
2.4.1 静止した水槽の流れ	9
2.4.2 回転水槽の流れ	14
2.5 議論と概要	19
第3章 論文の補足	23
3.1 式 (2.1) – (2.6) の導出	23
3.2 数値計算法の説明	32
3.2.1 差分法	32
3.2.2 反復法	33
3.3 Shapiro (1962) の実験の値の計算	34
3.4 Burgers 渦と式 (2.8) – (2.10) の導出	35
3.5 Newton 法による $x^*$ の計算	39
謝辞	41
参考文献	42

# 第1章 導入

“風呂の栓を抜いたときにできる渦の回転方向は、コリオリ力により北半球では反時計回り、南半球では時計回りになる。”このような話を聞いたことのある人は少なくないはずだ。この、バスタブ渦と呼ばれる渦が発見されたのは最近のことではなく、また、回転方向に関する話も長い間論じられてきた。それにも関わらず、このバスタブ渦の起源と形成の研究に関する論文が2012年に日本物理学会政欧誌に出版され、記事として取り上げられていた。バスタブ渦という誰もが目にしたことのある、また、長い間論じられてきた現象にこの論文が遂に答えを示した。研究室に配属され、初等的な流体の研究を行う中でこのバスタブ渦に関する論文にとっても興味を持ち、学習することにした。

本研究では、2章で英文で書かれた“Origin of Bathtub Vortex and Its Formation Mechanism”というタイトルの論文(Yokoyama *et al* 2012)の日本語訳を行い、3章で補足を行っている。

## 第2章 論文: バスタブ渦の起源とその形成メカニズム

### 2.1 概要

円筒容器に現れるバスタブ渦の起源と回転の方向を決めるメカニズムを明らかにするためにバスタブ渦の生成と発達が数値的に研究された。流れは完全に軸対称であると仮定されている。水は容器の底に接続された排水口を通して排出され、しかし水位は壁面の透過性部分を通しての水の供給によって一定の高さに保たれているとする。地球の回転によるコリオリ力がバスタブのような小さな容器の中の渦の生成に大きな影響を与えるかどうかは長い間論じられてきた。我々はバスタブ渦を二つ同定した。一方は初めに容器に含まれる残存渦度が集められ集中することによる過渡的な現象として現れるものであり、もう一方はあらゆる過渡的なプロセスの後現れる定常状態である。渦の回転の方向は前者では唯一には決められないが、後者は容器が回転しているとき、たとえ容器の回転が地球上のように極度にゆっくりであっても常に容器のものと同じ決まった回転の方向を持つ。

### 2.2 導入

渦のある水の流れは私たちの日々の生活の中でキッチンシンクやバスタブの排水管のまわりなどでしばしば観測され、それはバスタブ渦と呼ばれる。地球の回転はバスタブ渦の回転の方向を明確に決めるには小さすぎるようではあるが、台風やハリケーンとの類推によって、バスタブ渦は北半球では反時計まわり、南半球では時計回りとなるとしばしば推定される。どのようにバスタブ渦が生成されるかという問題は研究者たちの間で強く興味を持たれている。特に、軸対称な形状の容器の中で鉛直渦が形成されるかどうか、渦が形成されたとき何が渦度を供給するかということを明らかにすることにも興味を持たれている。

軸対称容器の中のあらゆる回転流体は前もって有限の循環の大きさを持っていないなければならないと信じられている。このことは、閉じた軸対称系はその角運動量を保存する、と述べている Noether の定理と等価である。しかしながら、ある実験の報告は循環の生成は屈曲した流線に付随した二次的な渦度の不安定の増幅による不安定な現象であると示唆している。事実、Sibulkin(1962) の実験的研究は、循環は直線の境界層流と軸対称の吸込流れ(引用文 1 参照) の結合の不安定によって、

シンクの中で生成することができるという Weske の実験結果を基にした彼の示唆がきっかけとなった。不安定による循環の生成の可能性は角運動量の保存が立証された Sibulkin(1962) による精密な実験により排除された。彼の結論は渦の回転方向は満たされたタンクの中の水の方向と一致し、残存循環が減少するとき渦の強さは減少するということを述べている。Weske の仮説を吟味するための実験では、Sibulkin(1962) が水が入った容器が空になる少し前にバスタブ渦が反転することをしばしば観測した。渦の反転は最初の回転がどちらの方向でも観測され、彼はそのような反転の説明を考えた。彼の説明によると、渦のある流れは渦度の動径方向成分を生成する底面の境界層を引き起こす。境界層の流体が排水口に近づくと、それは鉛直の速度成分を得て、Helmholtz の定理の結果、渦度ベクトルもまた鉛直成分を得る。渦度の鉛直成分によって生成された循環は最初の渦の流れの回転の方向と反対になる。

同じ年ではあるが Sibulkin(1962) よりも以前に、Shapiro(1962) はバスタブ渦の回転方向の決定に対する地球の回転の効果を明らかにするために詳細な実験を行った。彼の実験は北緯 42 度に位置するボストンで行われ、もし残存する流体の運動と理想的な軸対称状態を打ち壊すあらゆる可能性に細心の注意が払われると地球の回転により引き起こされる小さなコリオリ力は渦の方向を決定するというのを彼は結論づけた。彼の結論はコリオリ力が逆向きに働く南半球でも Trefethen(1965) 等の研究によって立証された。彼らは南緯 34 度に位置するオーストラリアのシドニーで実験を行い、実験でバスタブ渦が時計回りになることを報告した。両方の実験で、水が満ちた後の設定時間が十分に長くなければ、擾乱による残存渦度が渦の回転方向を決め得ることを示した。Shapiro(1962) が排出時間の最初の 3 分の 2 の間、時計回りに回転をしていた渦が反転したことを観測したことも付け加えておく。

Sibulkin(1962), Shapiro(1962), Trefethen(1965) 等によって結論が出されているにも関わらず、バスタブ渦の起源が軸対称流の不安定に起因すると考えられていた。例えば、Shingubara と Kawakubo(1984) はバスタブ渦の始まりは分岐現象であり、角運動量は渦の定常軸対称流により与えられるという結論を出した。さらに彼らは、バスタブ渦の発生の臨界 Reynolds 数を得た。

Noguchi ら (2003) と Yukimoto ら (2012) は高速度で回転している容器の水のシンク渦の流速を計測し、流れのパターンを可視化した。その実験の計測と可視化から、2 つの異なる流れパターンが 4 つのパラメータの組に対して同定された。これは、パラメータの 2 つの設定の間の分岐現象の存在を示唆する。その 2 つの流れパターンは数値シミュレーションで立証された。

バスタブ渦の流れ構造は包括的に研究されてきた。例えば、Lundgren(1985) は非粘性方程式を出発点とし、必要であれば内部粘性、境界摩擦、有限の円筒境界が考慮に加えられた回転容器の排水口上の渦の流れ構造を決定しようと試みた。Lundgren(1985) により提案されたバスタブ渦モデルは Andersen ら (2006) による実験の結果と比較され、議論された。Lundgren(1985) のモデルを非回転容器中の粘性流体に拡張することにより、Stepanyants と Yeoh(2008) は詳細な流れ構造を

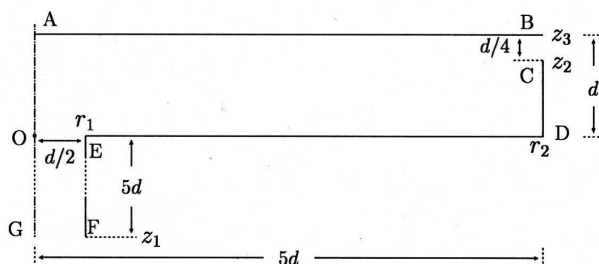


図 2.1: バスタブ流の数値領域

明らかにし、くぼみが排水口の上に形成されるもの、くぼみが排水口にちょうど触れるもの、くぼみが空気を排水口へと運んでいるものの3つの状態に分類した。同じ論文で彼らは表面張力の効果も研究した。

今日、バスタブ渦の回転の方向はもし実験で完全な軸対称性が保持されればコリオリ力による旋回性によって唯一に決められると広く信じられ、実験的に立証されている。しかしながら、その実験結果は十分に確定していない。なぜならば、全ての現象が短い時間で終わり、そのことがバスタブ渦の起源と構造の詳細な説明を妨げるからである。本論文では我々は数値シミュレーションによって、壁面の浸透性部分を通しての連続した給水で一定の高さに水面が保たれた状況で、容器の回転の効果を含めた軸対称容器内のバスタブ渦の起源と維持メカニズムを研究する。

## 2.3 定式化と数値的方法

我々は容器の対称軸と一致する軸の回りを一定の角速度で回転する水槽と排水口から成る軸対称容器の中の流れを考える。図 2.1 は対称軸を通る容器の断面図を示している。水は壁面の上部 BC から容器に入り、水槽の中心部を通って流れ、水槽の底に接続された排水口の GF から排水される。我々は水槽の底の中心に原点 O をもち、 $z$  が鉛直上方を向いた円筒座標  $(r, \theta, z)$  を用いる。そこで、中心軸と水槽の底面は  $r = 0$  と  $z = 0$  にそれぞれ一致する。排水口の直径は  $d$  に設定され、半径は  $r_1 = d/2$  となり、水槽の半径  $r_2$  は  $5d$  とされている。水槽の高さと注水口部分はそれぞれ  $z_3 = d$  と  $z_3 - z_2 = d/4$  となるよう設定されている。排水管の長さは  $|z_1| = 5d$  とされている。

流れは非圧縮で容器の軸に対して軸対称であるものとする。また、速度  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  と圧力  $p$  は Navier-Stokes 方程式と連続の式により決められる。排水口の直径  $d$  と排水口における平均速度  $\bar{w} = 4Q/(\pi d^2)$  を特徴的な長さとして速度のスケールにとると、ここで  $Q$  は単位時間あたりの排出量である、角速度  $\Omega$  で容器とともに回転している座標系上で無次元形式で書かれた Navier-Stokes 方程式と連



続の式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{Ro} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

となる. ここで  $\hat{\mathbf{k}}$  は  $z$  方向に沿った単位ベクトルである. 流れ場を特徴づける 2 つの無次元数は Reynolds 数  $Re = 4Q/(\pi \nu d)$  と Rossby 数  $Ro = 2Q/(\pi d^3 \Omega)$  である. ここで  $\nu$  は水の運動学的粘性である. 軸対称のために, Stokes の流れ関数  $\psi$  が導入でき, それと周速度  $u_\theta$  で流れを決定する. 軸方向と鉛直方向の速度成分  $u_r$  と  $u_z$  はそれぞれ, 流れ関数

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.3)$$

で与えられる. また, 連続の式 (2.2) は式 (2.3) を満足し, Navier-Stokes 方程式 (2.1) は  $\psi$  に関する Poisson 方程式に加えて円周方向の渦度  $\omega_\theta$  と周速度  $u_\theta$  の時間発展方程式

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} - J(\psi, \omega_\theta) - \frac{\omega_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \left( \frac{2u_\theta}{r} + \frac{1}{Ro} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left( \Delta_2 \omega_\theta - \frac{\omega_\theta}{r^2} \right), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - J(\psi, u_\theta) + \frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{Ro} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left( \Delta_2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right), \quad (2.5)$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{r} D_2 \psi \quad (2.6)$$

に書き換えられる. ここで, 微分演算子は

$$J(g, h) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial r} \right),$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$D_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と定義される<sup>1</sup>. 式 (2.4) – (2.6) は我々の数値シミュレーションでの初期値境界値問題として数値的に解かれる.

図 2.1 の水の表面 AB は変位がなく平坦で応力の働かない境界となっている. また, 表面にシア応力がないので, 周速度と渦度の鉛直微分は応力の働かない境界での境界条件として 0 に設定されている. 壁面の上部での注入口 BC での速度は壁面と同じ周速度を持つため一様であると仮定されており, それゆえに  $u_\theta = 0$  であ

<sup>1</sup>式 (2.1) – (2.6) の導出は 3.1 節を参照されたい.

表 2.1: 数値シミュレーションで用いられる初期条件と境界条件と無次元パラメータ. 条件 5 で,  $f(r, z)$  は格子点での  $u_\theta$  を  $[-10^{-4}, 10^{-4}]$  の一様な分布の乱数で与えられていることを示している.  $\Omega_1 = 1 \times 10^{-7}$  である.

条件	$u_\theta$ の初期条件	$u_\theta$ の流入条件	Reynolds 数	Rossby 数
1	$r\Omega_1$	0	500-3000	$\infty$
2	$\Omega_1 \sin 4\pi r \sin 4\pi z$	0	3000	$\infty$
3	0	0	3000	$5 \times 10^6$
4	$-r\Omega_1 \times 10$	0	3000	$5 \times 10^6$
5	$f(r, z)$	0	3000	$5 \times 10^6$
6	0	0	3000	$10^7 - 10^9$
7	0	$r_2\Omega_1$	3000	$\infty$

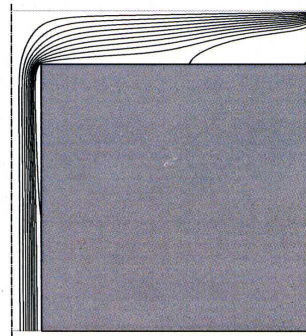


図 2.2: 鉛直断面での流線.  $u_\theta = 0, Re = 3000, Ro = \infty$ .

る. もし慣性座標系で観測すると流入は周速度  $r_2\Omega$  を持つことに注意されたい. 排水口での流出条件は自然な流出条件であり, そのため GF で  $\partial^2\psi/\partial z^2 = \partial\omega_\theta/\partial z = \partial u_\theta/\partial z = 0$  が課されている.

我々は 7 つの設定, すなわち, 表 2.1 に記載されたパラメータと初期条件の条件 1-7 で数値シミュレーションを行う. 鉛直断面の速度の初期条件, すなわち,  $\psi$  と  $\omega_\theta$ , は同じ Reynolds 数で  $Ro = \infty$  における  $u_\theta = 0$  となる定常な二次元流から得られる. 例えば,  $Re = 3000$  では流線は図 2.2 で示される. 条件 1 と 2 では実験は赤道で行われると仮定されているので Rossby 数は無限大に設定されている.  $500 \leq Re \leq 3000$  の範囲でいくつかの Reynolds 数を設定しており, 初期条件  $u_\theta = r\Omega_1$  ( $\Omega_1 = 1 \times 10^{-7}$ ) は条件 1 での正の方向に回転する水槽に水が満ちた後, 長い時間残っている残存渦度を模倣するため取り入れられている. ここで,  $u_\theta$  は上から水槽を見て反時計周りの方向を正とする. 条件 2 は  $Re = 3000$  の場合を扱い, その  $u_\theta$  の初期条件は渦度分布の過渡状態や移流の特徴を研究するために, つぎはぎ細工のような分布で与えている. 条件 3-5 では, Rossby 数は  $Ro = 5 \times 10^6$  で Reynolds 数は  $Re = 3000$  としており, これは北半球で行われる実験を模倣し

ている. すなわち,  $Ro$  の正值は正の方向の実験器具の回転, したがって地球の反時計周りの回転 (北半球) を示唆している. 条件 3 の初期条件  $u_\theta = 0$  は水は回転座標系では周速度成分を持たないことを意味し, 慣性座標系では  $r/(2Ro)$  である. 条件 4 の初期条件  $u_\theta = -r\Omega_1 \times 10$  は水槽に水が満ちた直後に始められた実験を模倣している. 条件 5 は  $u_\theta$  のランダムな初期分布を用いている. バスタブ渦の出現と強化に対する Rossby 数の効果は条件 6 で調べられる. そこでは  $Ro$  の値は  $10^7 \leq Ro \leq 10^9$  の範囲で与えられている. ここで,  $u_r$  と  $u_z$  の初期条件は条件 3 – 6 においては  $Ro = \infty$  で  $u_\theta = 0$  のとき定常解を採用しており, このとき, 数値シミュレーションは容器が一定の角速度  $\Omega = 1/(2Ro)$  で突然回転を始める実験に対応することに注意されたい. バスタブ渦の形成に対する容器の回転の効果は 2 つの種類に分類される. 1 つは流入境界を通しての運動量供給であり, もう 1 つは底面と壁面に働く摩擦力によるトルクである. それゆえ, 条件 7 に従って別のシミュレーションを角運動量供給の効果の評価するために行った. 条件 7 では, 容器は静止 ( $Ro = \infty$ ) しているが, 流入境界で周速度を  $u_\theta = r_2\Omega_1 = 5 \times 10^{-7}$  で与えている.

我々は無次元形で問題を考えるが, ここで実際の空間スケールと速度スケールに注意する. Shapiro(1962) による実験で, 水槽は円形で直径 183cm で 15.2cm の高さであり, 排水口の直径は 0.953cm である. 水槽は完全に排水するまで 20 分かかる. これらのデータとボストンでの  $4.88 \times 10^{-5}$  rad/s である地球の回転の角速度の考察から我々はざっと  $Re \approx 4.5 \times 10^4$ ,  $Ro \approx 5 \times 10^6$  と見積もった<sup>2</sup>. このため, もし我々がボストンと同じ角速度を採用するなら我々の数値シミュレーションは Shapiro(1962) の実験より小さな水槽で低排水率の実験と見なせる. これは我々のコンピュータ設備の限界によるものである.

数値シミュレーションでは, 図 2.1 で描かれた流れの数値領域を動径方向と鉛直方向にそれぞれ  $\Delta r$  と  $\Delta z$  の大きさの等メッシュ間隔に分ける. 空間微分は 4 次精度中央有限差分か 4 次精度片側有限差分によって近似される. Euler 法は有限の時間ステップ  $\Delta t$  での (2.4) 式と (2.5) 式の渦度  $\omega_\theta$  と周速度  $u_\theta$  の時間積分に用いられる<sup>3</sup>. 加速緩和法 (SOR 法) は Poisson 方程式 (2.6) 式を解くのに用いられ, ここでの解の収束は反復サイクルの 2 つの連続解の最大相対誤差が  $10^{-12}$  以下になるときに定義される. 数値シミュレーションの精度評価は  $Re = 3000$  での条件 1 において  $\Delta r$  と  $\Delta z$  に関して 3 つの値の組の設定をとって行われる. 3 つの物理量, すなわち, 最大周速度  $u_{\theta\max}$ , 鉛直方向の全角運動量  $L_z = \int ru_\theta dV$ , 原点での速度の鉛直成分  $u_z(0, 0)$  は表 2.2 で掲載されているように  $u_{\theta\max}$  がピークに達する  $t = 58.7$  で評価される. 我々は 3 つの物理量の相対誤差が 3% かそれ以下となるので数値シミュレーションで  $\Delta r = 0.01$  と  $\Delta z = 0.005$  を用いた.

<sup>2</sup>Shapiro (1962) の実験の値の計算は 3.2 節を参照されたい.

<sup>3</sup>それぞれの数値計算法の説明は 3.3 節を参照されたい.

$(\Delta r, \Delta z)$	$u_{\theta\max}$	$L_z$	$u_z(0, 0)$
(0.005, 0, 0025)	$3.548 \times 10^{-5}$	$4.089 \times 10^{-5}$	-1.022
$\epsilon$	-	-	-
(0.01, 0.005)	$3.436 \times 10^{-5}$	$4.169 \times 10^{-5}$	-1.050
$\epsilon$	3.138%	1.945%	2.782%
(0.02, 0.01)	$3.289 \times 10^{-5}$	$4.257 \times 10^{-5}$	-1.114
$\epsilon$	7.280%	4.103%	9.024%

表 2.2: 数値シミュレーションの精度評価. 条件 1 は  $Re = 3000, Ro = \infty$  のときである.  $t = 58.7$  において  $(\Delta r, \Delta z) = (0.005, 0.0025)$  で  $u_\theta$  がピークに達する. 各物理量の相対誤差  $\epsilon$  は  $(\Delta r, \Delta z) = (0.005, 0.0025)$  のときの値と比較することにより見積もられる.

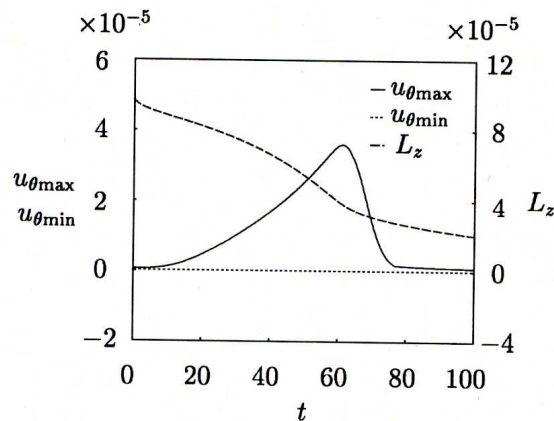


図 2.3:  $u_{\theta\max}, u_{\theta\min}, L_z$  の時間発展. 条件 1 で,  $Re = 3000, Ro = \infty$  の場合.

## 2.4 数値計算結果

### 2.4.1 静止した水槽の流れ

この小節では, 我々は水槽が慣性座標系で静止している場合 (条件 1 と 2,  $Ro = \infty$ ) での数値計算結果を示す. これは赤道地域での実験に対応する. この最初の場合, すなわち, 条件 1 では, 前の節で説明したように  $\psi$  と  $\omega_\theta$  の初期条件はそれぞれのシミュレーションで同じ Reynolds 数で  $u_\theta = 0$  の定常二次元流であり, 周速度  $u_\theta$  は最初に  $\Omega_1 = 1 \times 10^{-7}$  で  $u_\theta = r\Omega_1$  と表現される正の方向の剛体回転により与えられると仮定される. 容器全体にわたっての最大周速度  $u_{\theta\max}$  と最小周速度  $u_{\theta\min}$  の時間発展と,  $z$  軸に沿った全角運動量  $L_z$  はそれぞれ,  $Re = 3000$  に対して図 2.3 に描かれている. 図 2.3 で見られるように, 流入境界条件によると角運動量は水槽に入らず角運動量は排水口を通して水とともに排出されるので全角運動量は時間  $t$  の関数として単調減少する. さらに, それは容器の固体境界により及ぼさ

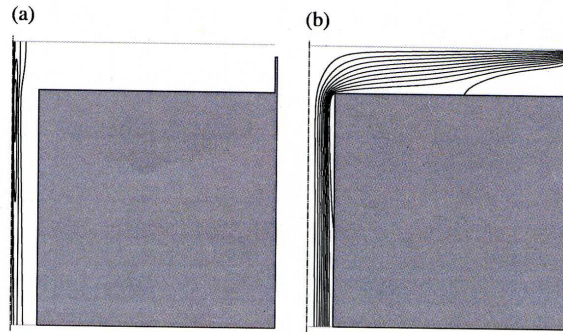


図 2.4: 流れ場. 条件 1 で,  $Re = 3000, Ro = \infty$  の場合. (a) は  $t = 61$  での  $u_\theta$  の等高線, (b) は  $t = 200$  での鉛直断面の流れパターン (流線).

れる摩擦力により減少する. 最大周速度  $u_{\theta\max}$  は  $t \approx 61$  まで初期値  $5 \times 10^{-7}$  から  $3.6 \times 10^{-5}$  まで増加し, その後急速に減少する. 一方, 最小周速度  $u_{\theta\min}$  は初期値 0 から変化せず, それは静止容器 ( $Ro = \infty$ ) で固体境界による摩擦によって反転速度の誘導はなく, 鉛直渦度は動径方向や鉛直方向の流れにより単に移流されることを示唆している. 同様に, 周速度  $u_\theta$  は全循環が液体と固体の境界の間の摩擦により増加しないので摩擦により加速しない. このことは以下で詳細に説明される.

最大周速度  $u_{\theta\max}$  の一時的な増加は角運動量保存則の結果である. ここで, 角運動量は中心軸で大きな  $u_\theta$  をもたらしように中心軸のとても近くに運ばれる.  $t \approx 61$  での  $u_\theta$  の分布の等値線は  $u_{\theta\max}$  の  $1/10$  ごとに図 2.4(a) に描かれている. 最大周速度  $u_{\theta\max} = 3.6 \times 10^{-5}$  は  $(r, z) = (0.04, -0.24)$  に位置し, これは中心軸と水槽の底面の高さにかなり近く, その周辺に大きな  $u_\theta$  の値が分布している. その点で対応する角速度はおよそ  $1 \times 10^{-3}$  であり, これは小さい. しかしながら, この値は初期値より  $10^4$  倍大きい. もし我々がはるかに大きな Reynolds 数と水槽のより大きな半径比  $r_2/r_1$  の一方または両方をとれば, 我々が後に論証するように強い渦運動が引き起こされることに注意されたい.

強い局在化した周速度は, 最初の  $u_\theta$  を持った全ての流体粒子が排水された後の, 時間間隔  $\Delta t \sim O(10)$  の間でその値を保ち, 流れは  $t \approx 80$  以降全く回転のない定常流になる.  $t = 200$  での流れパターンは図 2.4(b) で示されている. このとき, 周速度が全ての領域で消え, なおかつ全角運動量が無視できる. これはバスタブ渦, 中心軸周辺で観測される強い渦, が残存渦度の集合により引き起こされる過渡的な現象であり, 残存渦度なしの軸対称流の不安定によっては引き起こされないことを示唆している. 明らかに, 図 2.2 と 2.4(b) の流線はほぼ同じである.  $t = 200$  での流れ場はほぼ定常であるが, わずかではない渦度が水槽の角 (図 2.1 の D) 周辺の回転領域の中で保たれているので渦無しの流れ (図 2.2) への完全な収束は 200 より長い時間がかかることに注意されたい. 大部分の周速度が排水口を通して排出される.  $t \approx 80$  以降においても回転領域は小さな周速度を保っている.

$500 \leq Re \leq 3000$  の範囲の異なる Reynolds 数に対する  $u_{\theta\max}$  の時間発展は図

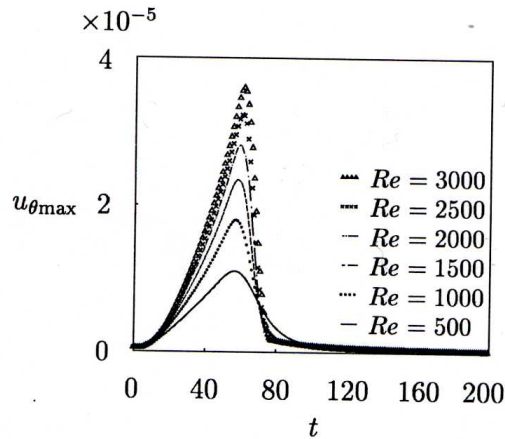


図 2.5: 条件 1,  $Ro = \infty$  での  $u_{\theta\max}$  の時間発展.

2.5 に描かれている. 図では最大周速度  $u_{\theta\max}$  の過渡的な運動はあらゆる Reynolds 数で類似している. それはより大きな Reynolds 数ではより大きな値に達する. それゆえに, 我々のコンピュータ資源ではそのような時間のかかる条件での数値シミュレーションができないが, 3000 よりはるかに大きな Reynolds 数ではとても大きな角速度となると予測できる.

それぞれの Reynolds 数に対して過渡的な時間における  $u_{\theta\max}$  の最高値とその場所  $r_{\max}$  はそれぞれ図 2.6(a) と 2.6(b) に  $Re$  の関数として描かれている. Reynolds 数が増加すると  $u_{\theta\max}$  の最高値は増加し  $r_{\max}$  はより中心軸に近づく. 実際,  $u_{\theta\max}$  は  $Re^{0.66}$  に,  $r_{\max}$  は  $Re^{-0.53}$  に比例することがわかる. 積  $r_{\max}u_{\theta\max}$  は  $Re^{0.13}$  で Reynolds 数にほとんど依存しない. それゆえに,  $u_{\theta\max}$  の強化は鉛直角運動量の保存により説明される.

点  $r_{\max}$  周辺の流体要素は軸方向に伸長され, 流体要素の中の渦は伸長により強められる. この過程は我々に Burgers 渦を思い出させる. 境界条件はお互い異なるが, バスタブ渦はしばしば Burgers 渦 との比較で議論される.

Burgers 渦に対する Stokes の流線関数は現在の形式 ( $z_3 = 1$ ) では

$$\psi = -\frac{1}{2} r^2 (z - 1) \quad (2.7)$$

で与えられる. Burgers 渦の周速度は

$$u_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1 - \exp(-Re r^2/8)}{r} \quad (2.8)$$

で表現される. ここで,  $\Gamma$  は中心  $r = 0$  周辺の循環である. また,  $u_{\theta}$  は最大値

$$u_{\theta\max}^* = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{2x^*}{2x^{*2} + 1} \Gamma Re^{1/2} \quad (2.9)$$

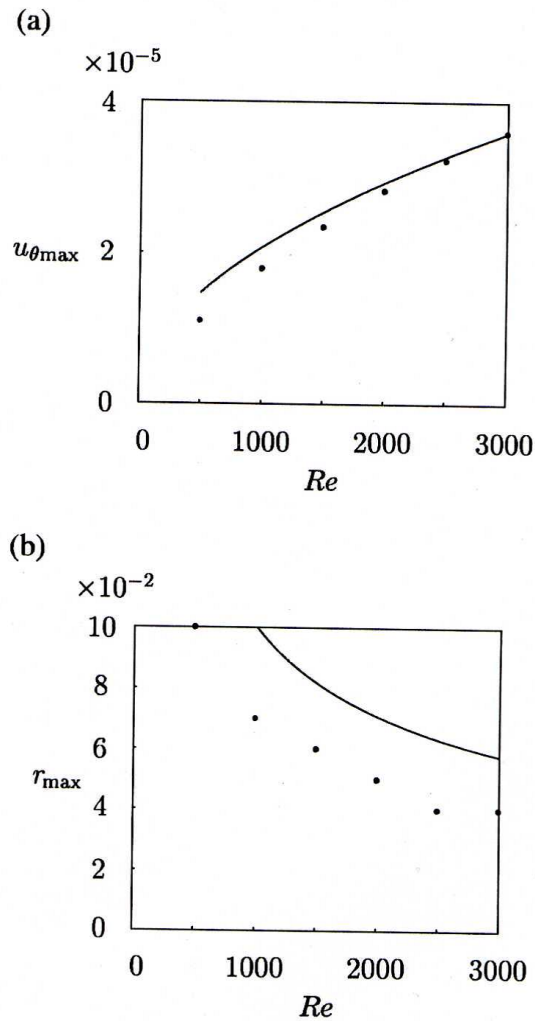


図 2.6:  $u_{\theta\max}$  の最高値の Reynolds 数依存. 条件 1 で,  $Ro = \infty$  の場合. (a) は  $u_{\theta\max}$ , (b) は  $u_{\theta\max}$  が現れる  $r_{\max}$ . 実曲線は Burgers 渦解を示す.

を

$$r_{\max}^* = 2\sqrt{2}x^*Re^{-1/2} \quad (2.10)$$

で持つ<sup>4</sup>. ここで  $x^* (\approx 1.12)$  は式  $(2x^2 + 1)\exp(-x^2) = 1$  の根である<sup>5</sup>. 過渡的な渦の  $u_{\theta\max} \propto Re^{0.66}$  と  $r_{\max} \propto Re^{-0.53}$  の Reynolds 数依存関係は Burgers 渦のそれら, 式 (2.9) と式 (2.10), と類似し, それぞれ図 2.6(a) と図 2.6(b) の実曲線により示される. 図 2.6(a) の実曲線は  $Re = 3000$  で数値的に得られる  $u_{\theta\max}$  に合うように引かれ, 式 (2.9) から  $\Gamma$  を見積ると  $1.83 \times 10^{-5}$  となる. しかしながら, 全体の流れ場の最大となる値  $\Gamma$  は  $Re = 3000$  で  $1.21 \times 10^{-5}$  であり, これは図に引

<sup>4</sup>(2.8) – (2.10) 式は誤りが含まれている. 導出は 3.4 節を参照されたい.

<sup>5</sup> $x^* \approx 1.12$  の導出は 3.5 節を参照されたい.

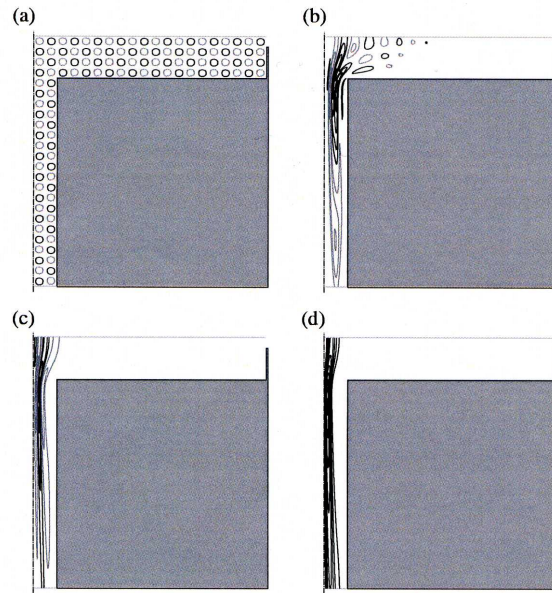


図 2.7:  $u_\theta$  の等値線.  $Re = 3000, Ro = \infty$  となる条件 2 の場合. (a) は  $t = 0$ , (b) は  $t = 10$ , (c) は  $t = 40$ , (d) は  $t = 67$  のときである.

いてある実曲線で見積もられたものよりはるかに小さい<sup>6</sup>. 一方, 図 2.6(b) の実曲線は式 (2.10) の位置  $r_{\max}^*$  を描いており, ここで任意定数は含まれず曲線は唯一に引かれる. 式 (2.7) によると, 排水口の角を通る流線は透過性壁面の最下部を通るものとは異なる. もし透過性壁面の高さ  $z_3 - z_2$  が現在の形状の  $1/4$  の代わりに  $1/100$  であつたら, Burgers 渦モデルは近似として現在の流れにより適合したであろう. なぜならば, 式 (2.7) は  $(r, z) = (5, 99/100)$  (これはより良い形状で透過性の壁の最下部に対応するものである) から来て,  $(r, z) = (1/2, 0)$  (これは底面の排水口の角に対応するものである) を通じる流線を持つからである.

鉛直渦度の移流の振る舞いを説明し, どんな不安定からも鉛直渦度が生成され得ないことを確認するために,  $u_\theta = \Omega \sin 4\pi r \sin 4\pi z$  として表現される  $u_\theta$  のつぎはぎ分布が初期条件 (表 2.1 の条件 2) として採用される.  $u_\theta$  に対する初期条件は図 2.7(a) で示され, ここで  $u_\theta$  の等値線は  $u_\theta > 0$  と  $u_\theta < 0$  の範囲でそれぞれ濃い曲線と薄い曲線により引かれ, 図 2.8 の最高値となるときの  $t = 67$  での  $u_{\theta\max}$  の  $1/10$  ごとに引かれている. 図 2.7(b) – 2.7(d) はそれぞれ  $t = 10, 40, 67$  での周速度分布を示している.  $t = 10$  で, つぎはぎの周速度分布は  $z$  軸に沿って延ばされ中心軸に引き寄せられるように見られる. 入ってくる流れは周速度を持たないので渦のない範囲は全体の流れ場を占めることが確認される.

図 2.7(b) – 2.7(d) に見られるように, 大きな周速度を持つ流体要素は中心軸付近

<sup>6</sup>(2.9) が誤りであったためこのような値となった. 正しい式で  $\Gamma$  を求めると,  $1.29 \times 10^{-5}$  となり, 実曲線で見積もられた値  $1.21 \times 10^{-5}$  により近い値になる.



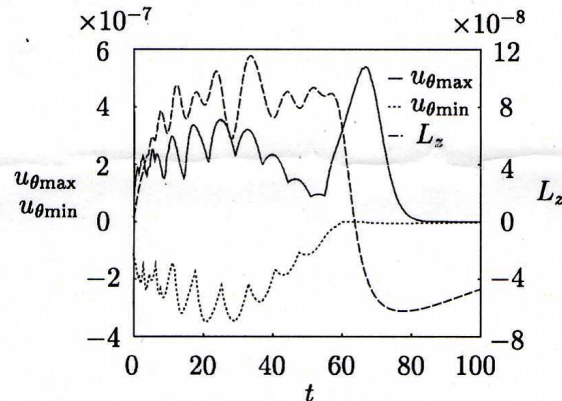


図 2.8:  $u_{\theta\max}, u_{\theta\min}, L_z$  の時間発展.  $Re = 3000, Ro = \infty$  である条件 2 の場合.

の鉛直軸に沿って伸長される. 一方, 周速度のない新しい水は排水口の外側に沿って放水路から出ていく.  $t = 67$  で,  $u_{\theta}$  は  $(r, z) = (0.04, 0.235)$  で空間的・時間的  
 最大値を持つ.  $t = 67$  で最大周速度を持つ流体要素は, 初期位置まで戻すと, それ  
 は初期に入水口のすぐ右上部の格子に位置していたことがわかった.  $t = 80$  の後,  
 流れはゆっくりと鉛直渦度のない二次元流に収束する. この流れ振る舞いは条件 1  
 から始まる数値結果と矛盾がなく, これは静止した容器のバスタブ渦は過渡的な現象  
 であるという結果を支持する.

条件 2 に対する  $u_{\theta\max}, u_{\theta\min}, L_z$  の時間発展は図 2.8 に示されている. ここで  
 $u_{\theta\max}$  と  $u_{\theta\min}$  の両方が  $0 \leq t \lesssim 56$  の間振動することがわかる.  $u_{\theta\max}$  は  $t \approx 67$   
 で最高点に達し, その後単調に減少する. ところが  $u_{\theta\min}$  は  $t \approx 56$  のち減少す  
 る.  $u_{\theta\max}$  の最高点と  $u_{\theta\min}$  の谷の半減期の遅れは周速度の格子の正の部分と負の  
 部分が中心軸に代わる代わる移流されることを確実にする.  $u_{\theta\max}, u_{\theta\min}, L_z$  の振動  
 の期間は図 2.3 の時間スケールより小さい.

## 2.4.2 回転水槽の流れ

この小節では, 我々は表 3.1 の条件 3–6 を用いてバスタブ渦の出現に対する地  
 球の回転の効果について考える. 条件 3 では, 我々は  $Re = 3000$  と  $Ro = 5 \times 10^6$   
 のパラメータ値を用い, 初期条件として水槽のいたるところで  $u_{\theta} = 0$  を仮定し,  
 これは流体全体が容器とともに回転する, 入口部分を通り水槽に入る流れはもし  
 慣性系で観測されると周速度  $r_2/(2Ro)$  を持つことを意味する. 条件 3 に対して  
 $u_{\theta\max}, u_{\theta\min}, L_z$  の時間発展は図 2.9(a) に示されている. 最大周速度  $u_{\theta\max}$  は, 最初  
 は 0 であり,  $t \approx 74$  まで増加し, その後図 2.9(a) に示されるようにおよそ  $4.7 \times 10^{-5}$   
 に飽和する傾向がある. 最大周速度  $u_{\theta\max}$  は中心軸の近く ( $r_{\max} \approx 0.04$ ) で観測

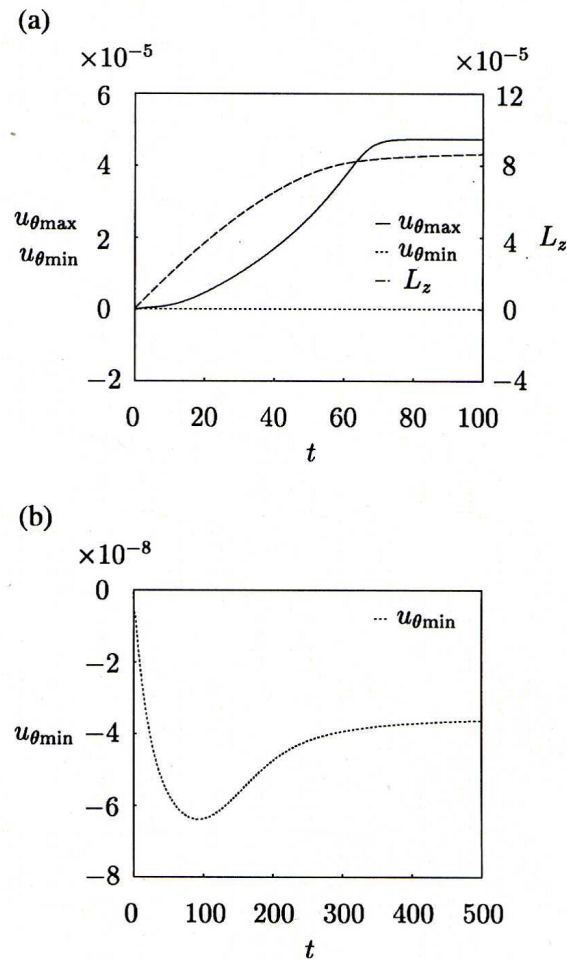


図 2.9:  $u_{\theta\max}$ ,  $u_{\theta\min}$ ,  $L_z$  の時間発展.  $Re = 3000$ ,  $Ro = 5 \times 10^6$  である条件 3 の場合. (a) は  $0 \leq t \leq 100$ , (b) は  $0 \leq t \leq 500$  の  $u_{\theta\min}$  の長時間運動である.

され, これは北半球の台風やトルネードに類似して流れがコリオリ力によって低気圧性回転方向に押しやられることを示していると解釈される. これは中心軸付近で現れるバスタブ渦が低気圧性でコリオリ力によって引き起こされ, バスタブ渦は不安定により創られていないことを示している. この結果は, バスタブ渦のような小規模な流れは及ぼされるコリオリ力の大きさがあまりにも小さいため地球の回転に無関係である, という広く一般的な信仰とは反対である. しかしながら, 本論文で仮定されたような完全な軸対称容器では, とても小さな力でさえバスタブ渦の回転の方向を決め得る. 低気圧性回転方向の円運動へ流体が強制されるのに従って, 全角運動量  $L_z$  [図 2.9(a) の破線曲線] は正の値であり, これは  $8.7 \times 10^{-5}$  に飽和する傾向がある. 図 2.9(b) は 図 2.9(a) の  $u_{\theta\min}$  のグラフの拡大であり,  $u_{\theta\min}$  の長時間運動を示している. 図 2.9(b) では最初 0 である  $u_{\theta\min}$  は  $t \approx 93$  までに  $-6.4 \times 10^{-8}$  に成長し, その後  $-3.6 \times 10^{-8}$  に達し, その絶対値は  $u_{\theta\max}$  の絶対値

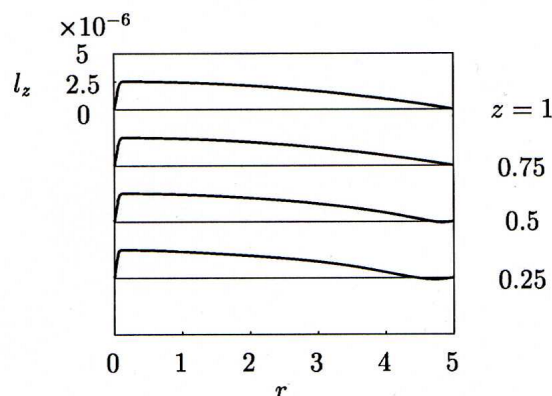


図 2.10:  $z = 0.25, 0.5, 0.75, 1$  の  $t = 500$  での角運動量密度の動径分布.  $Re = 3000, Ro = 5 \times 10^6$  である条件 3 の場合.

よりはるかに小さい. 負の周速度もまた, 以下に示されるように回転領域のコリオリ力によって引き起こされる.

$t = 500$  での局所角運動量密度  $l_z$  の分布は, 今回の実験で得られる流れ場を Noguchi *et al* (2003) と Yukimoto *et al* (2010) で得られた流れ場と比較するために, 図 2.10 に示されている. 彼らは 2 つの異なる渦度の体制を見つけた. 一方は渦核の外側のポテンシャル渦であり, もう一方は底面に沿った境界層流である. ポテンシャル渦は Reynolds 数と Rossby 数の両方が大きいときに形成され, ここで局所角運動量密度は慣性座標系で一定である. もう一方の渦は  $Re$  と  $Ro$  がともに小さいときに形成され, 局所角運動量密度がより大きな動径の位置で大きな値をとる流れ構造を持つ. 図 2.10 の局所角運動量密度の分布は,  $0.1 \lesssim r \lesssim 2$  の範囲でほとんど一定の  $r$  の関数である. 流れは軸周辺のとても狭い領域の外のポテンシャル渦に似ている. コリオリ力によって引き起こされる小さな高気圧性の角運動量は水槽の低いの外側の角近くの回転領域内の底面近くで現れる. ここで, 図 2.10 で示されているように動径方向速度は外側を向いている.

コリオリ力の効果はたとえその大きさが小さくとも容器の流れで無視することができないということが示された. これ以降, 我々は残存渦度の役割, または, 条件 4 を用いてバスタブ渦の形成に対する周速度の役割を調べる. ここで, 周速度の初期条件は  $u_\theta = -10\Omega_1 r = -1 \times 10^{-6} r$  と設定されている. 初期条件は次のような考察から見積もられた. 注水管を通して水が満ちる間引き起こされた角速度は容器の回転の角速度より  $10^3$  倍大きく, 短時間の放置が角速度の大きさを  $10^{-2}$  倍の角速度に減らす. そこで,  ${}_1r$  に 10 をかけたものは残存周速度に対して見積もられたものであり負号は水が満ち高気圧性の方向に回転することを示している. この初期条件は, 容器に水を満たした直後行われ十分な時間待つことなしに地球の回転と反対の方向に渦巻く Shapiro(1962) の実験をまねている. これが表 2.1 の条件 4 の物理的意味である. 条件 4 では, 図 2.11 に示されるように一時的な負の渦が高

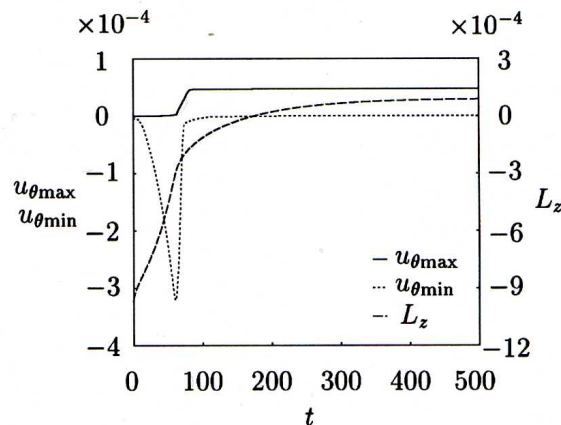


図 2.11:  $u_{\theta\max}$ ,  $u_{\theta\min}$ ,  $L_z$  の時間発展.  $Re = 3000$ ,  $Ro = 5 \times 10^6$  である条件 4 の場合.

気圧性方向の残存周速度により現れる. 条件 4 の最小周速度  $u_{\theta\min}$  は  $t \approx 61$  で最大に達し, その後符号はお互い反対だが条件 1 の  $u_{\theta\max}$  と同様に次第に減衰する. 同様に, 条件 4 の全角運動量は条件 1 の全角運動量と同じように  $t \approx 74$  までに急速に 0 に達する. このように, 残存渦度は容器の回転によるコリオリ力を圧倒し, 高気圧性回転の渦は残存渦度による負の周速度を持つ大部分の流体要素が排出されたときの  $t \approx 74$  までに中心軸近くで観測される. おおよそ  $t \approx 85$  を超えて, 最大周速度  $u_{\theta\max}$  はある有限の初期値を持つ, すなわち, 低気圧性渦がコリオリ力により引き起こされ中心軸周辺で現れる.  $u_{\theta\max}$  の増加は  $u_{\theta\min}$  が減少し始めた後に現れる. これはゼロでない  $u_{\theta\max}$  が新しい流入流体粒子と, その粒子によりもたらされた渦度の集中に起因するからである. 一方, 負の  $u_{\theta\min}$  の初期増加は残存渦度により導かれたものである. これは Shapiro(1962) と Trefethen(1965) により観測された渦の回転の方向の反転に対する我々の説明である. 十分な時間が経過した後, 流れは条件 3 の流れと同じ定常状態に到達する.

長時間経過した後流れが達する定常状態が唯一であることを確かめるため, 我々は周速度の初期条件に対してランダムな分布を採用する. ここで  $u_\theta$  は  $u_\theta(r, z) = f(r, z)$  で与えられ,  $f(r, z)$  は  $[-10^{-4}, 10^{-4}]$  の範囲の一様な乱数である. この条件 (表 2.1 の条件 5) は水槽の中の水が最初にかき回されている実験の条件をまねたものである. この条件で,  $u_{\theta\max}$  と  $u_{\theta\min}$  は, 図 2.12 に見られるようにランダムな周速度の流体粒子が中心軸に到達することに依存する過渡的な時間の間, ゆらいでいる. しかしながら, 過渡的な時間の後, 流れは初期条件にかかわらず条件 3 や 4 の定常状態と同じ定常状態に到達する.

全ての初期擾乱が排出された後に確率される定常状態は Reynolds 数と Rossby 数のみにより唯一に決められる. ここで, 我々は表 2.1 の条件 6 を用いて定常流に対する Rossby 数依存性を議論しよう. 全ての流線関数と周速度分布は採用された範囲の Rossby 数にかかわらず同様の形を持つ. 定常状態の最大周速度  $u_{\theta\max}$  と全

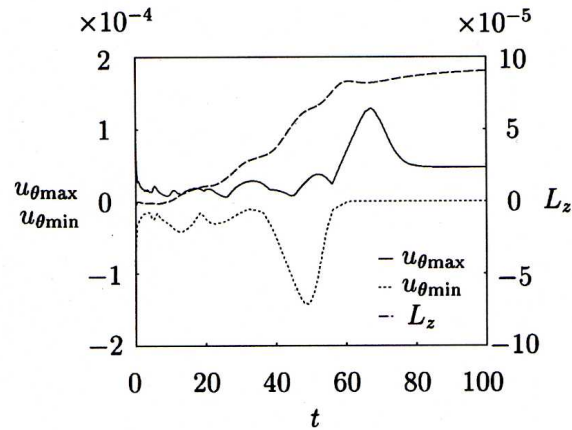


図 2.12:  $u_{\theta\max}, u_{\theta\min}, L_z$  の時間発展.  $Re = 3000, Ro = 5 \times 10^6$  である条件 5 の場合.

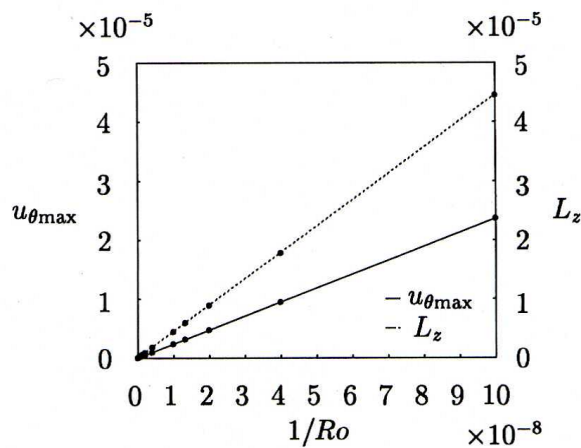


図 2.13: 定常状態の最大周速度  $u_{\theta\max}$  と全角運動量  $L_z$ .  $Re = 3000$  である条件 6 の場合.

角運動量  $L_z$  は図 2.13 に示されている. ここで  $u_{\theta\max}$  と  $L_z$  の両方は  $1/Ro$  に正確に比例することがわかる. これは最大周速度と全角運動量の両方が  $Ro = \infty$  の定常状態で消えることを保証する. それゆえに, 渦は回転なしの静止した容器で最終的に現れない. たとえ残存渦度がしばらくの間一時的な渦を引き起こせたとしても, 強固なバスタブ渦は十分な時間が経過した後静止した水槽で現れないというのが我々の結論である.

## 2.5 議論と概要

我々は水が水槽の底面の排水口を通して排出され、一方で、水は水槽の壁面の入水部分を通して連続的に供給される軸対称容器の流れの数値シミュレーションを行った。静止した容器では、集中した渦が角運動量保存の結果として現れる。しかしながら、渦の出現は過渡的な現象であり、流れは十分な時間が経過した後では全く周速度のない定常状態に達する。回転運動なしの軸対称流の不安定による渦の生成の可能性は、本論文で用いられたパラメータの範囲では除外される。この結果は Noether の定理と矛盾しておらず、この状態はもし閉じた非散逸力学系が空間的または時間的変数の変換のもとで不変であれば、その系は対応する保存的物理量を持つ。ここで、我々は鉛直角運動量が静止軸対称容器内の流れの不安定により生成されるかどうか簡単に議論する。ここで、系は開放散逸系である。現在の場合では、我々の軸対称系は中心軸に関しての回転のもとで不変であり、それゆえ、もしトルクが系に働かず角運動量が排出されなければ全角運動量は保存される。なぜなら、鉛直角運動量が入水部分から供給されないからである。このように、2つの可能なメカニズムが軸対称系の角運動量の生成に関して議論されなければならない。1つはトルクが底面と壁面のいずれかまたは両方の粘性力により角運動量を引き起こすかもしれないことだ。しかしながら、粘性力は角運動量を弱めるのみであり増加させない。なぜなら、粘性力は流れのシアーに抵抗する単なる反応だからである。もう一方は同じ大きさの正負の角運動量が不安定により生成され、正または負のどちらかの角運動量が系の外へ排出される。しかしながら、ある符号の角運動量のみを排出する選択的メカニズムは見つからず、正負両方の角運動量が条件2の数値シミュレーションで等しく排出され保存される。また、過渡的な渦運動の回転の方向は初期状態の残存渦度分布により決定される。渦の方向を予測することは、つぎはぎ分布である  $u_\theta$  の初期条件に対する図 2.8 に示されるように簡単でない。なぜならば、残存渦度は一般的に正確に予測するにはあまりにも小さいからである。

渦度が長い間残存する2つの特殊な流れ領域が存在する。一方は最大周速度が時間間隔  $\Delta t \sim O(10)$  の間観測される水槽の底面の水準の中心軸近くの領域である。もう一方は壁面と底面の角周辺の循環領域である [ $\Delta t \sim O(10^2)$ ]。最も大きい周速度の領域が、しばらくの間底面の水準に存在することは興味深い。なぜなら、流れは中心軸に沿って強く伸長されるからである。2つの領域の渦度の符号は逆である。中心軸近くの渦度は最初に排出され、循環領域のそれは長い時間残存し、それは結局は排水口を通して流出するか、または粘性により減衰する。そして、流れは鉛直渦度なしの定常状態に達するだろう。

回転容器内では、明確な回転の方向をもった定常渦は、すべての残存渦度が排水口を通して排出された後、常に確立する。これは初期条件に関わりなく Reynolds 数と Rossby 数のみにより唯一に決められ、回転の方向は容器の回転の方向と同じである。定常状態の最大周速度は Rossby 数と逆比例することが示されている。これはバスタブ渦は静止した軸対称容器で形成されないという我々の結論を正当化

する。容器の回転と反対の渦はコリオリ力より強い残存渦度を持つ初期条件で観測することができる。また、定常な低気圧性回転渦は過渡的な高気圧性渦が次第に消えていく後現れるので、我々は渦の反転も観測する。

我々は容器の回転が定常渦運動を生じ、それゆえに有限の大きさの角運動量を維持することがわかった。容器の回転の効果は、角運動量の生成に関して 2 つの種類に分類することができる。一つは慣性座標系で観測される流入境界のゼロでない周速度による角運動量の連続した流入であり、もう一方は壁面と底面の摩擦力による角運動量の供給である。渦形成に対するそれぞれの効果の寄与を評価するため、我々は容器が静止しており ( $Ro = \infty$ ) Reynolds 数が  $Re = 3000$  であり、周速度の流入境界条件が  $u_\theta = r_2\Omega_1 = 5 \times 10^{-7}$  で与えられると仮定されている条件 7 の数値シミュレーションを行った。条件 3 と条件 7 のシミュレーションの物理的違いは、条件 7 のシミュレーションでは回転する壁面と底面で引き起こされる駆動力がないことである。また、2 つのシミュレーションの比較は摩擦力による角運動量供給の大きさを与える。数値結果は流れ場が条件 7 のシミュレーションで十分な時間が経過した後、定常状態に到達することを示す。定常状態の最大周速度  $u_{\theta\max}$  は  $4.7 \times 10^{-5}$  であり、これは条件 3 のシミュレーションのそれとほぼ同じである。このことは我々に摩擦駆動力による追加速度が無視していいほど小さいことを伝えている。条件 7 のシミュレーションの定常状態の全角運動量は  $1.42 \times 10^{-4}$  である。一方、容器内の流体の剛体回転の角運動量  $9.8 \times 10^{-5}$  が加えられるので、図 2.9(a) で示されている回転座標系での角運動量  $8.7 \times 10^{-5}$  は慣性系の  $1.85 \times 10^{-4}$  の値になる。条件 3 のシミュレーションの  $1.85 \times 10^{-4}$  の値と条件 7 のシミュレーションの  $1.42 \times 10^{-4}$  の値の間の違いは摩擦力による角運動量供給によるものだ。すなわち、条件 3 のシミュレーションの定常状態で保たれる全角運動量の 4 分の 1 が摩擦力により供給され、残りは流入境界での流入とともに来る角運動量の連続した流入により維持される。

我々はまだ Noguchi *et al.*(2003) や Yukimoto *et al.*(2010) が報告した解のあらゆる分岐も確認していない。これは容器の形状の違いによる結果であろう。我々の容器は水槽の下に排水口を持ち、一方 Noguchi *et al.* (2003) と Yukimoto *et al.* (2010) に用いられた容器は水槽の底面に排水口なしに水が排水される単純な穴のみを持つ。流れがはるかに小さな Rossby 数に対する分岐をするかどうかは今でも解決のつかない疑問である。

ここで、我々は数値シミュレーションで得られた渦運動の自転速度を、Shapiro(1962)の実験で観測されたものと定量的に比較すべきである。Shapiro(1962)の実験では、バスタブ渦は“渦浮き”で可視化されている。十字架は木の 2 つの細長い小片で作られており、1 インチの長い小片はそれぞれの小片の中心を通る細いワイヤーと一緒に留められている。十字架は水の表面のすぐ下の水平面上で浮いている。Shapiro(1962) はバスタブ渦の成長の 3 つの段階を報告した。水槽は完全に排出されるまで約 20 分かかる。最初の 12 – 15 分の間、浮きの回転は目で見ることができなかった。約 15 分で、渦浮きの回転は見えるようになり、だんだん増加した。容

器がほぼ完全に排出された実験の終わりごろ、十字架は3秒か4秒で1回転した。

我々のシミュレーションを Shapiro(1962) の観測と比較するため、我々は条件1の数値結果から渦浮きの回転率を見積もる。表面の無次元最大周速度  $u_{\theta\max}^S$  は図 2.4 から地点  $r_{\max}^S \approx 8 \times 10^{-2}$  で  $u_{\theta\max}^S \approx 2 \times 10^{-5}$  と見積もられる。最大周速度  $u_{\theta\max}$  は図 2.6(a) で示されるように  $Re^{0.66}$  に比例し、半径比  $r_2/r_1$  にも比例する。なぜならば、最初水槽の壁面近くの流体成分に含まれている渦度は中心へと移流され角運動量はほぼ保存されるからである。Shapiro(1962) の実験の Reynolds 数 ( $Re = 4.5 \times 10^4$ ) と半径比 ( $r_2/r_1 \approx 200$ ) は我々のシミュレーションのそれら ( $Re = 3000$  と  $r_2/r_1 = 10$ ) よりそれぞれ 15 と 20 倍大きい。もし我々の数値シミュレーションが Shapiro(1962) の実験のそれらと同じ Reynolds 数と同じ半径比のもとで行われていたならば、そして、もし上記のスケーリング則が表面の  $u_{\theta\max}^S$  でも成立していれば、表面の無次元最大周速度  $u_{\theta\max}^S$  は  $2.4 \times 10^{-3}$  となっただろう。最大周速度  $u_{\theta\max}$  が現れる動径位置  $r_{\max}$  は図 2.6(b) で示されているように  $Re^{-0.53}$  に比例する。最大周速度が表面で現れる動径位置  $r_{\max}^S$  に対する Reynolds 数が同じと仮定すると、もし Shapiro(1962) の実験のものと同じ Reynolds 数を用いると  $r_{\max}^S$  は  $1.9 \times 10^{-2}$  になる<sup>7</sup>。  $Re \sim O(10^4)$  での流れは乱れており軸対称でないにちがいないので、これらの見積もりはとても粗いことに注意されたい。Shapiro(1962) の実験の特徴的な長さや速度は、それぞれ排水口の直径  $d = 0.952\text{cm}$  と排水口の平均速度  $\bar{w}_{\text{exp}} \approx 4.7\text{m/s}$  である。これらの特徴的な長さや速度を用いると、表面の有次元最大周速度とその動径位置はそれぞれ  $\tilde{u}_{\theta\max}^S = 1.1 \times 10^{-2}\text{m/s}$  と  $\tilde{r}_{\max}^S = 1.8 \times 10^{-4}\text{m}$  となる。これは  $1 \times 10^{-1}\text{s}$  で回転するという結果である。しかしながら、十字架はこの割合では回転しない。ここで、我々は十字架が  $r_{\text{cross}} = 1/4$  インチ ( $6.35 \times 10^{-3}\text{m}$ ) の流体の角速度で回転することを仮定する。  $r > r_{\max}^S$  に対して  $u_{\theta} \propto 1/r$  なので、  $r_{\text{cross}}$  での周速度  $u_{\text{cross}}$  は  $3.1 \times 10^{-4}\text{m/s}$  であると見積もられ、これは  $1 \times 10^2$  秒のある回転の結果である。見積もられた回転の割合は Shapiro(1962) の実験より  $1/30$  倍小さいが、Shapiro(1962) の実験の回転割合は容器がほぼ完全に排出される実験の終わり付近で計測され、我々の実験は水の高さが減少すると回転率が增加することを示している。これゆえに、我々のシミュレーションは Shapiro(1962) の実験の結果と定質的に一致すると推測する。

我々の日々の生活で観測される渦運動の回転の方向は唯一に決定することができない。なぜなら、本論文で仮定された軸対称を打ち破るあまりにも多くの要因があるからである。最も重要な要因は容器の非軸対称性である。水表面の空気の流れと不均質な気温分布は、バスタブの設置場所に強く依存し、水の表面の引き起こされた波と同様に回転の方向の決定に効果を与え得る。実際、両方の回転の方向が実

<sup>7</sup>Shapiro(1962) の実験の  $u_{\theta\max}^S$  と  $r_{\max}^S$  の値の見積もりを確認する。  $u_{\theta\max}^S$  は  $Re^{0.66}$  と半径比  $r_2/r_1$  に比例し、Shapiro(1962) の実験では  $Re$  の値が本論文の 15 倍、半径比  $r_2/r_1$  が本論文の 20 倍である。我々の実験の  $u_{\theta\max}^S \approx 2 \times 10^{-5}$  の値を  $15^{0.66} \times 20$  倍すると、  $u_{\theta\max}^S \approx 2.389 \times 10^{-3}$  となり、本論文の  $2.4 \times 10^{-3}$  となる。  $r_{\max}^S$  は  $Re^{-0.53}$  に比例し、Shapiro(1962) の実験では  $Re$  の値が本論文の 15 倍なので、我々の実験の  $r_{\max}^S \approx 8 \times 10^{-2}$  の値を  $15^{-0.53}$  倍すると  $r_{\max}^S \approx 1.904 \times 10^{-2}$  となり、本論文の  $1.9 \times 10^{-2}$  となる。



---

際のバスタブで観測される。もし我々が注意深く軸対称容器を用意し、あらゆる実験条件が軸対称であれば、過渡的な渦は現れ回転の方向は正確な赤道上で残存渦度により決められるだろう、というのが我々の結論だ。仮に容器と実験条件が完全に軸対称としても、我々は地球と同じ回転の方向の定常渦を観測するであろう。そして、コリオリ力の大きさがたとえ極めて小さくとも、それが渦の回転の方向を決める唯一の要因であるため、渦の回転の方向は正確な赤道を除きコリオリ力により唯一に決められるであろう。非軸対称容器のバスタブ渦のメカニズムの同一化が我々の将来の仕事である。

## 第3章 論文の補足

### 3.1 式 (2.1) – (2.6) の導出.

式 (2.1) – (2.6) を導出する. まず, 流体力学の基礎方程式は,

1. 連続の式 (質量保存則)
2. 運動方程式 (運動量保存則)
3. エネルギー方程式
4. 状態方程式

であるが, ここで使用するのは 1, 2 のみである. まず, 連続の式について考える. 連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

であり, (3.1) 式を展開すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (3.2)$$

であるが, (3.2) 式は Euler 的記述である. Lagrange 的記述と Euler 的記述の関係式は

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad (3.3)$$

であるため, (3.3) 式を用いて (3.2) 式を Lagrange 的記述に書き直すと,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.4)$$

となる. 今回は非圧縮の流体を考えているので,  $d\rho/dt = 0$  であり, (3.4) は

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.5)$$

となるが,  $\rho \neq 0$  であるため,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.6)$$

となり, 本文の (2.2) 式となる.

次に, 運動方程式 について考える. 今回は粘性流体を考察の対象とするので, 運動方程式は Navier - Stokes 方程式を用いる. このとき,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} - g\hat{\mathbf{k}} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (3.7)$$

となる. (3.7) 式の右辺第 1 項は圧力傾度力, 第 2 項はコリオリ力, 第 3 項は重力, 第 4 項は粘性力であるが, 第 3 項の重力は今回は考えない. また,  $\rho = 1$  とし,  $\boldsymbol{\Omega}$  は  $z$  方向のベクトルなので  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{k}}$  として (3.7) 式を書き換えると,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\Omega \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (3.8)$$

となる.

Navier-Stokes 方程式の無次元化を行う. 無次元化のための式は,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{w} \mathbf{u}^*, & (x, y, z) &= d(x^*, y^*, z^*), \\ \nabla &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{d} \left( \frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*}, \frac{\partial}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{d} \nabla^*, \\ t &= \frac{d}{\bar{w}} t^*, & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\bar{w}}{d} \frac{\partial}{\partial t^*}, & p &= \bar{p} p^* \end{aligned} \quad (3.9)$$

である. \* の付いた量が無次元変数である. (3.9) 式を用いて (3.8) 式を無次元化すると,

$$\frac{\bar{w}^2}{d} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\bar{w}^2}{d} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* + 2\Omega \bar{w} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}^* = -\frac{\bar{p}}{d} \nabla^* p^* + \frac{\nu \bar{w}}{d^2} \Delta^* \mathbf{u}^*. \quad (3.10)$$

(3.10) 式を  $\bar{w}^2/d$  で割り,  $\bar{p} = 1/\bar{w}^2$  とし, \* を省略すると,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{Ro} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \quad (3.11)$$

となり, 本文の (2.1) 式となる. ここで,

$$\frac{1}{Ro} = \frac{2d\Omega}{\bar{w}}, \quad \frac{1}{Re} = \frac{\nu}{d\bar{w}} \quad (3.12)$$

であり,  $Ro$  は Rossby 数,  $Re$  は Reynolds 数である.

ここで, 流出量  $Q$  を求める. 流出量  $Q$  は排水口の底面積  $(d/2)^2 \pi$  と流速  $\bar{w}$  と単位時間と密度 (ここでは 1) の積なので,

$$Q = \left( \frac{d}{2} \right)^2 \times \pi \times \bar{w} \times 1 \times 1 = \frac{d^2}{4} \pi \bar{w} \quad (3.13)$$

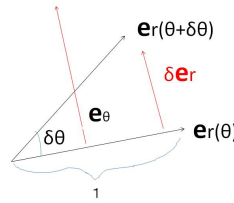


図 3.1: 単位ベクトル  $e_r$  の角方向依存性についての模式図.  $\partial e_r / \partial \theta = \lim_{\delta \theta \rightarrow 0} \delta e_r(\theta) / \delta \theta = \lim_{\delta \theta \rightarrow 0} e_\theta \cdot \delta \theta / \delta \theta = e_\theta$

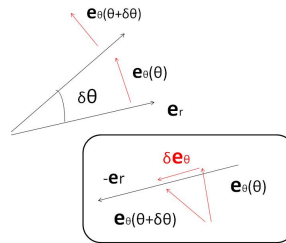


図 3.2: 単位ベクトル  $e_\theta$  の角方向依存性についての模式図.  $\partial e_\theta / \partial \theta = \lim_{\delta \theta \rightarrow 0} \delta e_\theta(\theta) / \delta \theta = \lim_{\delta \theta \rightarrow 0} -e_r \cdot \delta \theta / \delta \theta = -e_r$

となり,

$$\bar{w} = \frac{4Q}{\pi d^2} \quad (3.14)$$

となる. (3.14) 式を用いると, (3.12) 式より  $Ro$  と  $Re$  はそれぞれ,

$$Ro = \frac{\bar{w}}{2\Omega d} = \frac{2Q}{\pi \Omega d^3}, \quad Re = \frac{d\bar{w}}{\nu} = \frac{4Q}{\pi \nu d} \quad (3.15)$$

となり, 本文で与えられている無次元変数が導出された.

次に, 本文の (2.1) 式, (2.2) 式を円筒座標系の成分表示にする.  $r$  方向の単位ベクトルを  $e_r$ ,  $\theta$  方向の単位ベクトルを  $e_\theta$ ,  $z$  方向の単位ベクトルを  $\hat{k}$  とする. デカルト座標系では単位ベクトルの空間微分は全てゼロとなるが, 円筒座標系では微分してもゼロにならない単位ベクトルが存在することに注意する. 具体的には, ある点から  $\theta$  進んだ点での  $e_r$  と  $e_\theta$  はもとのベクトルの方向とは異なる. 図 3.1, 3.2 に示されているように,

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial e_r}{\partial \theta} = e_\theta, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -e_r \quad (3.16)$$

となるため, 例えばベクトルの成分  $u_\theta e_\theta$  を  $\theta$  で微分した際に  $\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} e_\theta$  の項だけでなく  $u_\theta \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta}$  の項も現れることに注意されたい.

ベクトル  $\mathbf{u}$  を単位ベクトルを用いて成分表示にすると,

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \hat{\mathbf{k}} \quad (3.17)$$

となる. また,  $\nabla$  を方位角方向の変化  $\delta$  に伴う距離の変化量が  $r\delta\theta$  となることに注意して求めると,

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.18)$$

となる.

(2.2) 式について,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) \\ &= \left\{ \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) u_r \right\} \cdot \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left\{ \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) u_\theta \right\} \cdot \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left\{ \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) u_z \right\} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \frac{1}{r} u_r \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

したがって, 連続の式 (2.2) の円筒座標表示は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3.20)$$

(2.1) 式の左辺第一項について,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial u_r}{\partial t} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial t} \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.21)$$

左辺第二項について,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \left( u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \hat{\mathbf{k}}) \\
&= \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) \mathbf{e}_r \\
&\quad + \left( u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \\
&\quad + \left( u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{k}}. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

左辺第三項について,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} &= u_r (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_r) + u_\theta (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_\theta) + u_z (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}) \\
&= u_r \mathbf{e}_\theta - u_\theta \mathbf{e}_r. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

右辺第一項について,

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}. \tag{3.24}$$

右辺第二項について,

$$\begin{aligned}
\Delta &= \nabla^2 \\
&= \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

なので, 粘性項  $D$  は

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{u} &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \hat{\mathbf{k}}) \\
&= D_r \mathbf{e}_r + D_\theta \mathbf{e}_\theta + D_z \hat{\mathbf{k}} \tag{3.26}
\end{aligned}$$

であり,

$$D_r = \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \tag{3.27}$$

$$D_\theta = \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{u_\theta}{r^2}, \tag{3.28}$$

$$D_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \tag{3.29}$$

である. (3.21) – (3.29) 式より, (2.1) 式の  $r$  成分は,

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta \partial u_r}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{1}{Ro} u_\theta = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} D_r \quad (3.30)$$

となり,  $\theta$  成分は,

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta \partial u_\theta}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta u_r}{r} + \frac{1}{Ro} u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} D_\theta \quad (3.31)$$

となり,  $z$  成分は,

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta \partial u_z}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} D_z \quad (3.32)$$

となる.

運動方程式に  $\nabla \times$  を作用させ, 渦度方程式を求める. ここで,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  である. まず, ベクトル恒等式

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla \left\{ \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right\} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (3.33)$$

を用いると, Navier - Stokes 方程式は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left\{ \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right\} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{Ro} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \quad (3.34)$$

となる. 左辺第一項について,

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}. \quad (3.35)$$

左辺第二項について, 任意のスカラー関数  $f$  に対して  $\nabla \times \nabla f = 0$  となるため, ゼロとなる. 左辺第三項について, ベクトル恒等式

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} \quad (3.36)$$

で  $\mathbf{A} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}$  とすると, 任意のベクトル  $\mathbf{A}$  に対して  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$  より (3.36) 式の右辺第三項が消える. さらに連続の式 (3.6) より, (3.36) 式の右辺第四項も消えるので, (3.36) 式は

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}. \quad (3.37)$$

となる. 左辺第四項について, (3.36) 式において  $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{u}$  とし,  $\hat{\mathbf{k}}$  は  $z$  方向の単位ベクトルなので微分するとゼロとなり, 右辺第一項と第四項は消え,

$$\nabla \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}) = -(\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \hat{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (3.38)$$

右辺第一項について,

$$\nabla \times \nabla p = 0. \quad (3.39)$$

右辺第二項について, ここでは特別な操作は行わない. これらより, 渦度方程式は,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{Ro} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \frac{1}{Re} \nabla \times \Delta \mathbf{u}. \quad (3.40)$$

ここから, 各項の  $\theta$  成分を求める.

左辺第一項について,

$$\left[ \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \right) \right]_{\theta} = \frac{\partial \omega_{\theta}}{\partial t}. \quad (3.41)$$

左辺第二項について,

$$[(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_{\theta} = \omega_r \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} + \frac{\omega_{\theta}}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \omega_z \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + u_r \frac{\omega_{\theta}}{r}. \quad (3.42)$$

左辺第三項について,

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}]_{\theta} = u_r \frac{\partial \omega_{\theta}}{\partial r} + \frac{u_{\theta}}{r} \frac{\partial \omega_{\theta}}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial \omega_{\theta}}{\partial z} + \omega_r \frac{u_{\theta}}{r}. \quad (3.43)$$

左辺第四項について,

$$[(\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega}]_{\theta} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \omega_{\theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \omega_{\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \omega_{\theta}. \quad (3.44)$$

左辺第五項について,

$$\left[ -\frac{1}{Ro} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right]_{\theta} = -\frac{1}{Ro} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z}. \quad (3.45)$$

右辺について,

$$\begin{aligned} [\nabla \times \Delta \mathbf{u}]_{\theta} &= \left( \frac{\partial D_r}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial r} \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial u_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ &= \Delta \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (3.46)$$



ここで今、非圧縮・軸対称であるため、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0. \quad (3.47)$$

(3.47) 式と, (3.41) – (3.46) 式より渦度方程式の  $\theta$  成分は,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} \omega_\theta + u_r \frac{\partial}{\partial r} \omega_\theta + u_z \frac{\partial}{\partial z} \omega_\theta \right) - \left( \omega_r \frac{\partial}{\partial r} u_\theta + \omega_z \frac{\partial}{\partial z} u_\theta \right) + \frac{\omega_r u_\theta}{r} - \frac{u_r \omega_\theta}{r} - \frac{1}{Ro} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ & = \frac{1}{Re} \left\{ \Delta \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

となる. (3.48) 式の左辺第一項が tendency term, 第二項と第三項が移流項, 第四項と第五項が傾斜項, 第六項と第七項が曲率項, 第八項がコリオリ項, 右辺が粘性項である.

また,

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \left( -\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad (3.49)$$

なので, (3.47) 式より,

$$\omega_r = -\frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad \omega_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \omega_z = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}. \quad (3.50)$$

と, 本文の (2.3) 式の流れ関数

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3.51)$$

を導入し, (3.48) 式を整理する. 移流項は,

$$\left( u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \omega_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} = -J(\psi, \omega_\theta). \quad (3.52)$$

ここでは, 任意の関数  $g, h$  に対して

$$J(g, h) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial r} \right) \quad (3.53)$$

となるヤコビアン  $J(g, h)$  を用いた. 傾斜と曲率項の第一項とコリオリ項は,

$$-\left( \omega_r \frac{\partial}{\partial r} u_\theta + \omega_z \frac{\partial}{\partial z} u_\theta \right) + \frac{\omega_r u_\theta}{r} - \frac{1}{Ro} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = -\left( \frac{2u_\theta}{r} + \frac{1}{Ro} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial z}. \quad (3.54)$$

曲率項の第二項は,

$$-\frac{u_r \omega_\theta}{r} = -\frac{\omega_\theta \partial \psi}{r^2 \partial z}. \quad (3.55)$$

粘性項は,

$$\frac{1}{Re} \left\{ \Delta_2 \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right\} = \frac{1}{Re} \left( \Delta_2 \omega_\theta - \frac{\omega_\theta}{r^2} \right). \quad (3.56)$$

(3.52)–(3.56) 式より, (3.48) 式は,

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} - J(\psi, \omega_\theta) - \frac{\omega_\theta \partial \psi}{r^2 \partial z} \left( \frac{2u_\theta}{r} + \frac{1}{Ro} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left( \Delta_2 \omega_\theta - \frac{\omega_\theta}{r^2} \right) \quad (3.57)$$

となり, 本文の (2.4) 式となる.

次に本文の (2.5) 式を導出する. (3.31) 式に (2.3) 式を代入し, (3.47) 式を用いると,

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r^2} u_\theta \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{Ro r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{Re} D_\theta \quad (3.58)$$

となり, (3.28) 式は

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3.59)$$

を用いると,

$$D_\theta = \Delta_2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \quad (3.60)$$

なので, (3.58) 式は (3.53) 式と (3.60) 式を用いて,

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - J(\psi, u_\theta) + \frac{u_\theta \partial \psi}{r^2 \partial z} + \frac{1}{Ro r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left( \Delta_2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \quad (3.61)$$

となり, 本文の (2.5) 式となる.

次に本文の (2.6) 式を導出する. (3.50) 式の  $\omega_\theta$  に (2.3) 式を代入すると,

$$\omega_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad (3.62)$$

となり,

$$D_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.63)$$

となる  $D_2$  を用いると, (3.62) 式は,

$$\omega_\theta = \frac{1}{r} D_2 \psi \quad (3.64)$$

となり, 本文の (2.6) 式となる. 以上より, 本文の (2.1) – (2.6) 式が導出された.

## 3.2 数値計算法の説明

### 3.2.1 差分法

差分法とは、微分方程式を解く数値解析における離散化手法のひとつである。関数が2つの変数値に対してとる値の間の有限な差を差分といい、この差分を変数値の差で割って得られる商を差分商という。差分法は微分を差分商で近似することにより微分方程式を解くものであり、偏微分方程式の数値解法を特に有限差分法という。有限差分法には中央有限差分法(中心差分)、片側有限差分法があり、片側有限差分法には前進(前方)差分、後退(後方)差分がある。

前進差分とは、本来の微分をとる点  $x$  あるいは  $n$  に対して、近似としてその次の点  $n+1$  と  $n$  との間で差分をとる方法であり、次のように式で表すことができる。

$$\Delta u(x) = u(x+h) - u(x) = u_{n+1} - u_n. \quad (3.65)$$

最も直感的で理解しやすい前進差分法として Euler 法がある。Euler 法とは、時間に関する1階常微分方程式の数値解法の1つである。しかし、1階常微分方程式の数値解法としては精度が悪く、方程式の解に収束しないこともある。微分の定義が

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = f(t_n, u_n) \quad (3.66)$$

であることから、これを変形し、

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_n, u_n) \quad (3.67)$$

として離散化させ、解を得る方法である。本論文では、Euler 法は有限の時間ステップ  $\Delta t$  での(2.4)式と(2.5)式の渦度  $\omega_\theta$  と周速度  $u_\theta$  の時間積分に用いられている。

後退差分とは、 $n$  とその前の点  $n-1$  との間で差分をとる方法であり、次のように式で表すことができる。

$$\Delta u(x) = u(x) - u(x-h) = u_n - u_{n-1}. \quad (3.68)$$

中心差分とは、 $n$  に対して、 $n+1$  と  $n-1$  との間で差分をとる(前進差分と後退差分を平均する)方法であり、次のように式で表すことができる。

$$\Delta u(x) = u\left(x + \frac{1}{2}h\right) - u\left(x - \frac{1}{2}h\right) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2} = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2}. \quad (3.69)$$

有限差分法には2次精度、4次精度など様々な精度がある。中心差分を例にとる

と, 上記の中心差分の式は 2 次精度であり, 4 次精度はさらに  $x$  方向に  $\pm\Delta x/2$  ずらして  $u$  をテイラー展開して差をとり変形し,  $(\Delta x)^4$  以上の項を無視したものであり, より精度が高くなる. 本論文では 4 次精度中央有限差分か 4 次精度片側有限差分が空間微分で用いられている.

### 3.2.2 反復法

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  で表される方程式があり, それを同値な  $\mathbf{x} = \psi\mathbf{x} = M\mathbf{x} + c$  という方程式に変形し, 初期値  $x_0$  から出発して逐次代入  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \psi(\mathbf{x}^{(k)})$  を行って解を求める方法が反復法である. 代表的な反復法はヤコビ法, ガウス・ザイデル法, SOR 法 (加速緩和法) の 3 種類ある.

ヤコビ法とは, まず, 行列  $A$  を対角成分  $D$ , 左下三角行列  $E$ , 右上三角行列  $F$  に分け, 非対角成分  $E, F$  を右辺に移項した形において反復を行う方法である. 次のように式で表すことができる.

$$\mathbf{x}^{k+1} = -D^{-1}(E + F)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.70)$$

ガウス・ザイデル法とは, ヤコビ法においてすべての量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  に各段階で得られている最新のデータを代入するようにしたものである. この方法では, 新しい値が計算されたならばただちにもとの値と置き換えられるから, ヤコビ法と比較して記憶場所が節約できる. 次のように式で表すことができる.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(D + E)^{-1}F\mathbf{x}^{(k)} + (D + E)^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.71)$$

SOR 法 (加速緩和法) とは, ガウス・ザイデル法において各段階で計算された値  $x_j^{(k+1)}$  を次段でそのまま採用せずに, ガウス・ザイデル法で本来修正される量  $x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}$  に 1 より大きい加速パラメータ  $\omega$  を乗じてこの修正量を拡大し, これを前段で得られている近似値に加える方法である. 次のように式で表すことができる.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I + \omega D^{-1}E)^{-1}\{(1 - \omega)I - \omega D^{-1}F\}\mathbf{x}^{(k)} + \omega(D + \omega E)^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.72)$$

本論文では, SOR 法 (加速緩和法) は Poisson 方程式 (2.6) 式を解くのに用いられている.

### 3.3 Shapiro (1962) の実験の値の計算

Shapiro (1962) の実験で用いられた  $\Omega$  の確認, 排出量  $Q$  と排水口の平均流速  $\bar{w}$ , Reynolds 数と Rossby 数の計算を行う. この実験で与えられた値は, 水槽の直径は  $r = 183$  cm, 水槽の高さは  $h = 15.2$  cm, 排水口の直径は  $d = 0.953$  cm, 排出にかかる時間は  $T = 1200$  s, 実験が行われたボストンでの角速度は  $\Omega = 4.88 \times 10^{-5}$  rad/s であり, 理科年表 (2011) より水の運動学的粘性  $\nu = 0.010038$  cm<sup>2</sup>/s(20 °C) である.

まず,  $\Omega = 4.88 \times 10^{-5}$  の値を確認する.

$$\Omega = \Omega_E \sin \phi_B \quad (3.73)$$

であり,  $\Omega_E = 2\pi/86400$  (地球の角速度),  $\phi_B \approx 42^\circ$  (ボストンの北緯) で,  $\sin 42^\circ \approx 6.69 \times 10^{-1}$  から値を求めると,  $\Omega = 4.86 \times 10^{-5}$  rad/s となり, 正しいと言える.

次に, 排出量  $Q$  および 平均流速  $\bar{w}$  の値を求める. (3.13) 式より

$$Q = \frac{\pi(r/2)^2 h}{4T} \quad (3.74)$$

なので, 値を求めると,  $Q \approx 333$  cm<sup>2</sup>/s となる. また, (3.14) 式より,  $\bar{w} \approx 467$  cm/s となる.

また, Reynolds 数と Rossby 数の計算を行う. (3.15) 式より,

$$Re = \frac{4Q}{\pi \nu d}, \quad Ro = \frac{2Q}{\pi \Omega d^3} \quad (3.75)$$

であり, (3.74) 式を (3.75) 式に代入することにより

$$Re = \frac{r^2 h}{\nu d T}, \quad Ro = \frac{r^2 h}{2 \Omega d^3 T} \quad (3.76)$$

となる. (3.76) 式より Reynolds 数と Rossby 数の値を計算すると,  $Re \simeq 4.4 \times 10^4$ ,  $Ro \simeq 5.0 \times 10^6$  となり, およそ本文で見積もられた値になる.

### 3.4 Burgers 渦と式 (2.8) – (2.10) の導出

Burgers 渦とは、ある円柱渦があり、その渦は粘性拡散により消散しようとするが、渦になんらかの渦の中心線に向かう力が働くことにより消散せずに保たれる定常な渦である。

軸対称で  $z$  方向一様なため、 $u_\theta$  は  $r$  と  $t$  のみの関数で表せ、 $u_r$  は  $\alpha > 0$  となる  $\alpha$  を用いて  $u_r = -\alpha r$  と表せる。また、非圧縮のときの円筒座標系表示の連続の式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.20)$$

に上記の  $u_r$  と、軸対称なため  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$  を代入すると、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(-\alpha r^2)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.77)$$

より  $u_z = 2\alpha z$  となる。以上をまとめると、

$$u_r = -\alpha r, \quad u_\theta = u_\theta(r, t), \quad u_z = 2\alpha z \quad (\alpha > 0) \quad (3.78)$$

となる。また、本文の Burgers 渦の中心が  $z_3 = 1$  であるときの流線関数

$$\psi = -\frac{1}{2} r^2 (z - 1) \quad (2.7)$$

より  $u_r$  と  $u_z$  を求めると、

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2} r, \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = z - 1 \quad (3.79)$$

となり、 $\alpha = 1/2$  であることがわかる。

次に、(3.28) 式と (3.31) 式を合わせた円筒座標系の運動方程式の周速度の  $\theta$  成分

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta u_r}{r} + \frac{1}{Ro} u_r \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{u_\theta}{r^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.80)$$

を、時間発展しないため  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 、軸対称なため  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ 、 $z$  方向に一様なため  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ 、静止系で考えるので  $1/Ro = 0$  であることと  $\alpha = 1/2$  のときの (3.78) 式を考慮すると、

$$-\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \left( -\frac{1}{2} r - \frac{1}{Re r} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{Re r^2} \right) u_\theta = 0 \quad (3.81)$$

となる. (3.81) 式を角運動量  $l_z = ru_\theta$  の微分方程式に直す.

$$\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} = u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \quad (3.82)$$

なので,

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial r(u_\theta)}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \quad (3.83)$$

また, これを微分すると,

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r^2} + \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \quad (3.84)$$

となり, これに (3.83) 式を代入して整理すると,

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = -\frac{2}{r^2} \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r^2} + \frac{2u_\theta}{r^2} \quad (3.85)$$

となる. (3.81) 式に (3.83) 式と (3.85) 式を代入して整理し,  $l_z = ru_\theta$  を代入すると,

$$\frac{r}{2} \frac{\partial l_z}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 l_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial l_z}{\partial r} \right\} = 0. \quad (3.86)$$

これに,

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial l_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 l_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial l_z}{\partial r} \quad (3.87)$$

を代入して整理すると,

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{Re r} \frac{\partial l_z}{\partial r} + \frac{1}{2} l_z \right\} = 0 \quad (3.88)$$

となり, 中括弧内を微分するとゼロになることから, これを定数とする. したがって, (3.88) 式は任意の定数  $C_0$  を用いて

$$\left\{ \frac{1}{Re r} \frac{\partial l_z}{\partial r} + \frac{1}{2} l_z \right\} = C_0 \quad (3.89)$$

と表すことができる. この非斉次線形微分方程式の解を求める. 斉次線形微分方程式の一般解は,

$$\left\{ \frac{1}{Re r} \frac{\partial l_z}{\partial r} + \frac{1}{2} l_z \right\} = 0 \quad (3.90)$$

の解なので,

$$\frac{d l_z}{l_z} = -\frac{1}{2} Re r dr \quad (3.91)$$

となり, 任意の定数  $A$  を用いて

$$l_z = A e^{-Re r^2/4} \quad (3.92)$$

となる. 特殊解は,  $l_z = 2C_0$  となる. したがって,

$$l_z = 2C_0 + A e^{-Re r^2/4} \quad (3.93)$$

となる. ここで, 摩擦がないとき, すなわち  $Re = \infty$  のときの循環  $\Gamma$  は

$$\Gamma = \oint_C u dl = 2\pi r u_\theta = l_z \quad (3.94)$$

となるため,  $l_z = r u_\theta = \Gamma/2\pi$  より  $2C_0 = \Gamma/2\pi$  となる. また,  $Re \neq \infty, r = 0$  のとき,  $l_z = 0$  なので,

$$l_z = \frac{\Gamma}{2\pi} + A = 0 \quad (3.95)$$

となり,  $A = -\Gamma/2\pi$  となる. したがって, (3.93) 式は

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1 - \exp(-Re r^2/4)}{r} \quad (3.96)$$

となり, 本文の (2.8) 式は誤りであったことがわかった.

ここから,  $u_\theta$  の最大値  $u_{\theta\max}^*$  を求める. まず,

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Re r^2/2 + 1) \exp(-Re r^2/4) - 1}{r^2} = 0 \quad (3.97)$$

となる  $r_{\max}^*$  を求める.

$$x^{*2} = Re r_{\max}^{*2}/4 \quad (3.98)$$

とおくと,

$$r_{\max}^* = 2Re^{-1/2} x^* \quad (3.99)$$

となり, 修正を加えた本文の (2.10) 式となる.

また, (3.97) 式に (3.98) 式を代入,  $\Gamma/2\pi \neq 0$  より,

$$(2x^{*2} + 1) \exp(-x^{*2}) - 1 = 0 \quad (3.100)$$



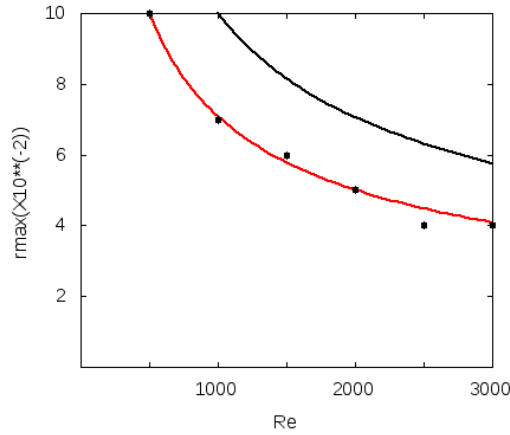


図 3.3: 修正を加えた本文の  $r_{\max}^*$ .

となり,

$$\exp(-x^{*2}) = \frac{1}{2x^{*2} + 1} \quad (3.101)$$

となる. この  $x^*$  の値は Newton 法による数値計算の結果,  $0, \pm 1.1209064227785339$  に収束した. 詳しくは, 3.5 節を参照されたい. 図 2.6 に (3.99) 式を書き足したものを加えた図を図 3.3 に示している. ここで, (3.99) 式と (3.101) 式を (3.96) 式に代入すると,

$$u_{\theta \max}^* = \frac{1}{2\pi} \frac{x^*}{2x^{*2} + 1} \Gamma Re^{1/2} \quad (3.102)$$

となり, 修正を加えた本文の (2.9) 式となる. 以上より, 本文の (2.8) – (2.10) 式が導出された.

$(n, x_1)$	解	$(n, x_1)$	解
(5, -1.2)	-1.1209064227785339	(5, 0.1)	-3.06234840630850279E-003
(10, -1.2)	-1.1209064227785339	(5, 1.0)	1.1209064227785341
(5, -1.0)	-1.1209064227785341	(5, 1.2)	1.1209064227785339
(5, -0.1)	-3.06234840630850279E-003	(10, 1.2)	1.1209064227785339

表 3.1: 様々な  $n$  と  $x_1$  に対する解.

### 3.5 Newton 法による $x^*$ の計算.

Newton 法とは, 非線形方程式の数値解法の 1 つであり,  $f(x) = 0$  となる関数  $f(x)$  に対して  $f(x) \approx 0$  となる  $x$  を近似的に求める計算方法である. 具体的には, まず, 任意の点  $x = x_1$  に対してその点での関数  $f(x)$  の接線を描き  $x$  軸との交点を求める. さらに, その交点  $x = x_2$  での関数  $f(x)$  の接線を描き再び  $x$  軸との交点を求める. この作業を繰り返し,  $f(x) \approx 0$  となる点を求める, といった手法である. 数式で表すと,  $x_{i+1}$  での傾きは  $x_i$  を用いて,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} \quad (3.103)$$

となるので,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (3.104)$$

となる.

Newton 法を用いて  $x^*$  の値を求める. (3.100) 式より,

$$f(x) = (2x^{*2} + 1) \exp(-x^{*2}) - 1 \quad (3.105)$$

とする. また, その微分  $f'(x)$  は,

$$f'(x) = (-4x^{*3} + 2x^*) \exp(-x^{*2}) - 1 \quad (3.106)$$

となる. まず,  $f(x)$  のグラフを図 3.4 に示し, 解を見積もる. グラフから, 解は  $x = 0, x \approx \pm 1.2$  であることがわかる. 次に, (3.105) 式と (3.106) 式をもとに Newton 法のプログラムを Fortran で組み, 解を求める. 計算回数  $n$  と  $x$  の初期値  $x_1$  を任意に設定できるため,  $n$  と  $x_1$  に様々な値を与え解を求めた. 表 3.1 にその組み合わせと解を記載している. 表 3.1 より,  $x^* = 0, \pm 1.1209064227785339$  に収束し, 有効数字 3 桁では本文の  $x^* \approx 1.12$  で収束することを確認した.

Newton 法により  $x^*$  を求めるプログラムを次ページに記す.

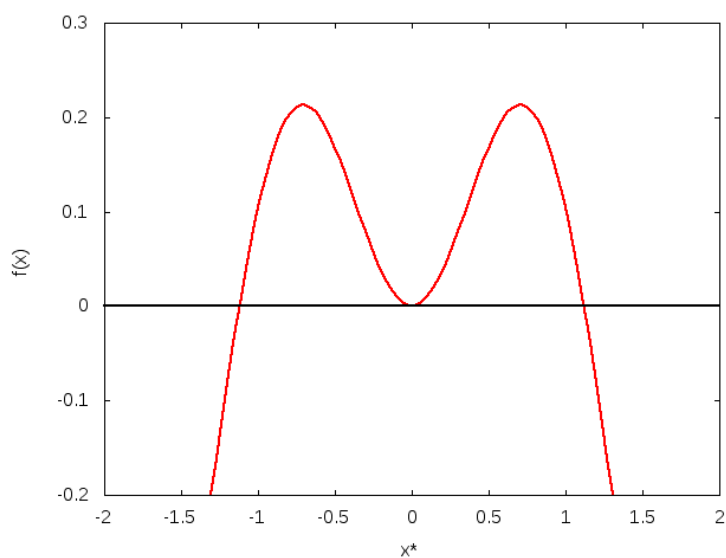


図 3.4:  $f(x) = (2x^2 + 1) \exp(-x^2) - 1$  のグラフ.

```

program newton
implicit none
integer n,i
real*8 F,DF,x,a
write(*,*) ' 計算回数を入力してください。'
read(*,*) n
write(*,*) 'x の値は何から始めますか?'
read(*,*) a
!
x=a
do i=1,n
x = x - (F(x) / DF(x))
end do
!
write(*,*) x
end
!
real*8 function F(x)
real*8 :: x
F = (2.0*x**2.0 + 1.0)*exp(-x**2.0)-1.0
end function
!
real*8 function DF(x)
real*8 :: x
DF = 2.0*x*(-2.0*x**2.0 + 1.0)*exp(-x**2.0)
end function

```

## 謝辞

本研究に関して、指導教員である林祥介教授および岩山准教授には研究内容についての方針を示して頂いた。また、岩山准教授には不出来な自分のために毎週時間を用意してご指導いただき、高橋芳幸さんにもたくさんのアドバイスを頂いた。

様々なご指導と協力を頂いた地球および惑星大気科学研究室の皆様に、ここに感謝の意を表す。

## 参考文献

### 論文

Yokoyama, N., Maruyama, Y. & Mizushima, J. 2012 Origin of the Bathtub Vortex and Its Formation Mechanism. *J. Phys. Soc. Jpn.* **81**, 074401.

### 内の参考文献

- Sibulkin, M. 1962 A note on the bathtub vortex. *J. Fluid Mech.* **14**, 21.
- Kelly, L. D., Martin, W. B. & Taylor, S. E. 1964 A further note on the bathtub vortex. *J. Fluid Mech.* **19**, 539.
- Shapiro, H. A. 1962 Bath-Tub Vortex. *Nature.* **196**, 1080.
- Trefethen, M. L., Bilger, W. R., Fink, T. P., Luxton, E. R. & Tanner, I. R. 1965 The bath-tub vortex in the southern hemisphere. *Nature.* **207**, 1084.
- Shingubara, S. & Kawakubo, T. 1984 Formation of vortices around a sinkhole. *J. Phys. Soc. Jpn.* **53**, 1026.
- Noguchi, T., Yukimoto, S., Kimura, R. & Niino, H. 2003 Structure and instability of a sink vortex. PSFVIP-4. 1.
- Yukimoto, S., Niino, H., Noguchi, T., Kimura, R. & Moulin, Y. F. 2010 Structure of a bathtub vortex: importance of the bottom boundary layer. *Theor. Comput. FluidDyn.* **24**, 323.
- Lundgren, S. T. 1985 The vortical flow above the drain-hole in a rotating vessel. *J. Fluid Mech.* **155**, 381.
- Klimenko, Y. A. 2001 Moderately strong vorticity in a bathtub-type flow. *Theor. Comput. FluidDyn.* **14**, 243.
- Andersen, A., Bohr, T., Stenum, B. Rasmussen, J. J. & Lautrup, B. 2006 The bathtub vortex in a rotating container. *J. Fluid Mech.* **556**, 121.
- Stepanyants, A. Y. & Yeoh, H. G. 2008 Stationary bathtub vortices and a critical regime of liquid discharge. *J. Fluid Mech.* **604**, 77.

### 論文外の参考文献

- 森正武. 1973 数値解析. 井立出版.
- 国立天文台. 2011 理科年表. 丸善株式会社.