

# カルマン渦列の数値シミュレーション

神戸大学 理学部 地球惑星科学科

地球および惑星大気科学研究室 4年

石崎 溪

2016年3月8日



## 要旨

2次元非圧縮順圧流体の一様流中に障害物である正方角柱を配置した場合の数値シミュレーションを実行した。特に、障害物の下流側の流れ場に注目した。

2次元非圧縮順圧流体系の渦度方程式を支配方程式とする。渦度方程式の移流項は Arakawa Jacobin 法を採用した。渦度方程式の空間微分に関しては中央差分で近似し、2次の Adams-Bashforth 法を用いて渦度方程式の数値積分を実行した。

$Re = 80, 90, 100$  の場合に渦列幅と渦間隔について定量的に調べた。これらのレイノルズ数ではカルマン渦列のような渦列が発生した。渦列幅  $h$  と渦間隔  $l$  の比,  $h/l$  を調べたところ, Kármán の理論値,  $h/l \simeq 0.28$  に近く, さらに, 室内実験で見られる  $h/l$  が障害物から離れるにつれ大きくなる特徴もこの実験で確認できた。

流れが不安定になりはじめる臨界レイノルズ数についても調べた。水島, 武本 (2010) によると, 正方角柱の場合の臨界レイノルズ数は 46.2 と求められている。本研究では, 時刻  $t = 100$  と  $t = 2000$  における渦度場の残差の値の大きさや対称性から臨界レイノルズ数は  $46.2 < Re \leq 46.5$  の範囲に存在することを示した。

# 目次

第1章	はじめに	4
第2章	支配方程式	6
2.1	流体の運動方程式	6
2.2	渦度方程式	7
2.3	流れ関数についての Poisson 方程式	8
第3章	数値計算法	10
3.1	有限差分法	10
3.2	CFL 条件	11
3.3	von Neumann の方法	13
3.3.1	移流方程式の場合	13
3.3.2	拡散方程式の場合	16
3.3.3	移流拡散方程式の場合	18
第4章	流れと障害物の表現	23
4.1	障害物が四角柱の場合	23
4.1.1	物理境界条件	24

---

4.1.2	数値境界条件 . . . . .	26
4.2	障害物が円柱の場合 . . . . .	29
4.2.1	物理境界条件 . . . . .	35
4.2.2	数値境界条件 . . . . .	37
<b>第 5 章</b>	<b>予備実験</b>	<b>41</b>
5.1	von Neumann の安定性の条件を満たすレイノルズ数の確認 . . . . .	41
5.2	流入出口の幅に関する実験 . . . . .	42
5.3	岸の長さに関する実験 . . . . .	44
5.4	反復回数の実験 . . . . .	46
<b>第 6 章</b>	<b>実験</b>	<b>49</b>
6.1	渦列幅と渦間隔についての実験 . . . . .	49
6.1.1	計算条件 . . . . .	49
6.1.2	実験結果 . . . . .	50
6.2	臨界レイノルズ数についての実験 . . . . .	53
<b>第 7 章</b>	<b>結論</b>	<b>59</b>
<b>付 録 A</b>	<b>数学の知識</b>	<b>60</b>
1	Lagrange 微分と Euler 微分 . . . . .	60
<b>付 録 B</b>	<b>数値計算法の知識</b>	<b>61</b>

---

1	Euler 法 . . . . .	61
2	Adams-Bashforth 法 . . . . .	61
3	Arakawa Jacobian 法 . . . . .	62
4	Jacobi 法と Gauss-Seidel 法 . . . . .	70
<b>付 録 C 気象の知識</b>		<b>72</b>
1	気象衛星画像 . . . . .	72
2	地上天気図 . . . . .	80
3	エマグラム . . . . .	82
4	カルマン渦状の雲列の発生の背景 . . . . .	84
<b>謝辞</b>		<b>85</b>
<b>参考文献</b>		<b>86</b>

## 第1章 はじめに

私は気象衛星画像から見る美しい渦巻き状の雲列に関心を持っていた。この渦列がどのように生まれるか、渦列のシミュレーションを行いたいと考えた。

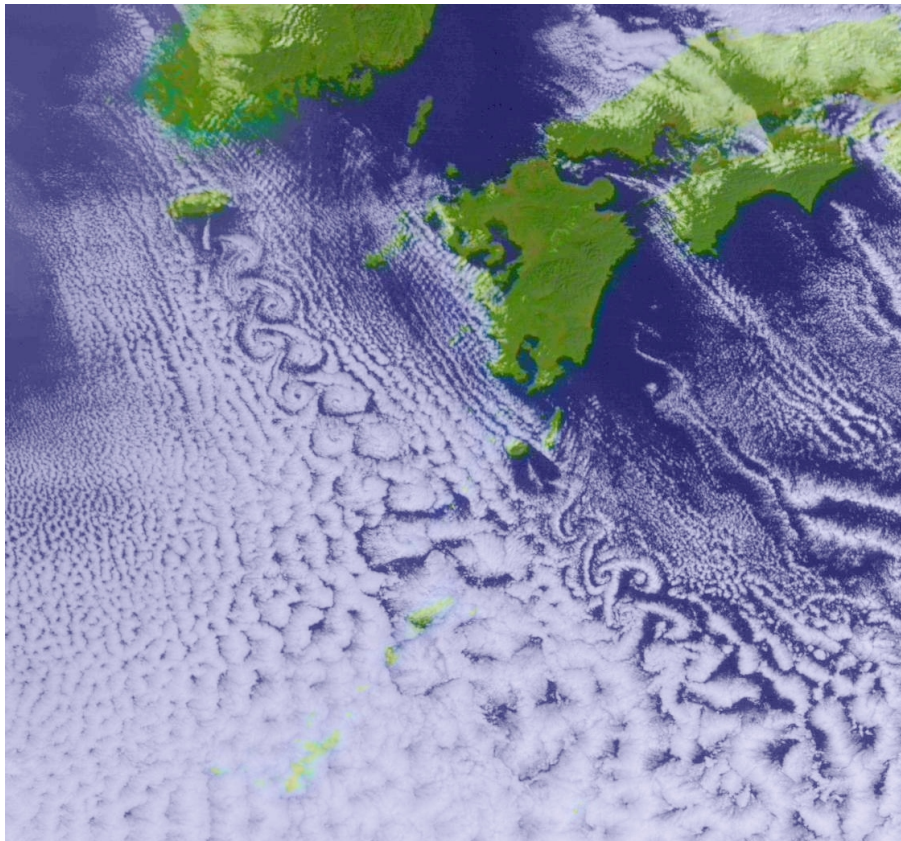


図 1 : 2015 年 1 月 9 日 10 時 (日本時間) の可視画像. (高知大学気象情報頁, 2016)

図 1 に気象衛星画像に現れる渦巻き状の雲列の例として, 2015 年 1 月 9 日 10 時 (日本時間) に気象衛星から撮影された可視画像を示す. 渦列が韓国・済州 (チェジュ) 島と屋久島の南東方向に出現していることが分かる. このようなパターンは

図 2 のような室内実験でよく見られるカルマン渦列<sup>\*1</sup> (種子田, 1988) とよく似ており, しばしば大気中におけるカルマン渦列と言われている。

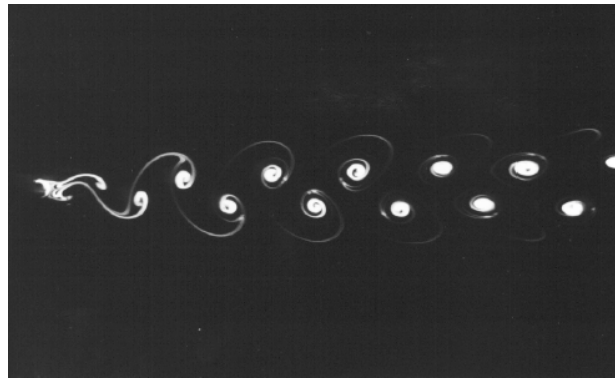


図 2 : 円柱後方のカルマン渦列 (種子田, 1988)

しかし, 室内実験で生じるカルマン渦列は 2 次元性の保たれた流体中の障害物後流に生じるのに対して, 大気中の渦列は 3 次元性の運動によって生じている. そこで, 最近の研究では, 現実大気のカルマン渦状の雲列をカルマン渦列と解釈することは否定されている (伊藤, 新野, 2015). 本研究では, 本来のカルマン渦列についての知見を研究するため, 2 次元非圧縮流体中に生じるカルマン渦列を数値シミュレーションで再現することを目指した. それを達成するために必要な流体力学や数値計算法の基本的な知識を整理した後, 実際に, カルマン渦列を数値シミュレーションする.

本論文の構成は以下の通りである. 本章である第 1 章は序章である. 第 2 章は支配方程式について述べられている. 第 3 章は流体力学に関する方程式の数値計算法について述べられている. 第 4 章はカルマン渦列をシミュレーションするための問題設定について述べられている. 第 5 章は予備的な実験であり, 計算領域の広さや数値計算法が解に与える影響について述べられている. 第 6 章は本論である. 実際にカルマン渦列を発生させ, 渦列の幅や間隔の特徴について調べている. また, 流れが不安定になりはじめる臨界レイノルズ数も調べている. 第 7 章は本研究の結論である.

<sup>\*1</sup>航空工学者の von Kármán (1911) によってはじめて理論的に考察されたので, この名が付いた.



## 第2章 支配方程式

### 2.1 流体の運動方程式

流体の運動を記述するため、まず流体の運動方程式について説明する。

流れの運動を考えると、物理量 (速度や圧力など) は時間だけでなく、空間座標によっても変化することを考慮しなければならない。密度  $\rho$  が一定、外力項を無視した非圧縮性流体の運動方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.1.1)$$

となる。ここで  $\mathbf{u}$  は速度、 $p$  は圧力である。この式は Navier-Stokes 方程式と呼ばれ、左辺全体は慣性項、左辺の第1項は時間微分項、第2項は移流項、右辺第1項は圧力傾度力項、右辺第2項は粘性項である。また、動粘性抵抗  $\nu$  は粘性率  $\mu$  を用いると、

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.1.2)$$

と定義される。(2.1.1) は様々なスケールの現象を記述することができる。そのような記述に便利な表式は (2.1.1) を無次元化することである。物理量を代表的なその物理量の大きさを使って次のように無次元化する。

$$\mathbf{u} = U \mathbf{u}', \quad \mathbf{x} = L \mathbf{x}', \quad t = \frac{L}{U} t', \quad p = \rho U^2 p'. \quad (2.1.3)$$

ここで  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{x}'$ ,  $t'$ ,  $p'$  はそれぞれ無次元化された速度、距離、時間、圧力である。 $U$ ,  $L$  は考察の対象の代表的な速度と長さの大きさである。(2.1.3) を (2.1.1) に代入し、さらに両辺に  $L/U^2$  をかけると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\nabla' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{u}' \quad (2.1.4)$$

となる。ここで、 $Re$  はレイノルズ数と呼ばれ、

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.1.5)$$

で定義される無次元数である. Navier-Stokes 方程式は (2.1.4) のように無次元化した形で使われることが多い. 記述の簡単さのために, 無次元された変数に付くプライムをすべて以下では無視することにする. このとき, (2.1.4) は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.1.6)$$

と表される.

## 2.2 渦度方程式

非圧縮性 2 次元流体の基礎方程式は流れ関数だけの閉じた 1 本の方程式 (渦度方程式) に書き下すことができる. ここでは渦度方程式の導出を説明する.

運動は 2 次元で流体は非圧縮のときの Navier-Stokes 方程式 (2.1.6) を  $x$  成分,  $y$  成分に分けると, それぞれ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u, \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v. \quad (2.2.8)$$

ただし, 流速  $\mathbf{u}$  を  $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$  とした.  $\mathbf{i}$  と  $\mathbf{j}$  はそれぞれ,  $x$  軸方向と  $y$  軸方向の単位ベクトルである.

(2.2.7) を  $y$  で微分すると,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.2.9)$$

となる. 同様に, (2.2.8) を  $x$  で微分すると,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2.10)$$

となる. (2.2.10) から (2.2.9) を引くと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

となる.  $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  とすると,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \zeta = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \zeta \quad (2.2.12)$$

となる. 非圧縮性流体の場合, 連続の式は,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.2.13)$$

であるので, (2.2.12) は,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \zeta = \frac{1}{Re} \nabla^2 \zeta \quad (2.2.14)$$

となる.  $\zeta$  は渦度で流体粒子の局所的な回転運動を表す物理量である. (2.2.14) は渦度方程式と呼ばれる. そして, 流れ関数を

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.2.15)$$

と定義すると, (2.2.14) の渦度方程式は,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \zeta \quad (2.2.16)$$

と書ける.

## 2.3 流れ関数についての Poisson 方程式

Poisson 方程式は電磁気学や流体力学といった物理学のなかで, 系を記述する基礎方程式として現れるものであり, 2 階の偏微分方程式によって表される. ここでは, 流れ関数についての Poisson 方程式を導出する.

(2.2.15) のように流れ関数を定義する. これより,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad (2.3.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.3.18)$$

となる. (2.3.17), (2.3.18) を渦度の定義の式,  $\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$  に代入すると,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \zeta \quad (2.3.19)$$

となる. これが流れ関数についての Poisson 方程式である. さらに, (2.3.19) を用いると (2.2.16) の渦度方程式は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \phi = \frac{1}{Re} \nabla^4 \phi \quad (2.3.20)$$

と書ける. 本論文では, (2.3.20) を用いてカルマン渦列の数値シミュレーションを行う.

## 第3章 数値計算法

本章では, (2.2.18) を計算機を使って解くため, 有限差分法とそれに関連する話題を解説する.

### 3.1 有限差分法

コンピューターを使って, 微分方程式を数値的に解くには微分を差分で近似する. この近似の表現の方法, 有限差分法をこの節で説明する.

ある時間変数  $t$  の関数  $f(t)$  の微分を考えると, 次の3つの表現が存在する:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t)}{2\Delta t}, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (3.1.3)$$

しかし, コンピューターでは,  $\Delta t \rightarrow 0$  を扱うことができないので, 有限の  $\Delta t$  で近似する. つまり, 上記3式の右辺の  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$  を取り除いた差分で表現し, それぞれ, 前進差分, 中央差分, 後進差分と呼ぶ. 3式は,

$$\frac{df}{dt} \simeq \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad (3.1.4)$$

$$\frac{df}{dt} \simeq \frac{f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t)}{2\Delta t}, \quad (3.1.5)$$

$$\frac{df}{dt} \simeq \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (3.1.6)$$

と表すことができる.

時間を  $\Delta t$ , 空間を  $\Delta x$  の間隔で離散化する. このとき, 自然数  $(i, j, \tau)$  を用いて, 時空間は  $(x, y, t) = (i\Delta x, j\Delta x, \tau\Delta t)$  と表現できる. そこで任意の物理量  $A(x, y, t)$

は離散化された時空間で  $A_{i,j}^\tau$  と表すことにする. 時間微分だけでなく, 空間微分にも有限差分法を適用する. このとき, 微分方程式 (2.2.16) と (2.3.19) に中央差分の有限差分法を適用すると, (2.2.16) は,

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta_{i,j}^{\tau+1} - \zeta_{i,j}^{\tau-1}}{2\Delta t} - \frac{\phi_{i,j+1}^\tau - \phi_{i,j-1}^\tau}{2\Delta x} \frac{\zeta_{i+1,j}^\tau - \zeta_{i-1,j}^\tau}{2\Delta x} + \frac{\phi_{i+1,j}^\tau - \phi_{i-1,j}^\tau}{2\Delta x} \frac{\zeta_{i,j+1}^\tau - \zeta_{i,j-1}^\tau}{2\Delta x} \\ &= \frac{1}{Re} \frac{4}{(\Delta x)^2} \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^\tau + \zeta_{i-1,j}^\tau + \zeta_{i,j+1}^\tau + \zeta_{i,j-1}^\tau}{4} - \zeta_{i,j}^\tau \right) \\ &= \frac{1}{Re} \frac{1}{(\Delta x)^2} \tilde{\nabla}^2 \zeta_{i,j}^\tau. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

(2.3.19) は,

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}^\tau &= \frac{4}{(\Delta x)^2} \left( \frac{\phi_{i+1,j}^\tau + \phi_{i-1,j}^\tau + \phi_{i,j+1}^\tau + \phi_{i,j-1}^\tau}{4} - \phi_{i,j}^\tau \right) \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \tilde{\nabla}^2 \phi_{i,j}^\tau. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

ここで,

$$\tilde{\nabla}^2 A_{i,j} \equiv 4 \left( \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1}}{4} - A_{i,j} \right) \quad (3.1.9)$$

と定義する<sup>\*1</sup>. なお, 上記の時間積分は leap-frog 法と呼ばれるものであるが, 本研究では, Adams-Bashforth 法を採用した (付録 B.2 を参照).

## 3.2 CFL 条件

近似による計算誤差は数値計算の安定性に大きな影響を与える. 計算を続けるにあたって誤差が増大しないならば, 有限差分法は安定であると言える. ここでは

<sup>\*1</sup>(3.1.7) を (3.1.8) のもとで解くときに, (3.1.7) の粘性項に次のような工夫をする:

$$\tilde{\nabla}^2 \zeta_{i,j}^\tau \rightarrow \frac{1}{2} \left( \tilde{\nabla}^2 \zeta_{i,j}^{\tau+1} + \tilde{\nabla}^2 \zeta_{i,j}^{\tau-1} \right). \quad (3.1.10)$$

このような置き換えにより, (3.1.7) を変形し,  $\tau+1$  と  $\tau-1$  の項に分けると,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^2 \zeta_{i,j}^{\tau+1} - \mu^2 \zeta_{i,j}^{\tau+1} &= -(\tilde{\nabla}^2 + \mu^2) \zeta_{i,j}^{\tau-1} \\ &\quad - \lambda^2 [(\phi_{i,j+1}^\tau - \phi_{i,j-1}^\tau)(\zeta_{i+1,j}^\tau - \zeta_{i-1,j}^\tau) \\ &\quad - (\phi_{i+1,j}^\tau - \phi_{i-1,j}^\tau)(\zeta_{i,j+1}^\tau - \zeta_{i,j-1}^\tau)] \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

となる. ただし,  $\mu^2 = Re(\Delta x)^2/\Delta t$ ,  $\lambda^2 = Re/2$  とおいた.

以上から, 過去  $\tau-1$  や現在  $\tau$  の渦度, 流れ関数の値が既知であれば, (3.1.8) や (3.1.11) を使って, 未来  $\tau+1$  の渦度, 流れ関数の値を知ることができる. ただし, この方法は Hirota, Miyakoda (1964) で採用した方法であり, 本研究では採用していない.

数値計算が安定であるための条件, CFL 条件について移流方程式を例にとり説明する.

時間  $t$  と位置  $x$  の関数  $u(x, t)$  があり, 速度  $c$  で  $x$  方向に移動する場合,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.2.12)$$

が成り立つ. これは移流方程式と呼ばれ, 左辺の第 2 項は移流項である. この方程式の一般解を  $F$  を任意の形とした, 特性曲線  $u = F(x - ct)$  とおくと,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F' \frac{\partial}{\partial t}(x - ct) = F' \times (-c), \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F' \frac{\partial}{\partial x}(x - ct) = F' \quad (3.2.14)$$

であり,

$$F' \times (-c) + F' = 0 \quad (3.2.15)$$

となるので, 確かに特性曲線  $u = F(x - ct)$  は一般解になっている. 3.1 節と同様に, 任意の物理量  $A(x, t)$  を離散化された時空間で  $A_i^\tau$  と表すことにし, 時間に関する微分に前進差分, 空間に関する微分に後進差分を適用すると, (3.2.12) は,

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^\tau}{\Delta t} + c \frac{u_i^\tau - u_{i-1}^\tau}{\Delta x} = 0 \quad (3.2.16)$$

となる. ここで,  $u_{i-1}^\tau$  は  $u_i^\tau$  の上流側の物理量なので, 上流差分や風上差分と呼ばれる. 移流方程式では, 物理量が上流側から移動してくるので, 上流差分は理に適っていると言える. 時刻  $\tau$  の物理量  $u_i^\tau$ ,  $u_{i-1}^\tau$  が既知ならば, 時刻  $\tau + 1$  に対する物理量  $u_i^{\tau+1}$  は,

$$u_i^{\tau+1} = u_i^\tau - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_i^\tau - u_{i-1}^\tau) \quad (3.2.17)$$

と表すことができる. ここで, 図 3 を参照する. 数値解に影響を与えるすべての格子点からなる領域を依存領域と呼ぶ. 点 A の数値解は依存領域内の  $\circ$  印で示された格子点における値のみから計算される. 今, 位置  $x$ , 時間  $t$  における物理量の値に注目する. この時空間は図 3 の点 A で表されている. (3.2.17) の計算法によると, 特性曲線が依存領域内に存在すると微分方程式の解を格子点の値で表現できる. つまり, 特性曲線の傾き  $1/c$  が依存領域の境界の傾き  $\Delta t/\Delta x$  より大きい, 同じでなければならず,

$$\frac{1}{c} \geq \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (3.2.18)$$

$$1 \geq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.2.19)$$

のような制約がある. これを CFL 条件と呼ぶ.

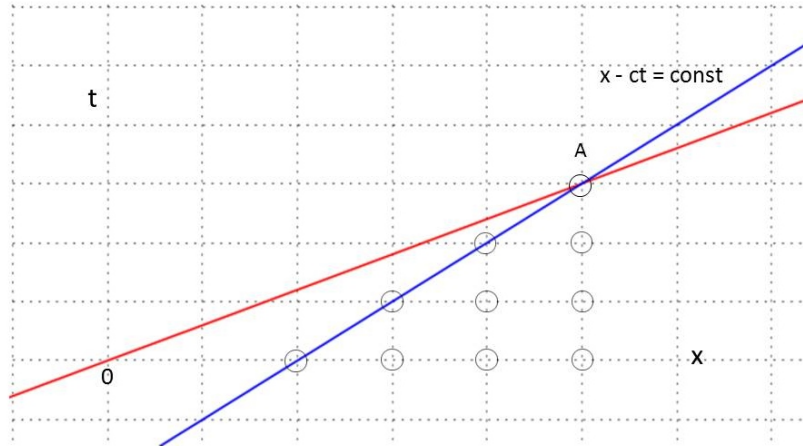


図 3 : 計算法 (3.2.17) に関して注目する点 A における物理量に対する依存領域を ◦ 印で示した. 赤線は特性曲線が依存領域内に存在しない場合. 青線は特性曲線が依存領域内の格子点で表現できる臨界的状態.

### 3.3 von Neumann の方法

微分方程式を有限差分法で解く際の数値的安定性を調べるのに使われる手法の 1 つに von Neumann の方法がある. この方法は, 変数を様々な波長の波の重ね合わせで表し, 各成分毎の安定性を調べる. 解の重ね合わせのできない非線形偏微分方程式には適用できない. しかし, 非線形方程式を線形化することにより, 各波数成分の振幅が互いに独立に発展すると考えると, 1 つの波数成分だけを取り出して議論することができる. ここでは, この方法を移流方程式, 拡散方程式, 移流拡散方程式を例にとって説明する.

#### 3.3.1 移流方程式の場合

(3.2.12) の解を振幅が  $U_k(t)$ , 波数  $k$  の波動解,

$$u(x, t) = U_k(t)e^{jkx} \tag{3.3.20}$$



として\*2, (3.2.12) に代入すると,

$$\left(\frac{dU_k}{dt} + jkcU_k\right) e^{jkx} = 0 \quad (3.3.21)$$

となる. ここで, 一般に  $e^{jkx} \neq 0$  なので,

$$\frac{dU_k}{dt} + jkcU_k = 0 \quad (3.3.22)$$

である. よって,

$$\frac{dU_k}{dt} = -jkcU_k, \quad (3.3.23)$$

$$\frac{dU_k}{U_k} = -jkc dt, \quad (3.3.24)$$

$$\int \frac{dU_k}{U_k} = -jkc \int_0^t dt \quad (3.3.25)$$

となるので,

$$\ln \left( \frac{U_k(t)}{U_k(0)} \right) = -jkc t, \quad U_k(0) : \text{初期値} \quad (3.3.26)$$

$$\frac{U_k(t)}{U_k(0)} = e^{-jkc t} \quad (3.3.27)$$

と表され,

$$U_k(t) = U_k(0) e^{-jkc t} \quad (3.3.28)$$

となる. (3.3.28) を (3.3.20) に代入すると,

$$u(x, t) = U_k(0) e^{jk(x-ct)}. \quad (3.3.29)$$

(3.3.29) をすべての波数について重ね合わせると,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_k(0) e^{jk(x-ct)} dk \quad (3.3.30)$$

となり, (3.3.30) が (3.2.12) の一般解である. また, 各成分の波は振幅を変えずに一定の位相速度  $c$  で移流することが分かる.

次に,  $(x, t) = (i\Delta x, \tau\Delta t)$  として, 3.1 節と同様に  $u(x, t)$  を  $u_i^\tau$  と表す. これを (3.2.16) の波数成分  $k$  の差分解として,

$$u_i^\tau = U^\tau e^{jki\Delta x} \quad U^\tau : \tau \text{ における振幅} \quad (3.3.31)$$

とおく. さらに, (3.2.16) を変形すると,

$$u_i^{\tau+1} = u_i^\tau - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^\tau - u_{i-1}^\tau) \quad (3.3.32)$$

$$= (1 - \mu) u_i^\tau + \mu u_{i-1}^\tau \quad (3.3.33)$$

\*2ここでは,  $j$  を虚数単位とする.

となる. ただし,  $\mu = c\Delta t/\Delta x$  とおいた. (3.3.31) を (3.3.33) に代入すると,

$$U^{\tau+1}e^{jki\Delta x} = (1 - \mu)U^\tau e^{jki\Delta x} + \mu U^\tau e^{jk(i-1)\Delta x} \quad (3.3.34)$$

となり,

$$\begin{aligned} U^{\tau+1} &= (1 - \mu)U^\tau + \mu U^\tau e^{-jk\Delta x} \\ &= [(1 - \mu) + \mu e^{-jk\Delta x}] U^\tau \\ &= \lambda U^\tau. \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

ここで, 増幅因子  $\lambda$  を

$$\lambda \equiv (1 - \mu) + \mu e^{-jk\Delta x} \quad (3.3.36)$$

と定義をする.

差分法が安定であるための条件は,

$$|U^\tau| = |\lambda| |U^{\tau-1}| = |\lambda|^2 |U^{\tau-2}| = \dots = |\lambda|^\tau |U^0| < B \quad B: \text{ある有限な数} \quad (3.3.37)$$

となれば良く, この式を変形し,  $B'$  を次のように定義した:

$$\tau \ln |\lambda| < \ln \frac{B}{|U^0|} \equiv B'. \quad (3.3.38)$$

$\tau = t/\Delta t$  なので,

$$\ln |\lambda| < B' \frac{\Delta t}{t} \quad (3.3.39)$$

となる.  $|\lambda| \equiv 1 + \delta$  と定義して,  $|\delta| \ll 1$  とすると,

$$\ln(1 + \delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \dots \quad (3.3.40)$$

よって,

$$\delta \leq O(\Delta t) \quad (3.3.41)$$

となり,

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t), \quad (3.3.42)$$

$$|\lambda| \leq 1. \quad (3.3.43)$$

(3.3.43) を von Neumann の安定性のための必要条件という.

(3.3.36) を変形すると,

$$\lambda = 1 - \mu + \mu(\cos k\Delta x - j \sin k\Delta x) \quad (3.3.44)$$

となり,

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos k\Delta x) \quad (3.3.45)$$

となる. (3.3.43) より, 差分法が安定であるための条件は,  $|\lambda|^2 \leq 1$  であり,  $1 - \cos k\Delta x \geq 0$  なので,

$$1 - \mu \geq 0 \quad (3.3.46)$$

を得る. (3.3.46) は,

$$\mu \leq 1, \quad (3.3.47)$$

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.3.48)$$

となる. これが (3.2.16) の差分法がすべての波数に対して安定であるための必要条件であり, CFL 条件とも一致している.

### 3.3.2 拡散方程式の場合

1次元の拡散方程式は, 時間  $t$  と位置  $x$  の関数を  $u(x, t)$ , 拡散係数を  $D$  とすると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.3.49)$$

で与えられる. この方程式の波動解を 3.3.1 節と同様に (3.3.20) として, (3.3.49) に代入すると,

$$\frac{dU_k}{dt} e^{jkx} = -Dk^2 U_k e^{jkx}, \quad (3.3.50)$$

$$\left( \frac{dU_k}{dt} + Dk^2 U_k \right) e^{jkx} = 0 \quad (3.3.51)$$

となる. ここで, 一般に  $e^{jkx} \neq 0$  なので,

$$\frac{dU_k}{dt} + Dk^2 U_k = 0 \quad (3.3.52)$$

である. よって,

$$\frac{dU_k}{dt} = -Dk^2 U_k, \quad (3.3.53)$$

$$\frac{dU_k}{U_k} = -Dk^2 dt, \quad (3.3.54)$$

$$\int \frac{dU_k}{U_k} = -Dk^2 \int_0^t dt \quad (3.3.55)$$

となるので,

$$\ln \left( \frac{U_k(t)}{U_k(0)} \right) = -Dk^2 t, \quad U_k(0) : \text{初期値} \quad (3.3.56)$$

$$\frac{U_k(t)}{U_k(0)} = e^{-Dk^2 t} \quad (3.3.57)$$

と表され,

$$U_k(t) = U_k(0)e^{-Dk^2t} \quad (3.3.58)$$

となる. (3.3.58) を (3.3.20) に代入すると,

$$u(x, t) = U_k(0)e^{jkx - Dk^2t}. \quad (3.3.59)$$

(3.3.59) をすべての波数について重ね合わせると,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_k(0)e^{jkx - Dk^2t} dk \quad (3.3.60)$$

となり, (3.3.60) が (3.3.49) の一般解である.

次に,  $(x, t) = (i\Delta x, \tau\Delta t)$  として, 3.1 節と同様に  $u(x, t)$  を  $u_i^\tau$  と表す. そして, (3.3.49) の時間に関する微分に前進差分, 空間に関する微分に中央差分を適用すると,

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^\tau}{\Delta t} = D \frac{u_{i+1}^\tau - 2u_i^\tau + u_{i-1}^\tau}{(\Delta x)^2} \quad (3.3.61)$$

となる. (3.3.61) の波数成分  $k$  の差分解として,

$$u_i^\tau = U^\tau e^{jki\Delta x} \quad U^\tau : \tau \text{ における振幅} \quad (3.3.62)$$

とおく. (3.3.61) を変形すると,

$$u_i^{\tau+1} = u_i^\tau + D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^\tau - 2u_i^\tau + u_{i-1}^\tau) \quad (3.3.63)$$

$$= (1 - 2\mu)u_i^\tau + \mu(u_{i+1}^\tau + u_{i-1}^\tau) \quad (3.3.64)$$

となる. ただし,  $\mu = D\Delta t/(\Delta x)^2$  とおいた. (3.3.62) を (3.3.64) に代入すると,

$$U^{\tau+1} e^{jki\Delta x} = (1 - 2\mu)U^\tau e^{jki\Delta x} + \mu(e^{jk(i+1)\Delta x} + e^{jk(i-1)\Delta x}) U^\tau \quad (3.3.65)$$

となり,

$$\begin{aligned} U^{\tau+1} &= (1 - 2\mu)U^\tau + \mu(e^{jk\Delta x} + e^{-jk\Delta x}) U^\tau \\ &= [1 - 2\mu + \mu(e^{jk\Delta x} + e^{-jk\Delta x})] U^\tau \\ &= \lambda U^\tau. \end{aligned} \quad (3.3.66)$$

ここで, 増幅因子  $\lambda$  は

$$\lambda = 1 - 2\mu + \mu(e^{jk\Delta x} + e^{-jk\Delta x}) \quad (3.3.67)$$

で与えられる. (3.3.67) を変形すると,

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - 2\mu + \mu(\cos k\Delta x + j \sin k\Delta x + \cos k\Delta x - j \sin k\Delta x) \\ &= 1 - 2\mu(1 - \cos k\Delta x) \\ &= 1 - 4\mu \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

となり, 3.3.1 節と同様に, 差分法が安定であるためには  $|\lambda| \leq 1$  である必要がある. よって,

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 - 4\mu \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \leq 1, \\ 0 &\leq \mu \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.3.69)$$

となり,

$$\mu \leq \frac{1}{2}, \quad (3.3.70)$$

$$D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.3.71)$$

となる. これが (3.3.61) の差分法がすべての波数に対して安定であるための必要条件である.

### 3.3.3 移流拡散方程式の場合

1次元の移流拡散方程式は, 時間  $t$  と位置  $x$  の関数を  $u(x, t)$ , 流速を  $c$ , 拡散係数を  $D$  とすると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.3.72)$$

で与えられる. この方程式の波動解を 3.3.1 節と同様に (3.3.20) として, (3.3.72) に代入すると,

$$\frac{dU_k}{dt} e^{jkx} + jkcU_k e^{jkx} = -Dk^2 U_k e^{jkx}, \quad (3.3.73)$$

$$\left( \frac{dU_k}{dt} + jkcU_k + Dk^2 U_k \right) e^{jkx} = 0 \quad (3.3.74)$$

となる. ここで, 一般に  $e^{jkx} \neq 0$  なので,

$$\frac{dU_k}{dt} + jkcU_k + Dk^2 U_k = 0 \quad (3.3.75)$$

である. よって,

$$\frac{dU_k}{dt} = -jkcU_k - Dk^2 U_k, \quad (3.3.76)$$

$$\frac{dU_k}{U_k} = -jkc dt - Dk^2 dt, \quad (3.3.77)$$

$$\int \frac{dU_k}{U_k} = -jkc \int_0^t dt - Dk^2 \int_0^t dt \quad (3.3.78)$$

となるので,

$$\ln \left( \frac{U_k(t)}{U_k(0)} \right) = -jkc t - Dk^2 t, \quad U_k(0) : \text{初期値} \quad (3.3.79)$$

$$\frac{U_k(t)}{U_k(0)} = e^{-(jkc + Dk^2)t} \quad (3.3.80)$$

と表され,

$$U_k(t) = U_k(0)e^{-(jkc + Dk^2)t} \quad (3.3.81)$$

となる. (3.3.81) を (3.3.20) に代入すると,

$$u(x, t) = U_k(0)e^{jk(x-ct) - Dk^2 t} \quad (3.3.82)$$

(3.3.82) をすべての波数について重ね合わせると,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_k(0)e^{jk(x-ct) - Dk^2 t} dk \quad (3.3.83)$$

となり, (3.3.83) が (3.3.72) の一般解である.

次に,  $(x, t) = (i\Delta x, \tau\Delta t)$  として, 3.1 節と同様に  $u(x, t)$  を  $u_i^\tau$  と表す. そして, (3.3.72) の時間に関する微分に前進差分, 移流項と拡散項に中央差分を適用すると,

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^\tau}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^\tau - u_{i-1}^\tau}{2\Delta x} = D \frac{u_{i+1}^\tau - 2u_i^\tau + u_{i-1}^\tau}{(\Delta x)^2}. \quad (3.3.84)$$

(3.3.84) の波数成分  $k$  の差分解として,

$$u_i^\tau = U^\tau e^{jki\Delta x} \quad U^\tau : \tau \text{ における振幅} \quad (3.3.85)$$

とおく. (3.3.84) を変形すると,

$$u_i^{\tau+1} = u_i^\tau - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^\tau - u_{i-1}^\tau) + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^\tau - 2u_i^\tau + u_{i-1}^\tau) \quad (3.3.86)$$

$$= (1 - 2\mu')u_i^\tau - \left(\frac{\mu}{2} - \mu'\right)u_{i+1}^\tau + \left(\frac{\mu}{2} + \mu'\right)u_{i-1}^\tau \quad (3.3.87)$$

ただし,

$$\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}, \quad (3.3.88)$$

$$\mu' = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (3.3.89)$$

とおいた. (3.3.85) を (3.3.87) に代入すると,

$$\begin{aligned} U^{\tau+1} e^{jki\Delta x} &= (1 - 2\mu')U^\tau e^{jki\Delta x} \\ &\quad - \left(\frac{\mu}{2} - \mu'\right)U^\tau e^{jk(i+1)\Delta x} \\ &\quad + \left(\frac{\mu}{2} + \mu'\right)U^\tau e^{jk(i-1)\Delta x} \end{aligned} \quad (3.3.90)$$

となり,

$$\begin{aligned}
 U^{\tau+1} &= (1 - 2\mu')U^\tau - \left(\frac{\mu}{2} - \mu'\right)U^\tau e^{jk\Delta x} + \left(\frac{\mu}{2} + \mu'\right)U^\tau e^{-jk\Delta x} \\
 &= \left[1 - 2\mu' - \left(\frac{\mu}{2} - \mu'\right)e^{jk\Delta x} + \left(\frac{\mu}{2} + \mu'\right)e^{-jk\Delta x}\right]U^\tau \\
 &= \lambda U^\tau
 \end{aligned} \tag{3.3.91}$$

ここで, 増幅因子  $\lambda$  は

$$\lambda = 1 - 2\mu' - \left(\frac{\mu}{2} - \mu'\right)e^{jk\Delta x} + \left(\frac{\mu}{2} + \mu'\right)e^{-jk\Delta x} \tag{3.3.92}$$

である. (3.3.92) を変形すると,

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 1 - 2\mu' - \frac{\mu}{2}(e^{jk\Delta x} - e^{-jk\Delta x}) + \mu'(e^{jk\Delta x} + e^{-jk\Delta x}) \\
 &= 1 - 2\mu' - \mu j \sin k\Delta x + 2\mu' \cos k\Delta x \\
 &= 1 - 2\mu'(1 - \cos k\Delta x) - \mu j \sin k\Delta x
 \end{aligned} \tag{3.3.93}$$

であり,

$$|\lambda|^2 = [1 - 2\mu'(1 - \cos k\Delta x)]^2 + \mu^2 \sin^2 k\Delta x \tag{3.3.94}$$

となる. 複素平面で (3.3.93) は実軸上の  $(1 - 2\mu')$  を中心とし, 長径が  $2\mu'$ , 短径が  $\mu$  の楕円, 一方安定性の条件 (3.3.43) は中心が原点にあり, 半径が 1 の円であると解釈できる.

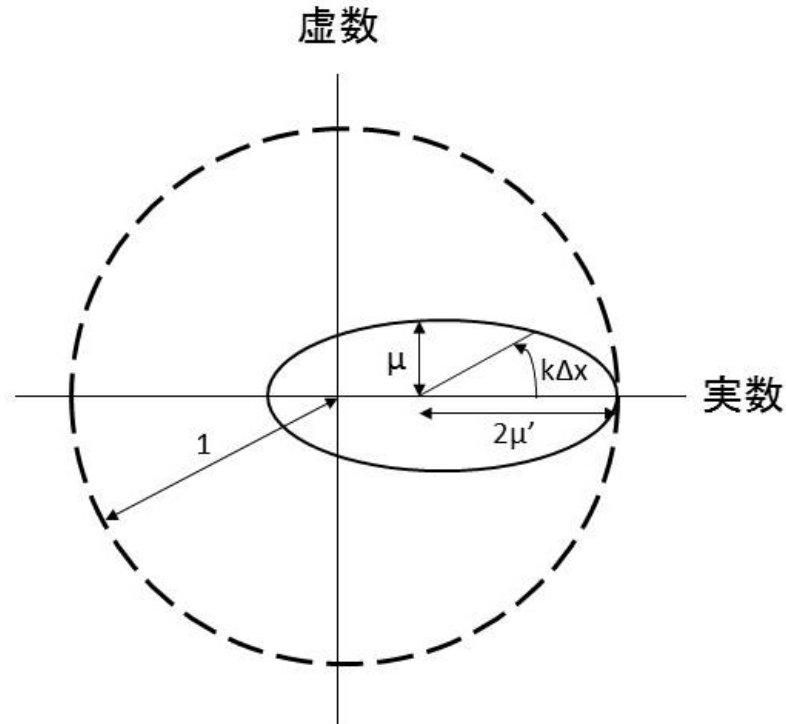


図 4 : 増幅因子  $\lambda$  の極形式による表示.

$k\Delta x \approx 0$  場合,

$$\begin{aligned} \cos k\Delta x &= 1 - \frac{1}{2!}(k\Delta x)^2 + \dots, \\ \sin k\Delta x &= k\Delta x - \frac{1}{3!}(k\Delta x)^3 + \dots \end{aligned}$$

とすると, (3.3.94) は

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &\approx \left[ 1 - 2\mu' \left( \frac{1}{2!} k\Delta x \right) \right]^2 + \mu^2 (k\Delta x)^2 \\ &\approx 1 - 2\mu' (k\Delta x)^2 + \mu'^2 (k\Delta x)^4 + \mu^2 (k\Delta x)^2 \\ &\approx 1 + (\mu^2 - 2\mu') (k\Delta x)^2 \end{aligned} \tag{3.3.95}$$

と表すことができる.

$k\Delta x = \pi$  の場合,

$$|\lambda|^2 = (1 - 4\mu')^2 \tag{3.3.96}$$



となる. 3.3.1 節と同様に差分法が安定であるためには  $|\lambda| \leq 1$  である必要がある. (3.3.95) より,

$$\begin{aligned}\mu^2 - 2\mu' &\leq 0, \\ \mu^2 &\leq 2\mu'.\end{aligned}\tag{3.3.97}$$

(3.3.96) より,

$$\begin{aligned}-1 &\leq 1 - 4\mu' \leq 1, \\ 0 &\leq 4\mu' \leq 2, \\ 0 &\leq \mu' \leq \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{3.3.98}$$

$k\Delta x = \pi/2$  の場合,

$$|\lambda|^2 = (1 - 2\mu')^2 + \mu^2\tag{3.3.99}$$

となり, (3.3.97) と (3.3.98) より  $|\lambda|^2 \leq 1$  が満たされている. 以上より, (3.3.97) と (3.3.98) が (3.3.84) の差分法がすべての波数に対して安定であるための条件である.

## 第4章 流れと障害物の表現

本章では、障害物が存在する領域における流れの概要と境界条件について解説する。はじめに、障害物が四角柱である場合について説明したのち、次に障害物が円柱の場合についての説明をする。

### 4.1 障害物が四角柱の場合

障害物が四角柱である場合の流れを数値計算する際の問題設定について説明する。

$x$  軸方向に一様な流れがあり、 $y$  軸方向には流れのない ( $u = U, v = 0$ ) 無限に広がる領域を考える。このような領域内に流れを妨げるように四角柱をおく。ただし、数値計算で無限の領域は計算できないので、流れに及ぼす障害物の影響を考えなくても良いほど十分広い領域を設定して計算を行う。



図 5 : 計算領域と格子点.

そして、この計算領域に格子点をおく。図 5 のように計算領域の左下に原点をおき、 $x$  軸方向に  $I+1$  個の格子点、 $y$  軸方向に  $J+1$  個の格子点を等間隔に配置する。よって、この計算領域には、 $(I+1) \times (J+1)$  個の格子点が存在している。また、原点から  $I+1$  個目の格子点までの距離を  $X$ 、原点から  $J+1$  個目までの格子点の距離を  $Y$  とする。

### 4.1.1 物理境界条件

前述のような流れを表現する物理的な境界条件を説明する。

流入口 ( $x = 0$ )

流入口である  $y$  軸上には速度  $U$  の一般流が  $x$  軸方向に流入するので、

$$u = U, \quad (4.1.1)$$

$$v = 0 \quad (4.1.2)$$

である。(2.2.15) より、流れ関数  $\phi$  は、

$$\begin{aligned} \phi &= - \int_0^y U dy \\ &= -Uy + \text{const} \\ &= -U \left( y - \frac{Y}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

となる。(4.1.3) の定数項は領域の中心で  $\phi = 0$  となるように設定している。(2.3.19) より、渦度  $\zeta$  は、

$$\zeta = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (4.1.4)$$

である。

左岸 ( $y = Y$ )

計算領域は、流れに及ぼす障害物の影響を考えなくても良いほど十分広い領域としている。また、岸上では、摩擦がないと考える。つまり、 $\partial u / \partial y = 0$  である。よっ

て、流速は一般の流速によるので、

$$u = U, \quad (4.1.5)$$

$$v = 0 \quad (4.1.6)$$

である。(2.2.15) より、流れ関数  $\phi$  は、

$$\phi = -\frac{uY}{2} \quad (4.1.7)$$

となる。(2.3.19) より、渦度  $\zeta$  は、

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.1.8)$$

である。

右岸 ( $y = 0$ )

右岸も左岸と同様に、

$$u = U, \quad (4.1.9)$$

$$v = 0 \quad (4.1.10)$$

である。流れ関数  $\phi$  と渦度  $\zeta$  も同様に、

$$\phi = \frac{uY}{2}, \quad (4.1.11)$$

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.1.12)$$

となる。

流出口 ( $x = X$ )

速度に対する自然境界条件を設定する:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.1.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4.1.14)$$

とする。

## 四角柱

四角柱の境界, 表面では, 流速の速度は,

$$u = 0, \quad (4.1.15)$$

$$v = 0. \quad (4.1.16)$$

(2.2.15) より, 流れ関数は,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (4.1.17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (4.1.18)$$

となる.

### 4.1.2 数値境界条件

上で述べた物理境界条件の数値的表現 (数値境界条件) を説明する.

流入口 ( $x = 0$ )

流れの速度は, 物理境界条件 (4.1.1), (4.1.2) より,

$$u_{0,j} = U, \quad (4.1.19)$$

$$v_{0,j} = 0, \quad (4.1.20)$$

である. 流れ関数は, 物理境界条件, (4.1.3) より,

$$\phi_{0,j} = -U\Delta y \left( j - \frac{J}{2} \right) \quad (4.1.21)$$

となる. ただし,  $j$  は原点を始点とする  $y$  軸上の格子点の番号,  $\Delta y$  は  $y$  軸の格子点の間隔,  $J$  は上壁の格子点の番号とする. このようにおけば, 流入口の中間の格子点  $J/2$  の流れ関数は,

$$\phi_{0,J/2} = 0 \quad (4.1.22)$$

となる. 物理境界条件と同様, (2.3.19) より, 渦度  $\zeta_{0,j}$  は,

$$\zeta_{0,j} = 0 \quad (4.1.23)$$

となる.

左岸 ( $y = Y$ )

流れの速度は, 物理境界条件 (4.1.5), (4.1.6) より,

$$u_{i,J} = U, \quad (4.1.24)$$

$$v_{i,J} = 0 \quad (4.1.25)$$

である. 物理境界条件 (4.1.7) より,

$$\phi_{i,J} = -\frac{J}{2}U\Delta y \quad (4.1.26)$$

となる.

渦度に関する境界条件は以下のように設定する:

左岸よりひとつ内側の格子点において, 流れ関数  $\phi_{i,J-1}$  をテーラー展開すると,

$$\begin{aligned} \phi_{i,J-1} &= \phi_{i,J} - \frac{\partial\phi_{i,J}}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_{i,J}}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \dots \\ &\simeq \phi_{i,J} - \frac{\partial\phi_{i,J}}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_{i,J}}{\partial y^2}(\Delta y)^2 \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

となる.

$$-\frac{\partial\phi_{i,J}}{\partial y} = U, \quad (4.1.28)$$

$$\frac{\partial^2\phi_{i,J}}{\partial y^2} = \zeta_{i,J} \quad (4.1.29)$$

より, (4.1.27) は,  $\Delta y$  の 2 次までの精度で,

$$\phi_{i,J-1} = \phi_{i,J} + U\Delta y + \frac{1}{2}\zeta_{i,J}(\Delta y)^2 \quad (4.1.30)$$

となる. よって,  $\zeta_{i,J}$  は,

$$\zeta_{i,J} = \frac{2(\phi_{i,J-1} - \phi_{i,J} - U\Delta y)}{(\Delta y)^2} \quad (4.1.31)$$

となる.

右岸 ( $y = 0$ )

流れの速度は, 物理境界条件 (4.1.9), (4.1.10) より,

$$u_{i,0} = U, \quad (4.1.32)$$

$$v_{i,0} = 0 \quad (4.1.33)$$

である。物理境界条件 (4.1.11) より、流れ関数  $\phi_{i,0}$  は、

$$\phi_{i,0} = \frac{J}{2} U \Delta y \quad (4.1.34)$$

である。

渦度に関する境界条件は以下のように設定する：

右岸よりひとつ内側の格子点の流れ関数  $\phi_{i,1}$  は、

$$\begin{aligned} \phi_{i,1} &= \phi_{i,0} + \frac{\partial \phi_{i,0}}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{i,0}}{\partial y^2} (\Delta y)^2 + \dots \\ &\simeq \phi_{i,0} + \frac{\partial \phi_{i,0}}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{i,0}}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

となる。

$$-\frac{\partial \phi_{i,0}}{\partial y} = U, \quad (4.1.36)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{i,0}}{\partial y^2} = \zeta_{i,0} \quad (4.1.37)$$

より, (4.1.35) は、

$$\phi_{i,1} = \phi_{i,0} - U \Delta y + \frac{1}{2} \zeta_{i,0} (\Delta y)^2 \quad (4.1.38)$$

となる。よって,  $\zeta_{i,0}$  は、

$$\zeta_{i,0} = \frac{2(\phi_{i,1} - \phi_{i,0} + U \Delta y)}{(\Delta y)^2} \quad (4.1.39)$$

となる。

流出口 ( $x = X$ )

物理境界条件 (4.1.13), (4.1.14) は、

$$\phi_{I,j} = \phi_{I-1,j} \quad (4.1.40)$$

とすることで実現される。渦度については、自然境界条件、

$$\frac{\partial \zeta_{I,j}}{\partial x} = 0 \quad (4.1.41)$$

を設定し, (4.1.41) を後進差分すると、

$$\frac{\zeta_{I,j} - \zeta_{I-1,j}}{\Delta x} = 0 \quad (4.1.42)$$

となるので、渦度  $\zeta_{I,j}$  の数値境界条件は、

$$\zeta_{I,j} = \zeta_{I-1,j} \quad (4.1.43)$$

となる。

## 四角柱

左岸, 右岸の  $\zeta$  の境界条件と同じ議論をする. 以前と違うのは, 四角柱上で,

$$u_{i,j} = 0, \quad (4.1.44)$$

$$v_{i,j} = 0, \quad (4.1.45)$$

$$\phi_{i,j} = 0 \quad (4.1.46)$$

である. (4.1.31), (4.1.39) から四角柱の左岸の渦度  $\zeta_{i,j}^L$ , 右岸の渦度  $\zeta_{i,j}^R$ , 前岸の渦度  $\zeta_{i,j}^F$ , 後岸の渦度  $\zeta_{i,j}^B$  はそれぞれ,

$$\zeta_{i,j}^L = -\frac{2\phi_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}, \quad (4.1.47)$$

$$\zeta_{i,j}^R = -\frac{2\phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}, \quad (4.1.48)$$

$$\zeta_{i,j}^F = -\frac{2\phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}, \quad (4.1.49)$$

$$\zeta_{i,j}^B = -\frac{2\phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (4.1.50)$$

となる.

## 4.2 障害物が円柱の場合

障害物が円柱である場合の流れを数値計算する際の問題設定 (酒井, 2012) について説明する.

障害物が四角柱の場合と同様,  $x$  軸方向に一様な流れがあり,  $y$  軸方向には流れのない ( $u = U, v = 0$ ) 無限に広がる領域を考え, このような領域内に流れを妨げるように円柱をおく. ただし, 数値計算で無限の領域は計算できないので, 障害物の円柱を座標の中心とし, 計算領域の端では, 障害物の影響を考えなくて良いほど十分広い領域に限定して計算をする. 図 6 に示したように計算領域の境界が円であるので, 前節で扱った, デカルト座標系から 2 次元の極座標に変換する. つまり,

$$x = r \cos \vartheta, \quad (4.2.51)$$

$$y = r \sin \vartheta \quad (4.2.52)$$

とする. 図 5 と同様, 一様な流れが  $x$  の負の左側から  $x$  の正の右側に流れるように, 角度  $\vartheta$  の起点を  $-\pi$  とする. よって,  $\vartheta$  の範囲は  $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$  となる. また, 円柱の半径を 1 とし, 計算領域の半径の最大値を  $R$  とする.



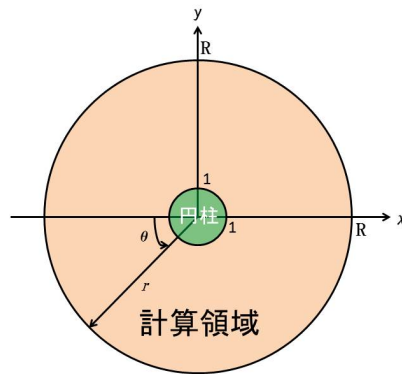


図 6 : 障害物が円柱の場合の計算領域.

このように考えると, 計算を行う  $r, \theta$  空間における計算領域 (解析領域) は, 図 7 のような領域となる.

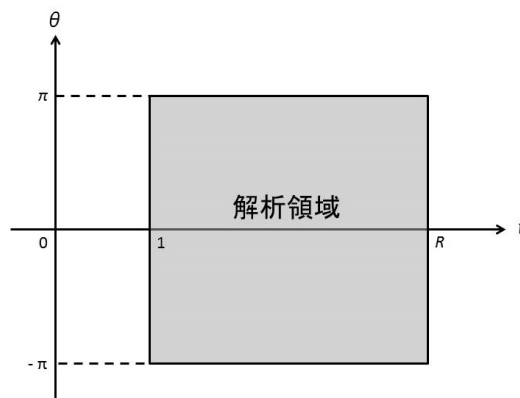


図 7 : 解析領域.

さらに, 動径  $r$  方向に対しても次のような座標変換を行う:

$$r = e^{\omega}. \quad (4.2.53)$$

これにより, 円柱に近いほど格子間隔が細かく, 円柱の影響が小さい遠方ほど格子間隔が粗い, 図 8 のような不等間隔格子となる.

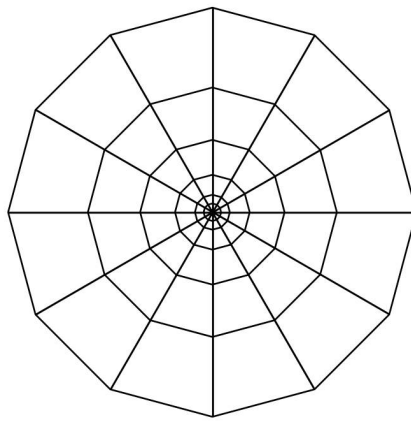


図 8 : 不等間隔格子.

また, (4.2.53) により,  $\omega$  の最大値は,

$$\omega_{max} = \log R \quad (4.2.54)$$

であり,  $\omega$  の最小値は,

$$\omega_{min} = 0 \quad (4.2.55)$$

となる.

不等間隔格子を用いた場合の支配方程式を導くため, 流れ関数 (2.2.15), 流れ関数についての Poisson 方程式 (2.3.19), 渦度方程式 (2.2.14) を極座標で表現し, (4.2.53) の座標変換を行う.

まず, 流れ関数 (2.2.15) に対しての上記の変換を行う. デカルト座標系での流速  $\mathbf{u}$  を

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad (4.2.56)$$

とし、2次元の極座標での流速  $\mathbf{u}$  を

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta \quad (4.2.57)$$

とする。単位ベクトル  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta$  は、それぞれ、

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \vartheta + \mathbf{j} \sin \vartheta, \quad (4.2.58)$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = -\mathbf{i} \sin \vartheta + \mathbf{j} \cos \vartheta \quad (4.2.59)$$

である。よって、(4.2.56), (4.2.57) は、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \\ &= u_r \mathbf{e}_r + v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta \\ &= u_r(\mathbf{i} \cos \vartheta + \mathbf{j} \sin \vartheta) + v_\vartheta(-\mathbf{i} \sin \vartheta + \mathbf{j} \cos \vartheta) \\ &= (u_r \cos \vartheta - v_\vartheta \sin \vartheta)\mathbf{i} + (u_r \sin \vartheta + v_\vartheta \cos \vartheta)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

となり、 $u, v$  は、それぞれ、

$$u = u_r \cos \vartheta - v_\vartheta \sin \vartheta, \quad (4.2.61)$$

$$v = u_r \sin \vartheta + v_\vartheta \cos \vartheta \quad (4.2.62)$$

となる。動径  $r$  は、

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (4.2.63)$$

なので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{x}{r} \\ &= \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (4.2.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{y}{r} \\ &= \sin \vartheta \end{aligned} \quad (4.2.65)$$

となる。また、

$$\frac{\partial}{\partial x} \tan \vartheta = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \quad (4.2.66)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} \cos^2 \vartheta = -\frac{r \sin \vartheta}{r^2 \cos^2 \vartheta} \cos^2 \vartheta \\ &= -\frac{1}{r} \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (4.2.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{x}{y^2} \sin^2 \vartheta = \frac{r \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{1}{r} \cos \vartheta \end{aligned} \quad (4.2.68)$$

となる.  $\partial/\partial x$  は, (4.2.64) と (4.2.67) より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ &= \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\end{aligned}\quad (4.2.69)$$

であり,  $\partial/\partial y$  は, (4.2.65) と (4.2.68) より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ &= \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\end{aligned}\quad (4.2.70)$$

となる. (2.2.15), (4.2.61), (4.2.70) より,

$$\begin{aligned}u &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{r} \cos \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} - \sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ &= u_r \cos \vartheta - v_\vartheta \sin \vartheta\end{aligned}\quad (4.2.71)$$

となる. (4.2.53), (4.2.71) と三角関数の 1 次独立性より, 速度と流れ関数の関係式は,

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \quad (4.2.72)$$

$$= -e^{-\omega} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}, \quad (4.2.73)$$

$$v_\vartheta = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (4.2.74)$$

$$= e^{-\omega} \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \quad (4.2.75)$$

となる.

次に, 流れ関数についての Poisson 方程式 (2.3.19) の変換を行う. (4.2.64) と (4.2.69) より, (2.3.19) の左辺第 1 項は,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \left( \cos \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) \quad (4.2.76)$$

と変形できる. また, (4.2.65) と (4.2.70) より, (2.3.19) の左辺第 2 項は,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \left( \sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) \quad (4.2.77)$$

と変形できる. さらに, (4.2.53) より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \omega} \\ &= e^{-\omega} \frac{\partial}{\partial \omega},\end{aligned}\quad (4.2.78)$$

$$\frac{1}{r^2} = e^{-2\omega} \quad (4.2.79)$$

である. (4.2.78) と (4.2.79) より, (4.2.76) と (4.2.77) の和は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \\ &= e^{-2\omega} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \right)\end{aligned}\quad (4.2.80)$$

となる. (4.2.80) が不等間隔格子を用いた場合の流れ関数についての Poisson 方程式である.

最後に, 渦度方程式 (2.2.14) に対しての変換を行う. (2.2.14) の左辺第 2, 3 項は,

$$\begin{aligned}u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta \\ &= (u_r \mathbf{e}_r + u_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta) \cdot \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \right) \\ &= u_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + u_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \\ &= u_r e^{-\omega} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} + u_\vartheta e^{-\omega} \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \\ &= e^{-\omega} \left( u_r \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} + u_\vartheta \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \right)\end{aligned}\quad (4.2.81)$$

と変形できる. また, (2.2.14) の右辺は, (4.2.80) より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{Re} \nabla^2 \zeta &= \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{e^{-2\omega}}{Re} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \vartheta^2} \right)\end{aligned}\quad (4.2.82)$$

となる. (4.2.79) と (4.2.80) より, 渦度方程式 (2.2.14) は,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + e^{-\omega} \left( u_r \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} + u_\vartheta \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \right) = \frac{e^{-2\omega}}{Re} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \vartheta^2} \right) \quad (4.2.83)$$

と変形できる. (4.2.83) が不等間隔格子を用いた場合の渦度方程式である.

### 4.2.1 物理境界条件

前述のような流れを表現する物理的な境界条件を説明する.

流入口 ( $-\pi \leq \vartheta < -\pi/2$ ,  $\pi/2 < \vartheta \leq \pi$ )

流入口である半径  $R$  の計算領域の端から速度  $U$  の一般流が  $x$  軸方向に流入するので,

$$u = U, \quad (4.2.84)$$

$$v = 0 \quad (4.2.85)$$

である. (2.2.15), (4.2.52), (4.2.53) より, 流れ関数  $\phi$  は,

$$\begin{aligned} \phi &= -\int_0^y U dy \\ &= -Uy + \text{const} \\ &= -Uy \\ &= -Ur \sin(\vartheta - \pi) \\ &= -Ue^{\omega} \sin(\vartheta - \pi) \end{aligned} \quad (4.2.86)$$

となる. (4.2.86) の定数項は領域の中心で  $\phi = 0$  となるように設定している. (2.3.19) より, 渦度  $\zeta$  は,

$$\zeta = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (4.2.87)$$

である.

左端 ( $\vartheta = \pi/2$ )

障害物が四角柱の場合と同様, 計算領域は, 障害物が流れに及ぼす影響を考えなくても良いほど十分広い領域としている. よって, 流速は流入口の流速によるので,

$$u = U, \quad (4.2.88)$$

$$v = 0 \quad (4.2.89)$$

である. (2.2.15), (4.2.54) より, 流れ関数  $\phi$  は,

$$\begin{aligned} \phi &= -UR \\ &= -Ue^{\omega_{max}} \end{aligned} \quad (4.2.90)$$

となる. (2.3.19) より, 渦度  $\zeta$  は,

$$\zeta = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (4.2.91)$$

である.

右端 ( $\vartheta = -\pi/2$ )

右端も左端と同様に,

$$u = U, \quad (4.2.92)$$

$$v = 0 \quad (4.2.93)$$

である. 流れ関数  $\phi$  と渦度  $\zeta$  も同様に,

$$\begin{aligned} \phi &= UR \\ &= Ue^{\omega_{max}} \end{aligned} \quad (4.2.94)$$

$$\zeta = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (4.2.95)$$

となる.

流出口 ( $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$ )

速度に対する自然境界条件を設定する:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.2.96)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4.2.97)$$

とする.

円柱

円柱の境界, 表面では, 流速の速度は,

$$u_r = 0, \quad (4.2.98)$$

$$v_\vartheta = 0. \quad (4.2.99)$$

(2.2.15) より, 流れ関数は,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = 0, \quad (4.2.100)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad (4.2.101)$$

$$\phi = 0 \quad (4.2.102)$$

となる.

## 4.2.2 数値境界条件

上で述べた物理境界条件の数値的表現 (数値境界条件) を説明する.

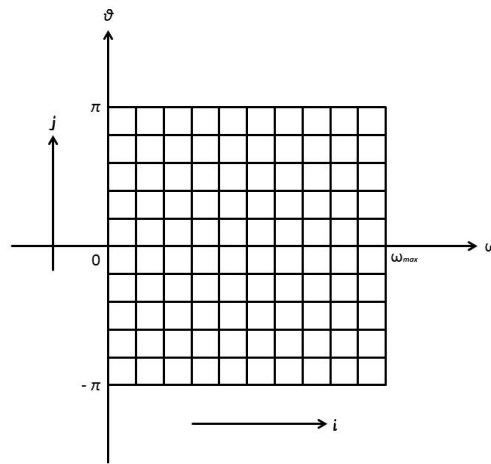


図 9 : 等間隔格子.

図 8 のような不等間隔格子は,  $(\omega, \vartheta)$  空間では, 図 9 のような等間隔格子として表現できる.  $\omega$  方向の格子点の番号を  $i$  とし,  $\vartheta$  方向の格子点の番号を  $j$  とする. ただし, 格子点の番号の起点は,  $(\omega, \vartheta) = (0, -\pi)$  であることに注意する. また,  $\Delta\omega$ ,  $\Delta\vartheta$  を各方向の格子間隔,  $I$  を  $\omega = \omega_{max}$  上の格子点の番号,  $J$  を  $\vartheta = \pi$  上の格子点の番号とする.



流入口 ( $\omega = \omega_{max}$ ,  $-\pi \leq \vartheta < -\pi/2$ ,  $\pi/2 < \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq j \leq J/4 - 1$ ,  $3J/4 + 1 \leq j \leq J$ )

流れの速度は, 物理境界条件 (4.2.84), (4.2.85) より,

$$u_{I,j} = U, \quad (4.2.103)$$

$$v_{I,j} = 0 \quad (4.2.104)$$

である. 流れ関数は, (4.2.86) より,

$$\begin{aligned} \phi_{I,j} &= -Ue^{I\Delta\omega} \sin(j\Delta\vartheta - \pi) \\ &= -Ue^{\omega_{max}} \sin(j\Delta\vartheta - \pi) \\ &= -Ue^{\omega_{max}} \sin \Delta\vartheta \left( j - \frac{\pi}{\Delta\vartheta} \right) \\ &= -Ue^{\omega_{max}} \sin \Delta\vartheta \left( j - \frac{J}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.2.105)$$

となる. このようによければ, 流入口の中間の格子点  $J/2$  の流れ関数は,

$$\phi_{I,J/2} = 0 \quad (4.2.106)$$

となる. 物理境界条件と同様, (2.3.19) より, 渦度  $\zeta_{I,j}$  は,

$$\zeta_{I,j} = 0 \quad (4.2.107)$$

となる.

左端 ( $\omega = \omega_{max}$ ,  $\vartheta = \pi/2$ ,  $j = 3J/4$ )

流れの速度は, 物理境界条件 (4.2.88), (4.2.89) より,

$$u_{I,3J/4} = U, \quad (4.2.108)$$

$$v_{I,3J/4} = 0 \quad (4.2.109)$$

である. 流れ関数は, 物理境界条件 (4.2.90) より,

$$\phi_{I,3J/4} = -Ue^{I\Delta\omega} \quad (4.2.110)$$

となる. 渦度に対しては,  $R$  が非常に大きいので,

$$\frac{\partial \zeta_{I,3J/4}}{\partial r} = 0 \quad (4.2.111)$$

と考える. すなわち, 渦度  $\zeta_{I,3J/4}$  の数値境界条件は,

$$\zeta_{I,3J/4} = \zeta_{I-1,3J/4} \quad (4.2.112)$$

となる.

右端 ( $\omega = \omega_{max}$ ,  $\vartheta = -\pi/2$ ,  $j = J/4$ )

流れの速度は, 物理境界条件 (4.2.92), (4.2.93) より,

$$u_{I,J/4} = U, \quad (4.2.113)$$

$$v_{I,J/4} = 0 \quad (4.2.114)$$

である. 流れ関数は, 物理境界条件 (4.2.94) より,

$$\phi_{I,J/4} = Ue^{I\Delta\omega} \quad (4.2.115)$$

となる. 渦度に対しては, 左端と同様に,

$$\zeta_{I,J/4} = \zeta_{I-1,J/4} \quad (4.2.116)$$

とする.

流出口 ( $\omega = \omega_{max}$ ,  $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$ ,  $J/4 + 1 \leq j \leq 3J/4 - 1$ )

物理境界条件 (4.2.96), (4.2.97) は,

$$\phi_{I,j} = \phi_{I-1,j} \quad (4.2.117)$$

とすることで実現される. 渦度については, 自然境界条件,

$$\frac{\partial \zeta_{I,j}}{\partial \omega} = 0 \quad (4.2.118)$$

を設定し, (4.2.118) を後進差分すると,

$$\frac{\zeta_{I,j} - \zeta_{I-1,j}}{\Delta\omega} = 0 \quad (4.2.119)$$

となるので, 渦度  $\zeta_{I,j}$  の数値境界条件は,

$$\zeta_{I,j} = \zeta_{I-1,j} \quad (4.2.120)$$

となる.

円柱 ( $\omega = 0$ )

物理境界条件より, 円柱の境界では,

$$u_{0,j} = 0, \quad (4.2.121)$$

$$v_{0,j} = 0, \quad (4.2.122)$$

$$\phi_{0,j} = 0 \quad (4.2.123)$$

である.

渦度に関する境界条件は, 以下のように設定する:  
円柱の境界からひとつ外側の格子点において, 流れ関数  $\phi_{1,j}$  をテーラー展開すると,

$$\begin{aligned}\phi_{1,j} &= \phi_{0,j} + \frac{\partial\phi_{0,j}}{\partial\omega}\Delta\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_{0,j}}{\partial\omega^2}(\Delta\omega)^2 + \dots \\ &\simeq \phi_{0,j} + \frac{\partial\phi_{0,j}}{\partial\omega}\Delta\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_{0,j}}{\partial\omega^2}(\Delta\omega)^2\end{aligned}\quad (4.2.124)$$

となる. (4.2.122) より,

$$v_{0,j} = \frac{\partial\phi_{0,j}}{\partial\omega} = 0 \quad (4.2.125)$$

となる. (4.2.123), (4.2.125) より, (4.2.124) は,  $\Delta\omega$  の 2 次までの精度で,

$$\phi_{1,j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_{0,j}}{\partial\omega^2}(\Delta\omega)^2 \quad (4.2.126)$$

となる. (2.3.19) より,

$$\frac{\partial^2\phi_{0,j}}{\partial\omega^2} = \zeta_{0,j} \quad (4.2.127)$$

である. (4.2.126), (4.2.127) より, 渦度  $\zeta_{0,j}$  は,

$$\zeta_{0,j} = \frac{2\phi_{1,j}}{(\Delta\omega)^2} \quad (4.2.128)$$

となる.

## 第5章 予備実験

本研究における流れの計算を行う際に、数値計算が von Neumann の安定性の条件を満たす必要がある。したがって、von Neumann の安定性の条件を満たすためのレイノルズ数を確認する。また、境界が流れに影響を与えるのは好ましくない。そこで、流れに及ぼす境界の影響を考えなくて良いほど十分な流入出口の幅を検討する。また、障害物の下流の領域の広さが流れに及ぼす影響を調べるため、岸の長さについて検討する。これらの計算領域の予備実験を行った後、Poisson 方程式の反復回数の予備実験を行う。本研究の数値計算では、Gauss - Seidel 法 (付録 B.4 を参照) を使って、流れ関数についての Poisson 方程式を計算する。計算の打ち切り誤差と反復回数を決めて解を求める。計算回数が多いほど、また、打ち切り誤差が小さいほどより信頼のおける解であるが、計算コストは大きくなる。そこで、解の信頼度と計算コストを両立させている計算の反復回数と打ち切り誤差を検討する。予備実験において、流れの障害物は四角柱とし、渦度方程式 (2.2.18) 及び、流れ関数と渦度の関係式 (2.3.23) を空間微分については中央差分によって近似し、2 次の Adams-Bashforth 法 (付録 B.2 を参照) によって時間発展を計算した。なお、(2.2.18) の移流項には Arakawa Jacobian 法 (付録 B.3 を参照) を採用した。

### 5.1 von Neumann の安定性の条件を満たすレイノルズ数の確認

はじめに、von Neumann の安定性の条件を満たすレイノルズ数の範囲を確認する。本実験の条件、 $\Delta x = 0.1$ 、 $\Delta t = 0.001$  では、(3.3.88) より、

$$\begin{aligned}\mu &= U \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ &= 1 \times \frac{10^{-2}}{10^{-1}} \\ &= 10^{-2}.\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

また, (3.3.89) より,

$$\begin{aligned}\mu' &= \frac{1}{Re} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{1}{Re} \frac{10^{-3}}{10^{-2}} \\ &= \frac{1}{Re} \times 10^{-1}.\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

von Neumann の安定性の条件は, (3.3.97) と (5.1.1) より,

$$\begin{aligned}10^{-4} &\leq \frac{20}{Re}, \\ Re &\leq 2 \times 10^5.\end{aligned}\tag{5.1.3}$$

また, (3.3.98) と (5.1.2) より,

$$\begin{aligned}0 &\leq \frac{1}{Re} \times 10^{-1} \leq \frac{1}{2}, \\ 2 \times 10^{-1} &\leq Re\end{aligned}\tag{5.1.4}$$

となる. (5.1.3) と (5.1.4) より, von Neumann の安定性の条件を満たすレイノルズ数の範囲は  $2 \times 10^{-1} \leq Re \leq 2 \times 10^5$  である.

## 5.2 流入出口の幅に関する実験

流入出口の適切な幅を検討するため, その幅を変えた 2 つの実験 (実験 A, B) を行った. ここでは, カルマン渦が障害物の下流で発生することが知られているレイノルズ数が 100 ( $Re = 100$ ) のとき (水島, 武本, 2010) において実験を行った. 以下に共通の計算条件を表 1 に, 各実験ごとのその他の計算条件を表 2 に示す.

表 1: 共通の計算条件.

流速	$U = 1$
四角柱の 1 辺の長さ	$S = 1$
格子点間隔	$\Delta x = \Delta y = 0.1$
時間差分間隔	$\Delta t = 0.001$
計算時間	$0 \leq t \leq 100$
レイノルズ数	$Re = 100$
流れ関数の打ち切り誤差	$ \Delta\phi_{i,j}  \leq 10^{-6}$
計算の反復回数	100 回

表 2: 流入出口の幅に関する実験の計算条件.

	実験 A	実験 B
計算領域	$40 \times 10$	$40 \times 20$
格子点数	$401 \times 101$	$401 \times 201$
四角柱の中心位置	$(x, y) = (10, 5)$	$(x, y) = (10, 10)$

各実験の計算の最終時刻における渦度場を図 10, 11 にそれぞれ示す.

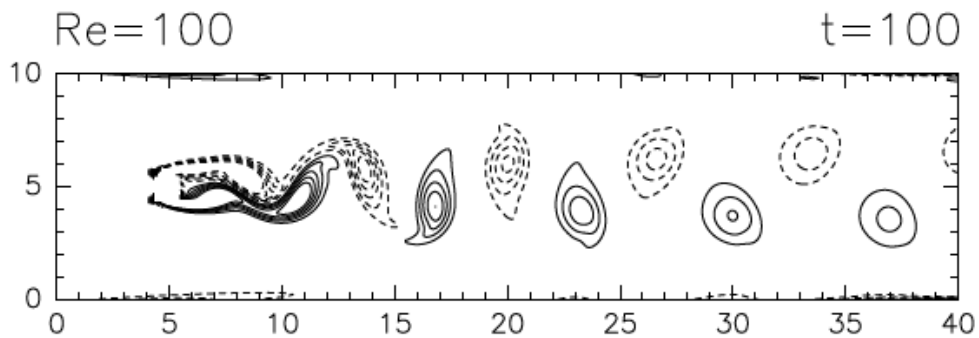


図 10: 実験 A. 計算時間  $t = 100$  における渦度の等値線図. 実線は正の渦度, 破線は負の渦度を示す. 等値線の間隔は 0.01 である.

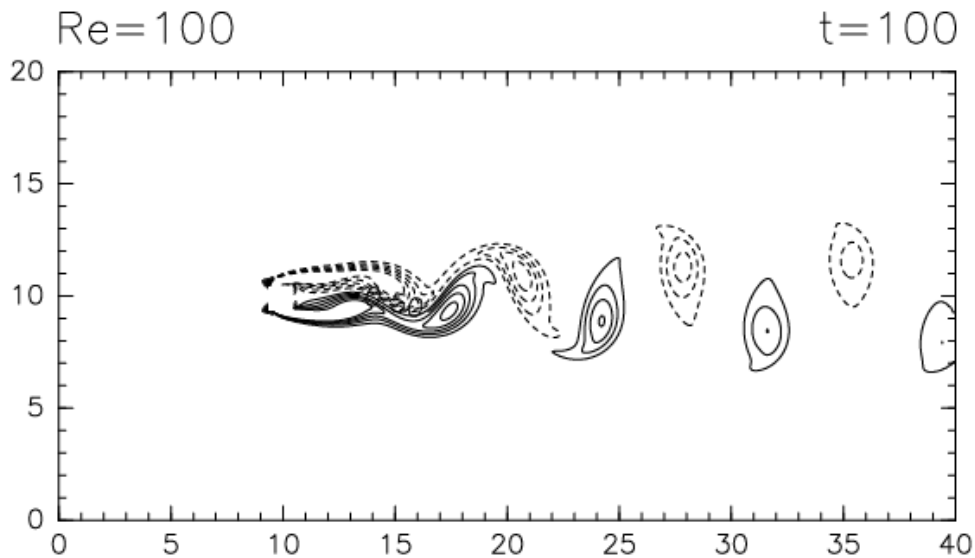


図 11：実験 B. 計算時間  $t = 100$  における渦度の等値線図. 計算時間や等値線の間隔は図 10 と同様.

実験 A, B の結果を元に, 本研究における適当な流入出口の長さを考察をする. 実験 A は, 図 10 より, 障害物付近と渦列の後方の左岸と右岸上に渦度の等値線が引かれている. 実験 B は, 図 11 より, 左岸と右岸上に渦度の等値線は引かれていない. 領域の幅が十分に広ければ, 障害物の存在の影響は無視することができ, 流れは渦度 0 の一様流になると期待される.

以上より, 障害物や渦列が左岸と右岸に与える影響が少ないのは, 実験 B の方である. よって, 本研究においては, 実験 B の流入口の長さ,  $y = 20$  を採用する.

### 5.3 岸の長さに関する実験

次に, 岸の適切な長さを検討するため, 前節の実験 B と同じ幅をもち, 長さを変えた 2 つの実験 (実験 C, D) を行った. ここでも, カルマン渦が障害物の下流で発生することが知られているレイノルズ数が 100 ( $Re = 100$ ) のときにおいて実験を行った. 以下に共通の計算条件を表 3 に, 各実験ごとのその他の計算条件を表 4 に

示す.

表 3 : 共通の計算条件.

流速	$U = 1$
四角柱の 1 辺の長さ	$S = 1$
格子点間隔	$\Delta x = \Delta y = 0.1$
時間差分間隔	$\Delta t = 0.001$
計算時間	$0 \leq t \leq 100$
レイノルズ数	$Re = 100$
流れ関数の打ち切り誤差	$ \Delta\phi_{i,j}  \leq 10^{-6}$
計算の反復回数	100 回
四角柱の中心位置	$(x, y) = (10, 10)$

表 4 : 岸の長さに関する実験の計算条件.

	実験 C	実験 D
計算領域	$60 \times 20$	$80 \times 20$
格子点数	$601 \times 101$	$801 \times 201$

各実験の計算の最終時刻における渦度場を図 12, 13 にそれぞれ示す.

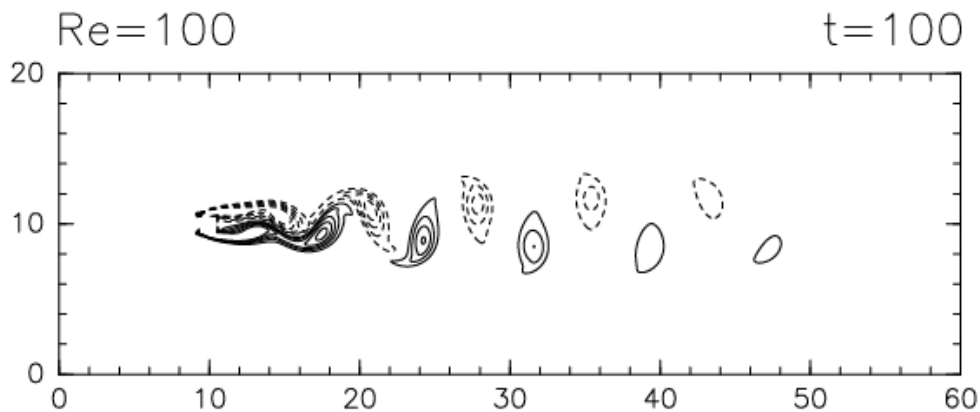


図 12 : 実験 C. 計算時間  $t = 100$  における渦度の等値線図. 計算時間や等値線の間隔は図 10 と同様.



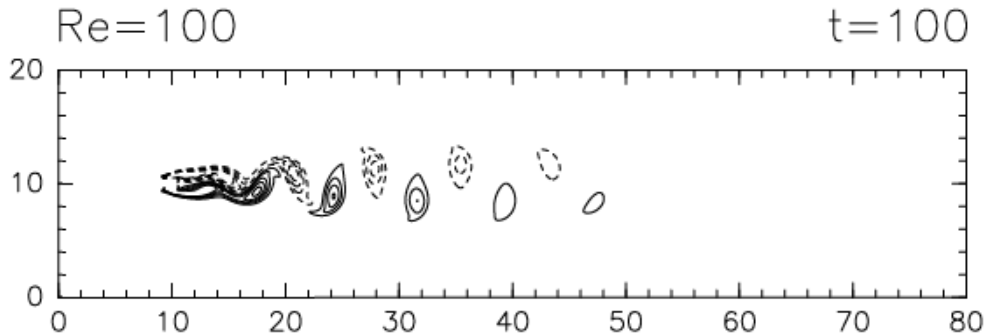


図 13 : 実験 D. 計算時間  $t = 100$  における渦度の等値線図. 計算時間や等値線の間隔は図 10 と同様.

実験 B ~ D の結果を元に, 本研究における適当な岸の長さを考察をする. 実験 B は, 図 11 より, 障害物の後方から  $x = 40$  の流出口まで渦列が表現されているが, 実験 C, D は, 図 12, 13 より, 流出口側に渦列の存在しない領域がある. また, 渦の配列の間隔を確認すると, 実験 B, C, D ともにほとんど同じである.

以上より, 岸の長さによる違いが渦列に与える影響は少ないので, 計算コストに無駄のないのが良い. よって, 本研究においては, 実験 B の岸の長さ,  $x = 40$  を採用する.

## 5.4 反復回数の実験

最後に, 流れ関数に関する Poisson 方程式である流れ関数と渦度の関係式の計算の反復回数を検討するため, 実験 E を行った. ここでは, 反復回数を 100 回とし, その回数の妥当性を調べる. 前節と同様, レイノルズ数を 100 ( $Re = 100$ ) とした. この実験では, Gauss-Seidel 法を用いたときの絶対誤差の最大値である  $\tau$  回目と  $\tau + 1$  回目の流れ関数の差,  $(\Delta\phi)_{max} = |\phi_{i,j}^{\tau+1} - \phi_{i,j}^{\tau}|$  を計算時間  $0 \leq t \leq 100$  の間で調べた. 以下に実験 E の計算条件を表 5 に示す.

表 5: 実験 E の計算条件.

流速	$U = 1$
四角柱の 1 辺の長さ	$S = 1$
格子点間隔	$\Delta x = \Delta y = 0.1$
時間差分間隔	$\Delta t = 0.001$
計算時間	$0 \leq t \leq 100$
レイノルズ数	$Re = 100$
計算の反復回数	100 回
四角柱の中心位置	$(x, y) = (10, 10)$
計算領域	$40 \times 20$
格子点数	$401 \times 201$

$\tau = 99$  としたときの流れ関数の絶対誤差の最大値の時系列を図 14 に示す.

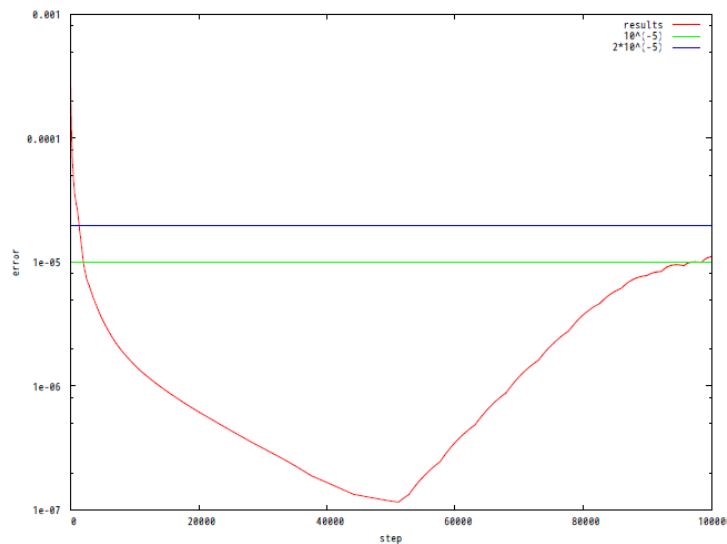


図 14: 実験 E. 流れ関数の絶対誤差の最大値の時系列. 縦軸は誤差の値. 横軸は時間ステップで 100000 のときが  $t = 100$ . 緑線は値が  $10^{-5}$ , 青線は値が  $2 \times 10^{-5}$  である.

実験 E は, 図 14 より, シミュレーションの計算の初期時刻は流れ関数の値の誤

差が大きいが、その他の時刻では、誤差が  $2 \times 10^{-5}$  以下である。  $\phi = Uy$  であり、  $U = 1$ ,  $-10 \leq y \leq 10$  なので流れ関数は  $-10 \sim 10$  の間の値をとる。 よって、この絶対誤差は相対誤差とみなして良い。 武本ら (2012) が用いた流れ関数に関する Poisson 方程式の数値計算法、SOR 法では、流れ関数の計算の打ち切り誤差を  $10^{-6}$  以下としている。 しかし、本研究では、武本ら (2012) の計算法より精度は高くないが、上記で述べた理由から誤差が流れに与える影響は少ないことと計算コストを軽減するため、計算の反復回数は 100 回、打ち切り誤差は  $10^{-5}$  が適切であると判断する。

## 第6章 実験

### 6.1 渦列幅と渦間隔についての実験

Kármán (1911) の理論的計算によると, カルマン渦列は, 渦列幅  $h$  と渦間隔  $l$  の比が

$$\frac{h}{l} = 0.28$$

のときに安定であるとされる. 本実験において, Kármán の理論値とシミュレーションの結果との適合性や渦列の特徴を調べた. 予備実験と同様, 流れの障害物は四角柱である.

#### 6.1.1 計算条件

前章の予備実験から決定した本実験の計算条件を表 6 に示す:

表 6 : 実験の計算条件.

流速	$U = 1$
四角柱の 1 辺の長さ	$S = 1$
格子点間隔	$\Delta x = \Delta y = 0.1$
時間差分間隔	$\Delta t = 0.001$
計算時間	$0 \leq t \leq 100$
流れ関数の打ち切り誤差	$ \Delta\phi_{i,j}  \leq 10^{-5}$
計算の反復回数	100 回
四角柱の中心位置	$(x, y) = (10, 10)$
計算領域	$40 \times 20$
格子点数	$401 \times 201$

## 6.1.2 実験結果

各レイノルズ数 ( $Re = 80, 90, 100$ ) の計算の最終時刻における渦度場の渦列幅  $h$  と渦間隔  $l$  の様子を図 15 ~ 17 にそれぞれ示す. また, 各レイノルズ数の渦 A, B, C... の中心座標, 渦の中心 (渦度の極大値, 極小値) から一つ下流側の渦の中心までの長さ, 渦列幅  $h^{*1}$  と渦間隔  $l$ , また, その比である  $h/l$  をまとめた表 7 ~ 9 もそれぞれ示す.

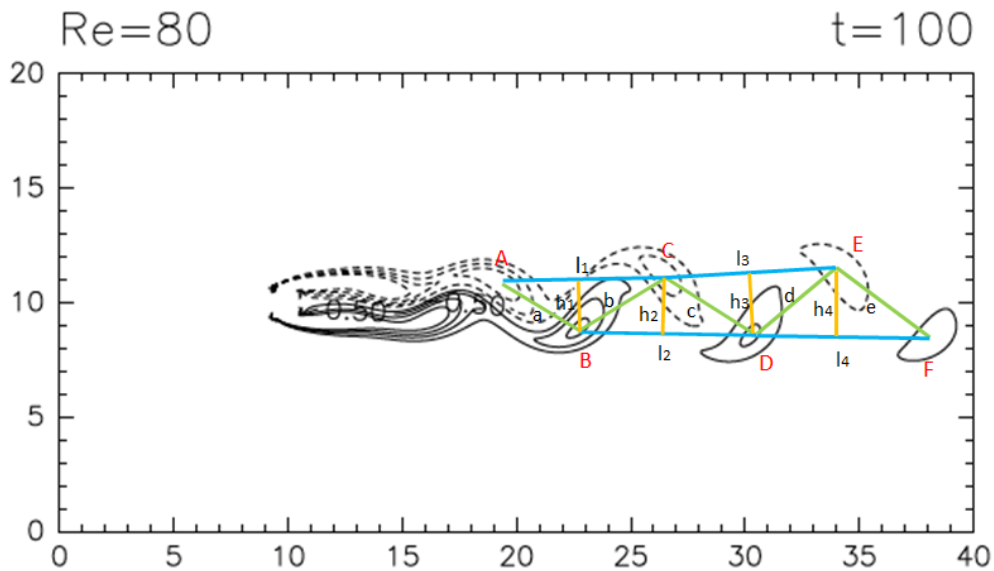


図 15 :  $Re = 80$ , 計算時間  $t = 100$  における渦度の等値線図. 実線は正の渦度, 破線は負の渦度を示す. また, 等値線の間隔は 0.01 である. 各渦を A ~ F とおく. 渦 A と渦 B の中心 (渦度の極小値と極大値) を結んだ直線を a, 渦 B と渦 C を結んだ直線を b のようにおく. また, 渦 A と渦 C の中心の間隔を  $l_1$ , 渦 B の中心から垂直に  $l_1$  に下ろした直線を  $h_1$  のようにおく.

\*<sup>1</sup> $h_1$  を例に  $h$  の求め方について記述する.

まず, 渦 A, B, C について, 渦の中心の座標を求める. これにより渦間隔  $l_1$  と渦の中心の間隔  $a, b$  が求められる. さらに, ヘロンの公式より, 渦 A, B, C の中心の座標で作られる三角形の面積  $S_1$  が求められる.  $S_1$  と  $l_1$  より渦列幅  $h_1$  が計算できる.

表 7:  $Re = 80$  のときの渦 A ~ F の中心座標, 一つ下流側の渦との中心間の長さ  $a \sim e$ . また, 渦列幅  $h$ , 渦間隔  $l$  とその比.

中心座標	長さ	渦列幅	渦間隔	比 ( $h/l$ )
A (19.3, 11.0)	$a = 4.12$	$h_1 = 2.22$	$l_1 = 7.31$	$h_1/l_1 = 0.30$
B (22.8, 9.0)	$b = 4.44$	$h_2 = 2.50$	$l_2 = 7.51$	$h_2/l_2 = 0.33$
C (26.6, 11.3)	$c = 4.58$	$h_3 = 2.84$	$l_3 = 7.61$	$h_3/l_3 = 0.37$
D (30.3, 8.6)	$d = 4.92$	$h_4 = 3.10$	$l_4 = 7.90$	$h_4/l_4 = 0.39$
E (34.2, 11.6)	$e = 5.12$			
F (38.2, 8.4)				

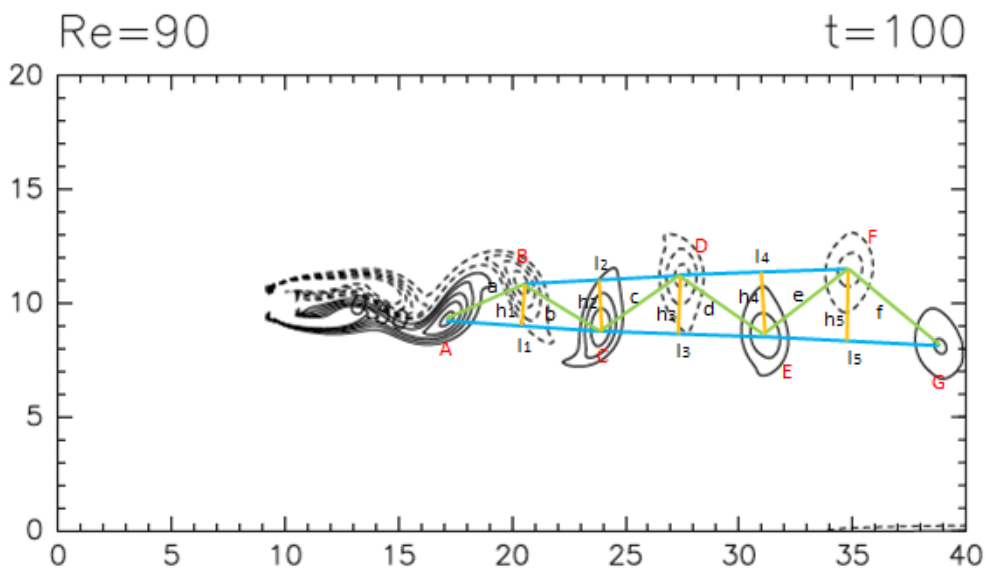


図 16:  $Re = 90$  のときの渦度の等値線図. その他の条件などは図 15 と同様.

表 8 :  $Re = 90$  のときの渦 A ~ G の中心座標, 一つ下流側の渦との中心間の長さ  $a \sim f$ . また, 渦列幅  $h$ , 渦間隔  $l$  とその比.

中心座標	長さ	渦列幅	渦間隔	比 ( $h/l$ )
A (17.3, 9.4)	$a = 3.58$	$h_1 = 1.79$	$l_1 = 6.71$	$h_1/l_1 = 0.27$
B (20.5, 11.0)	$b = 4.03$	$h_2 = 2.14$	$l_2 = 7.11$	$h_2/l_2 = 0.30$
C (24.0, 9.0)	$c = 4.27$	$h_3 = 2.44$	$l_3 = 7.31$	$h_3/l_3 = 0.33$
D (27.6, 11.3)	$d = 4.52$	$h_4 = 2.74$	$l_4 = 7.41$	$h_4/l_4 = 0.37$
E (31.3, 8.7)	$e = 4.70$	$h_5 = 3.13$	$l_5 = 7.72$	$h_5/l_5 = 0.41$
F (35.0, 11.6)	$f = 5.25$			
G (39.0, 8.2)				

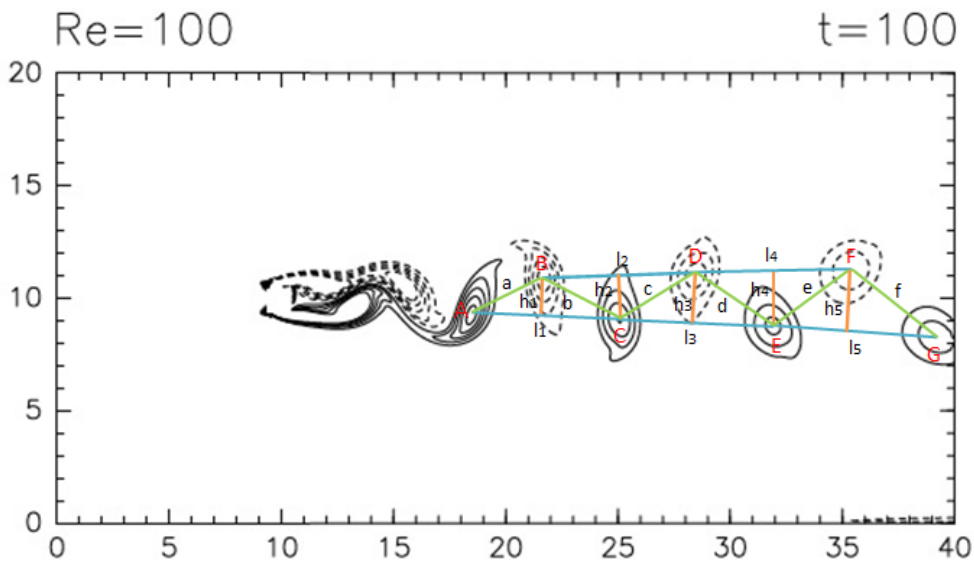


図 17 :  $Re = 100$  のときの渦度の等値線図. その他の条件などは図 15 と同様.

表 9 :  $Re = 100$  のときの渦 A ~ G の中心座標, 一つ下流側の渦との中心間の長さ  $a \sim f$ . また, 渦列幅  $h$ , 渦間隔  $l$  とその比.

中心座標	長さ	渦列幅	渦間隔	比 ( $h/l$ )
A (18.6, 9.4)	$a = 3.67$	$h_1 = 1.74$	$l_1 = 6.71$	$h_1/l_1 = 0.26$
B (21.9, 11.0)	$b = 3.89$	$h_2 = 1.95$	$l_2 = 6.70$	$h_2/l_2 = 0.29$
C (25.3, 9.1)	$c = 3.86$	$h_3 = 2.14$	$l_3 = 6.91$	$h_3/l_3 = 0.31$
D (28.6, 11.1)	$d = 4.27$	$h_4 = 2.40$	$l_4 = 6.90$	$h_4/l_4 = 0.35$
E (32.2, 8.8)	$e = 4.14$	$h_5 = 3.28$	$l_5 = 6.52$	$h_5/l_5 = 0.50$
F (35.5, 11.3)	$f = 5.16$			
G (39.7, 8.3)				

表 7 ~ 9 より, レイノルズ数  $Re = 80, 90, 100$  のいずれの場合も渦列幅  $h$  と渦間隔  $l$  の比,  $h/l$  が Kármán の理論値 0.28 に近い値である. よって, 本研究において, レイノルズ数  $Re = 80, 90, 100$  のときのシミュレーションの結果は Kármán の理論と整合的であると言える. また, 室内実験 (種子田, 1988) によると,  $h/l$  は障害物から離れるにつれ大きくなるという特徴を持つ. 本実験の  $h/l$  も障害物から離れるにつれ大きくなっているので, シミュレーションの結果が室内実験の結果とも整合的であると言える.

## 6.2 臨界レイノルズ数についての実験

流れが不安定になり, カルマン渦列が発生する臨界レイノルズ数を調べた. 前章の実験より, レイノルズ数が 80 までは渦列が発生することが分かっているので, 臨界レイノルズ数はそれより小さい. 水島, 武本 (2010) によって, 障害物が角柱の場合, 臨界レイノルズ数は  $Re = 46.2$  と求められている. よって, 本実験では, レイノルズ数が  $46 \leq Re \leq 46.5$  の範囲において, 流れが安定であるか不安定であるかを調べた. 前章と同様に, 流れの障害物は四角柱である.

レイノルズ数が  $Re = 46, 46.2, 46.5$  における  $t = 100$  と  $t = 2000$  のときの渦度場とそれらの渦度の差をとった偏差場を確認する. レイノルズ数と計算時間以外の計算条件は前章の表 6 と同じである. 各レイノルズ数の渦度の等値線図と渦度の偏差の等値線図を図 18 ~ 26 にそれぞれ示す.



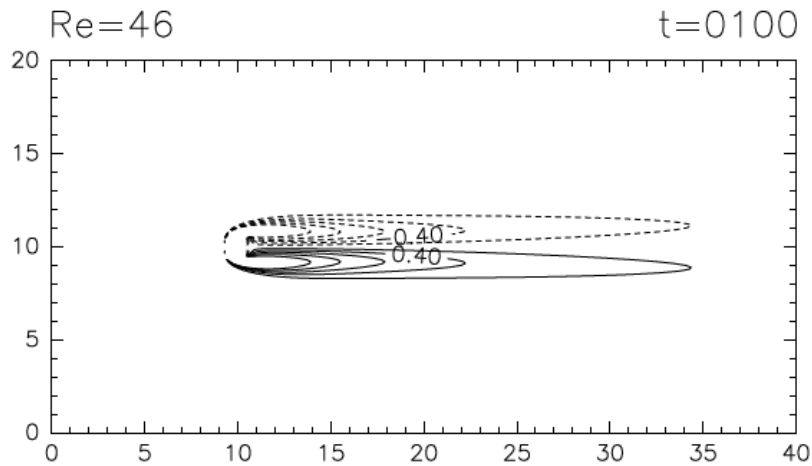


図 18 :  $Re = 46$ , 計算時間  $t = 100$  における渦度の等値線図. 実線は正の渦度, 破線は負の渦度を示す. また, 等値線の単位は  $5.0 \times 10^{-6}$  である.

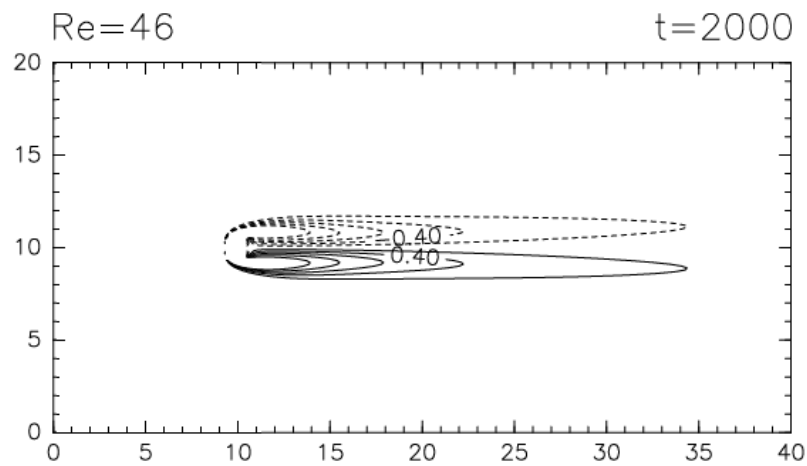


図 19 :  $Re = 46$ , 計算時間  $t = 2000$  における渦度の等値線図. 等値線の間隔などは図 18 と同様.

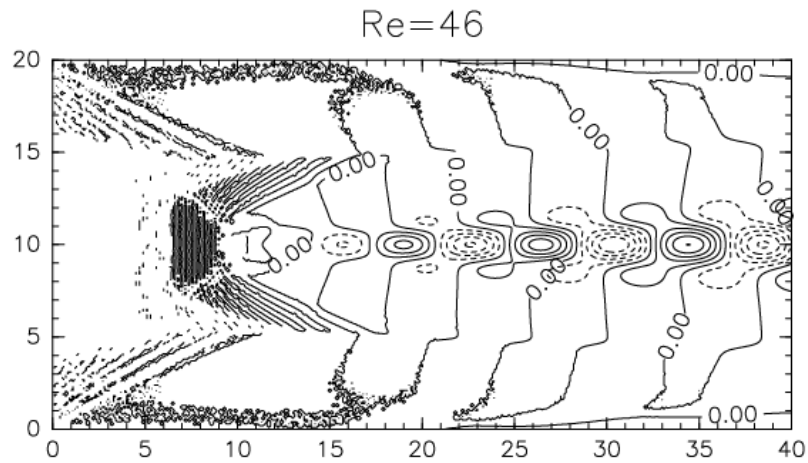


図 20 :  $Re = 46$ , 計算時間  $t = 100$  と  $t = 2000$  における渦度の値の差の等値線図. 等値線の間隔は 0.01 である.

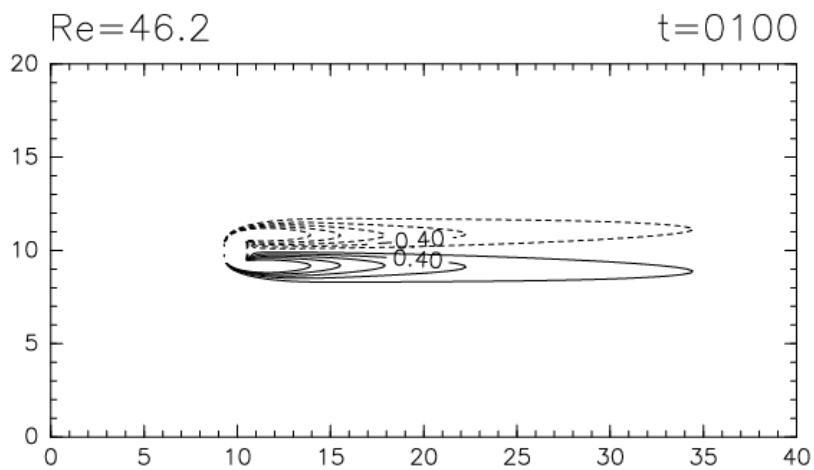


図 21 :  $Re = 46.2$ , 計算時間  $t = 100$  における渦度の等値線図. 等値線の間隔などは図 18 と同様.

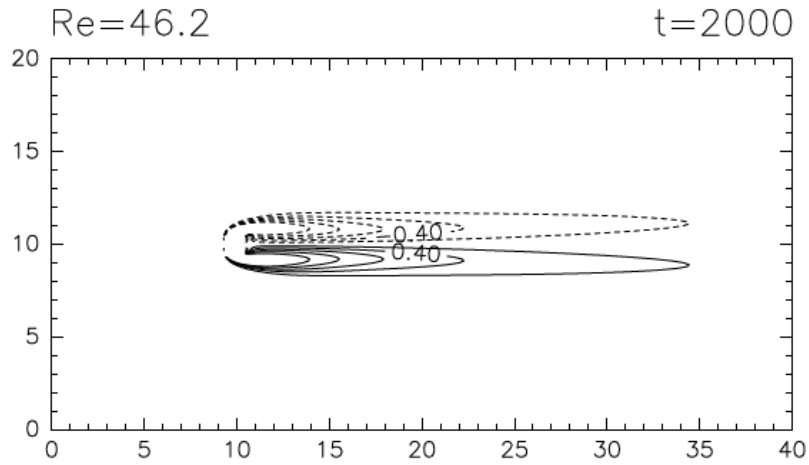


図 22 :  $Re = 46.2$ , 計算時間  $t = 2000$  における渦度の等値線図. 等値線の間隔などは図 18 と同様.

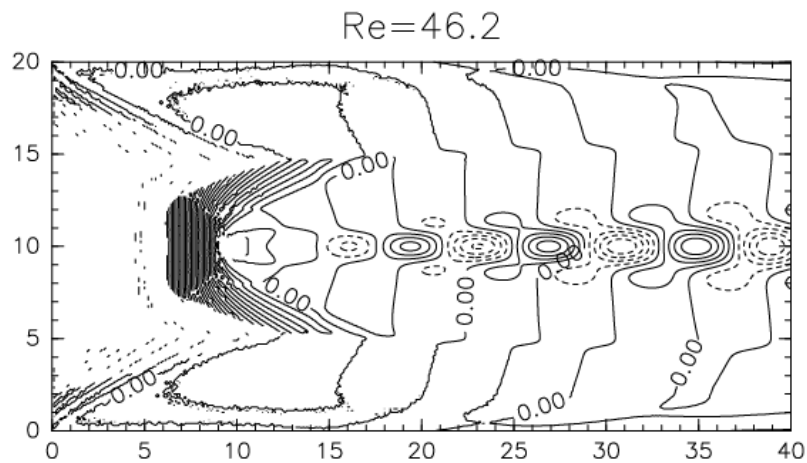


図 23 :  $Re = 46.2$ , 計算時間  $t = 100$  と  $t = 2000$  における渦度の値の差の等値線図. 等値線の単位は  $2.5 \times 10^{-5}$  である.

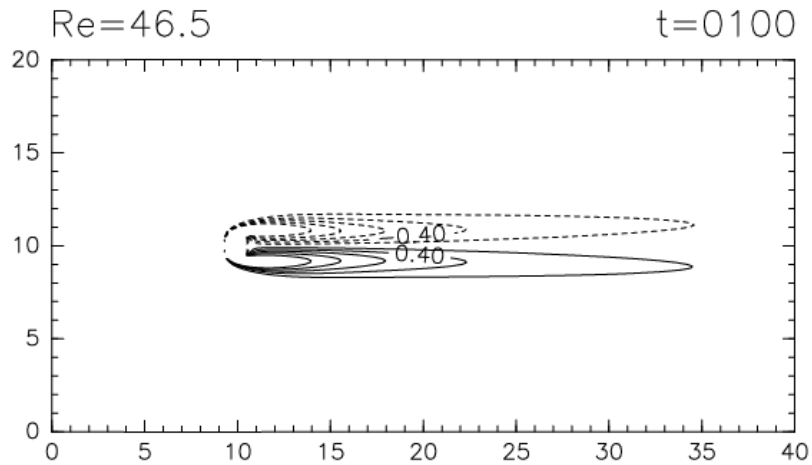


図 24 :  $Re = 46.5$ , 計算時間  $t = 100$  における渦度の等値線図. 等値線の間隔などは図 18 と同様.

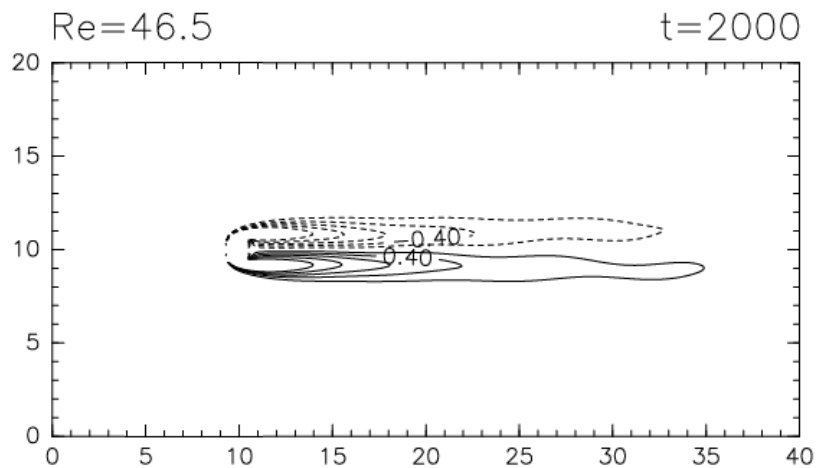


図 25 :  $Re = 46.5$ , 計算時間  $t = 2000$  における渦度の等値線図. 等値線の間隔などは図 18 と同様.

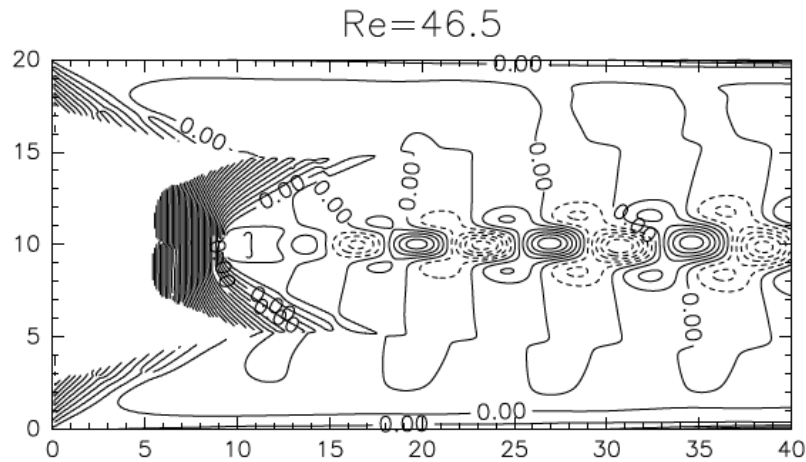


図 26 :  $Re = 46.5$ , 計算時間  $t = 100$  と  $t = 2000$  における渦度の値の差の等値線図. 等値線の単位は  $1.0 \times 10^{-2}$  である.

レイノルズ数が  $Re = 46, 46.2$  のときは図 20, 23 より, 渦度の差の等値線が  $y = 10$  に関してほぼ対称であり, 等値線の単位は渦度の値に比べて, 計算誤差のオーダーであり, 非常に小さい. よって, 流れに乱れがなく, 安定である. レイノルズ数が  $Re = 46.5$  のときは図 26 より, 渦度の差の等値線は  $y = 10$  に関して対称性を崩し, 等値線の単位は渦度の値と同じオーダーである. 大きいので渦度の差は大きい. よって, 流れに乱れが生じ, 不安定である. 以上より, 臨界レイノルズ数は  $46.2 < Re \leq 46.5$  の範囲に存在することが分かる.

## 第7章 結論

2次元非圧縮順圧流体の一様流中に障害物である正方角柱を配置した場合の数値シミュレーションを実行した。特に、障害物の下流側の流れ場に注目した。

2次元非圧縮順圧流体系の渦度方程式を支配方程式とする。渦度方程式の移流項は Arakawa Jacobin 法を採用した。渦度方程式の空間微分に関しては中央差分で近似し、2次の Adams-Bashforth 法を用いて渦度方程式の数値積分を実行した。

$Re = 100$  の場合に予備的な実験を行なった。このときに障害物の下流側にカルマン渦列のような渦列が発生した。流れに影響を及ぼさない計算領域の広さ、渦度と流れ関数との関係式である Poisson 方程式を Gauss-Seidel 法を用いて解く際の反復回数や計算精度について検討した。空間解像度が  $0.1 \times 0.1$  のとき、計算領域が  $40 \times 20$ 、流れ関数についての Poisson 方程式の計算の反復回数は 100 回、打ち切り誤差は  $10^{-5}$  を採用することにした。数値積分の時間間隔は  $\Delta t = 0.01$  を採用したが、この値と空間解像度の値は  $2.0 \times 10^1 \leq Re \leq 2.0 \times 10^5$  の範囲のレイノルズ数に対して von Neumann の安定性の条件を満足する。

$Re = 80, 90, 100$  の場合に渦列幅と渦間隔について定量的に調べた。渦列は  $Re = 80, 90$  のときも規則的に発生した。また、 $Re = 80, 90, 100$  のときの渦列幅  $h$  と渦間隔  $l$  の比が Kármán の理論値、 $h/l \simeq 0.28$  に近く、室内実験で見られる、 $h/l$  が障害物から離れるにつれ大きくなる特徴もこの実験で確認できた。

流れが不安定になりはじめる臨界レイノルズ数についても調べた。水島、武本 (2010) によると正方角柱の場合の臨界レイノルズ数は 46.2 と求められている。本研究では時刻  $t = 100$  と  $t = 2000$  における渦度場の残差の値の大きさや対称性から臨界レイノルズ数は  $46.2 < Re \leq 46.5$  の範囲に存在することを示した。

本研究で採用した数値計算法は 2 次精度である中央差分と 2 次精度の Adams-Bashforth 法ではあるが、実験の結果は先行研究の結果と整合的であった。よって、本研究の数値シミュレーションは非常に精度の良いものであると言える。

## 付録 A 数学の知識

### 1 Lagrange 微分と Euler 微分

流体力学には2つの時間微分, Lagrange 微分と Euler 微分がある. その概念についてこの節で説明する.

流れの運動を考えると, 物理量(速度や圧力)は時間だけでなく, 空間座標によっても変化していることを考慮することが必要である. ある物理量  $A = A(x, y, z, t)$  の微小変化  $\delta A$  は, テーラー展開の高次の微小量を無視すると,

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial t} \delta t + \frac{\partial A}{\partial x} \delta x + \frac{\partial A}{\partial y} \delta y + \frac{\partial A}{\partial z} \delta z \quad (\text{A.1})$$

と書くことができる. ここで,

$$\frac{DA}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta A}{\delta t} \quad (\text{A.2})$$

と定義すると, (A.1) より,

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z} \quad (\text{A.3})$$

となる.

$$u = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta x}{\delta t}, \quad v = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta t}, \quad w = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta z}{\delta t} \quad (\text{A.4})$$

はそれぞれ, 速度  $\mathbf{u}$  の  $x, y, z$  成分である.

(A.3) をベクトル形式で表すと,

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) A \quad (\text{A.5})$$

となる. 物理量  $A$  は任意で良いので, したがって, 微分演算子として,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (\text{A.6})$$

が定義できる. ここで,  $D/Dt$  は Lagrange 微分,  $\partial/\partial t$  は Euler 微分と呼ぶ. Lagrange 微分はある流体粒子から見た時間微分, Euler 微分は固定された場所から見た時間微分である.

## 付録 B 数値計算法の知識

### 1 Euler 法

いま, 微分方程式を

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (\text{B.1})$$

と表す. 本文の 3.1 節で学んだ前進差分を使うと,  $t = t_k$  のとき, (B.1) は,

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \approx f(x_k, t_k) \quad (\text{B.2})$$

と近似でき, (B.2) は,

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, t_k)\Delta t \quad (\text{B.3})$$

と変形する. このように微分方程式 (B.1) を差分方程式 (B.3) に置き換えてから解く方法を Euler 法と呼ぶ. 初期値  $x_0, t_0$  が既知ならば  $f(x_0, t_0)$  が求まり, (B.3) に従って  $t_1$  における  $x_1$  が求まる. さらに,  $x_1, t_1$  から (B.3) に従って  $t_2$  における  $x_2$  が計算できる. 同様に, これらのことを繰り返すと, 将来の時間における  $x$  の値が計算できる.

### 2 Adams-Bashforth 法

前節の Euler 法は 1 次の公式である. より高次の公式も導きたい. 本節では 2 次の公式である, Adams-Bashforth 法を導く.



$x_{k+1}$  をテーラー展開する.  $\Delta t$  の 3 次以降を無視すると,

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &\approx x_k + \frac{dx_k}{dt} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 x_k}{dt^2} \Delta t^2 \\
 &= x_k + f(x_k, t_k) \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{df(x_k, t_k)}{dt} \Delta t^2 \\
 &\approx x_k + f(x_k, t_k) \Delta t + \frac{1}{2} \frac{f(x_k, t_k) - f(x_{k-1}, t_{k-1})}{\Delta t} \Delta t^2 \\
 &= x_k + \left( \frac{3}{2} f(x_k, t_k) - \frac{1}{2} f(x_{k-1}, t_{k-1}) \right) \Delta t \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

ただし,  $f$  の微分を後進差分により近似している. (B.4) に従って微分方程式を解く方法を 2 次の Adams-Bashforth 法と呼ぶ. この方法を用いるには,  $f(x_k, t_k)$ ,  $f(x_{k-1}, t_{k-1})$  の値が既知でなければいけない.  $t_0$  から数値計算を行う場合には Euler 法などで  $t_1$  における微分方程式の解を求めておく必要がある.

### 3 Arakawa Jacobian 法

渦度方程式の移流項を差分法を使って近似する方法に Arakawa Jacobian 法がある. ここでは, その方法を説明する.

渦度方程式 (2.2.16) を再掲する:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \zeta. \tag{2.2.16}$$

(2.2.16) の左辺の第 2 項と第 3 項は移流項であり, 右辺は粘性項である. 粘性項を無視すると, (2.2.16) は,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \tag{B.5}$$

である. (B.5) について考えたとき, 移流項はエネルギーとエンストロフィー (渦度の 2 乗平均のこと) を保存している. ここでこれらが保存していることを証明する.

図 B.1 のような領域  $S$  を考える.

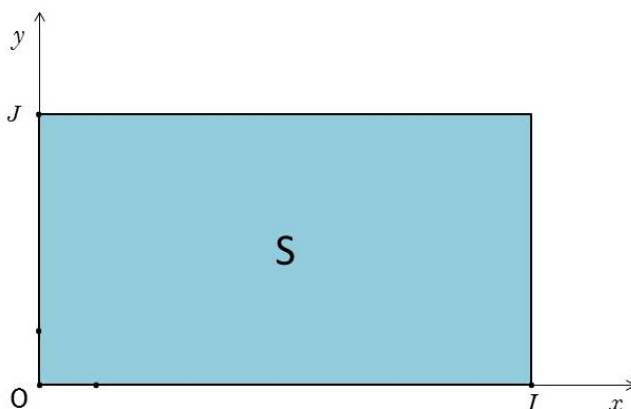


図 B.1 :  $x - y$  平面上の領域  $S$ .

ここで,  $x = 0, I$  の境界条件は周期的境界条件とする. また,  $y = 0, J$  の境界条件は  $\phi = \zeta = 0$  とする.

はじめに, (B.5) の移流項がエネルギーを保存することを証明する. エネルギーを  $E$  とおく. エネルギーは速度の 2 乗で与えられるので,

$$\begin{aligned}
 E &= \iint (u^2 + v^2) dS = \iint (u^2 + v^2) dx dy \\
 &= \iint \left[ \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \\
 &= \int \left[ \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=J} dx - \iint \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dx dy \\
 &\quad + \int \left[ \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=I} dy - \iint \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

と書くことができる.  $\phi = 0$  としているので第 1 項は 0 である. また,  $x = 0, I$  の境界条件は周期的境界条件なので第 3 項も 0 である. よって, (B.6) は,

$$\begin{aligned}
 E &= - \iint \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dx dy - \iint \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy \\
 &= - \iint \phi \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dx dy \\
 &= - \iint \phi \zeta dx dy \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

と変形できる.  $dE/dt = 0$  であれば, エネルギーは保存している. つまり, (B.7) より,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \phi \zeta dx dy = 0 \quad (\text{B.8})$$

であれば良い. (B.5) の両辺に  $\phi$  をかけて,  $S$  に関して面積積分すると,

$$\iint \phi \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy + \iint \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (\text{B.9})$$

となる. (B.9) の左辺第 1 項は,

$$\begin{aligned} \iint \phi \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy &= \iint \left( \frac{\partial \phi \zeta}{\partial t} - \zeta \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dx dy \\ &= \frac{d}{dt} \iint \phi \zeta dx dy - \iint \frac{\partial \phi}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &= \frac{d}{dt} \iint \phi \zeta dx dy \\ &\quad - \int \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=I} dy + \iint \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy \\ &\quad - \int \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=J} dx + \iint \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

となる. ただし,  $x = 0, I$  の境界条件は周期的境界条件なので, (B.10) の右辺第 2 項は 0 である. また,  $y = 0, J$  の境界条件は  $\phi = 0$  なので,  $\partial \phi / \partial t = 0$  である. よって, (B.10) の右辺第 4 項も 0 である. これらの事をふまえて (B.10) を変形すると,

$$\begin{aligned} \iint \phi \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy &= \frac{d}{dt} \iint \phi \zeta dx dy \\ &\quad + \iint \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy + \iint \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy \\ &= \frac{d}{dt} \iint \phi \zeta dx dy + \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \frac{d}{dt} \iint \phi \zeta dx dy + \frac{1}{2} \iint \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &= \frac{d}{dt} \iint \phi \zeta dx dy + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint (u^2 + v^2) dx dy \\ &= -\frac{dE}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

となる. 次に, (B.9) の左辺第 2 項は,

$$\begin{aligned}
 & \int \int \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx dy \\
 &= \int \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \phi^2 \right) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \phi^2 \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] dx dy \\
 &= \int \int \frac{\partial}{\partial y} \left[ \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \phi^2 \right) \right] dx dy - \int \int \frac{\partial}{\partial x} \left[ \zeta \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \phi^2 \right) \right] dx dy \\
 &= \int \left[ \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \phi^2 \right) \right]_{y=0}^{y=J} dx - \int \left[ \zeta \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \phi^2 \right) \right]_{x=0}^{x=I} dy \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$

となる. ただし, (B.10) の変形と同様に境界条件を考慮すると, (B.12) の右辺第 1 項と第 2 項は 0 である. よって,

$$\int \int \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (\text{B.13})$$

である. (B.11) と (B.13) より, (B.9) は,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} + 0 &= 0, \\
 \frac{dE}{dt} &= 0 \quad (\text{B.14})
 \end{aligned}$$

となり, (B.8) が示された. よって, 移流項はエネルギーを保存することが証明された.

次に, (B.5) の移流項がエンストロフィーを保存することを証明する. エンストロフィーを  $Q$  とおく. エンストロフィーは渦度の 2 乗で与えられるので,

$$Q = \int \int \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) dS = \int \int \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) dx dy \quad (\text{B.15})$$

と書くことができる.  $dQ/dt = 0$  であれば, エンストロフィーは保存している. つまり, (A.15) より,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int \int \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) dx dy = 0 \quad (\text{B.16})$$

であれば良い. (B.5) の両辺に  $\zeta$  をかけて,  $S$  に関して面積積分すると,

$$\int \int \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy + \int \int \zeta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (\text{B.17})$$

となる. (B.17) の左辺第 1 項は,

$$\begin{aligned}
 \int \int \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy &= \int \int \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) dx dy \\
 &= \frac{d}{dt} \int \int \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) dx dy \quad (\text{B.18})
 \end{aligned}$$

となる. 次に, (B.17) の左辺第 2 項は,

$$\begin{aligned}
 & \int \int \zeta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx dy \\
 &= \int \int \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \right] dx dy \\
 &= \int \int \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dx dy \\
 &= \int \left[ \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{y=0}^{y=J} dx - \int \left[ \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{x=0}^{x=I} dy \tag{B.19}
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 今考えている境界条件を考慮すると, (B.19) の右辺第 1 項と第 2 項は 0 であるので,

$$\int \int \zeta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx dy = 0 \tag{B.20}$$

となる. (B.18) と (B.20) より, (B.17) は,

$$\frac{d}{dt} \int \int \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) dx dy = \frac{dQ}{dt} = 0 \tag{B.21}$$

となり, (B.16) が示された. よって, 移流項はエンストロフィーを保存することが証明された.

以上より, 渦度方程式の移流項はエネルギーとエンストロフィーを保存していることが分かったので, これらのことを満たした上で移流項を差分する必要がある. 本節の冒頭で述べたように, これを実現したのが, Arakawa Jacobian 法である. この方法は, (2.2.16) の移流項を

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \tag{B.22}
 \end{aligned}$$

と変形する. そして, (B.22) の右辺の項で,

$$\begin{aligned}
 J_{i,j}^L &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\
 J_{i,j}^C &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), \\
 J_{i,j}^R &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

とにおいて, それぞれ, 中央差分で近似したものを  $\tilde{J}_{i,j}^L, \tilde{J}_{i,j}^C, \tilde{J}_{i,j}^R$  とすると,

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{i,j}^L &= \frac{1}{4\Delta x\Delta y} [(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}) - (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1})(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j})], \\ \tilde{J}_{i,j}^C &= \frac{1}{4\Delta x\Delta y} [\phi_{i+1,j}(\zeta_{i+1,j+1} - \zeta_{i+1,j-1}) - \phi_{i-1,j}(\zeta_{i-1,j+1} - \zeta_{i-1,j-1}) \\ &\quad - \phi_{i,j+1}(\zeta_{i+1,j+1} - \zeta_{i-1,j+1}) + \phi_{i,j-1}(\zeta_{i+1,j-1} - \zeta_{i-1,j-1})], \\ \tilde{J}_{i,j}^R &= \frac{1}{4\Delta x\Delta y} [\zeta_{i,j+1}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1}) - \zeta_{i,j-1}(\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j-1}) \\ &\quad - \zeta_{i+1,j}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1}) + \zeta_{i-1,j}(\phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1})]\end{aligned}$$

となる. そして, (B.22) より,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \approx \frac{1}{3} \left( \tilde{J}_{i,j}^L + \tilde{J}_{i,j}^C + \tilde{J}_{i,j}^R \right) \quad (\text{B.23})$$

と近似する. 以上の方法が Arakawa Jacobian 法である.

この方法が本当にエネルギーとエンストロフィーを保存しているか確かめてみる. まず, エネルギーの保存について確認する.

(B.9) の左辺第 2 項は,

$$\int \int \phi \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \right) dx dy \simeq \sum_{i,j} \phi_{i,j} \frac{1}{3} \left( \tilde{J}_{i,j}^L + \tilde{J}_{i,j}^C + \tilde{J}_{i,j}^R \right) \quad (\text{B.24})$$

と変形できる.  $\phi_{i,j}\tilde{J}_{i,j}^L, \phi_{i,j}\tilde{J}_{i,j}^C, \phi_{i,j}\tilde{J}_{i,j}^R$  に  $4\Delta x\Delta y$  をかけると, それぞれ,

$$\begin{aligned}(4\Delta x\Delta y)\phi_{i,j}\tilde{J}_{i,j}^L &= \phi_{i,j}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}) \\ &\quad - \phi_{i,j}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1})(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}) \\ &= \phi_{i,j}\phi_{i+1,j}\zeta_{i,j+1} - \phi_{i,j}\phi_{i+1,j}\zeta_{i,j-1} \\ &\quad - \phi_{i,j}\phi_{i-1,j}\zeta_{i,j+1} + \phi_{i,j}\phi_{i-1,j}\zeta_{i,j-1} \\ &\quad - \phi_{i,j}\phi_{i,j+1}\zeta_{i+1,j} + \phi_{i,j}\phi_{i,j+1}\zeta_{i-1,j} \\ &\quad + \phi_{i,j}\phi_{i,j-1}\zeta_{i+1,j} - \phi_{i,j}\phi_{i,j-1}\zeta_{i-1,j},\end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned}(4\Delta x\Delta y)\phi_{i,j}\tilde{J}_{i,j}^C &= \phi_{i,j}\phi_{i+1,j}(\zeta_{i+1,j+1} - \zeta_{i+1,j-1}) - \phi_{i,j}\phi_{i-1,j}(\zeta_{i-1,j+1} - \zeta_{i-1,j-1}) \\ &\quad - \phi_{i,j}\phi_{i,j+1}(\zeta_{i+1,j+1} - \zeta_{i-1,j+1}) + \phi_{i,j}\phi_{i,j-1}(\zeta_{i+1,j-1} - \zeta_{i-1,j-1}) \\ &= \phi_{i,j}\phi_{i+1,j}\zeta_{i+1,j+1} - \phi_{i,j}\phi_{i+1,j}\zeta_{i+1,j-1} \\ &\quad - \phi_{i,j}\phi_{i-1,j}\zeta_{i-1,j+1} + \phi_{i,j}\phi_{i-1,j}\zeta_{i-1,j-1} \\ &\quad - \phi_{i,j}\phi_{i,j+1}\zeta_{i+1,j+1} + \phi_{i,j}\phi_{i,j+1}\zeta_{i-1,j+1} \\ &\quad + \phi_{i,j}\phi_{i,j-1}\zeta_{i+1,j-1} - \phi_{i,j}\phi_{i,j-1}\zeta_{i-1,j-1},\end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned}
 (4\Delta x \Delta y) \phi_{i,j} \tilde{J}_{i,j}^R &= \phi_{i,j} \zeta_{i,j+1} (\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1}) - \phi_{i,j} \zeta_{i,j-1} (\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j-1}) \\
 &\quad - \phi_{i,j} \zeta_{i+1,j} (\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1}) + \phi_{i,j} \zeta_{i-1,j} (\phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1}) \\
 &= \phi_{i,j} \zeta_{i,j+1} \phi_{i+1,j+1} - \phi_{i,j} \zeta_{i,j+1} \phi_{i-1,j+1} \\
 &\quad - \phi_{i,j} \zeta_{i,j-1} \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i,j} \zeta_{i,j-1} \phi_{i-1,j-1} \\
 &\quad - \phi_{i,j} \zeta_{i+1,j} \phi_{i+1,j+1} + \phi_{i,j} \zeta_{i+1,j} \phi_{i+1,j-1} \\
 &\quad + \phi_{i,j} \zeta_{i-1,j} \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i,j} \zeta_{i-1,j} \phi_{i-1,j-1}
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

である。ここで、説明を分かりやすくするため図 B.2 のような 9 つの格子点を持つ領域  $T$  を考える。ただし、紙面から見て、領域  $T$  の左右は周期的境界、上下は格子点が存在しないものとする。

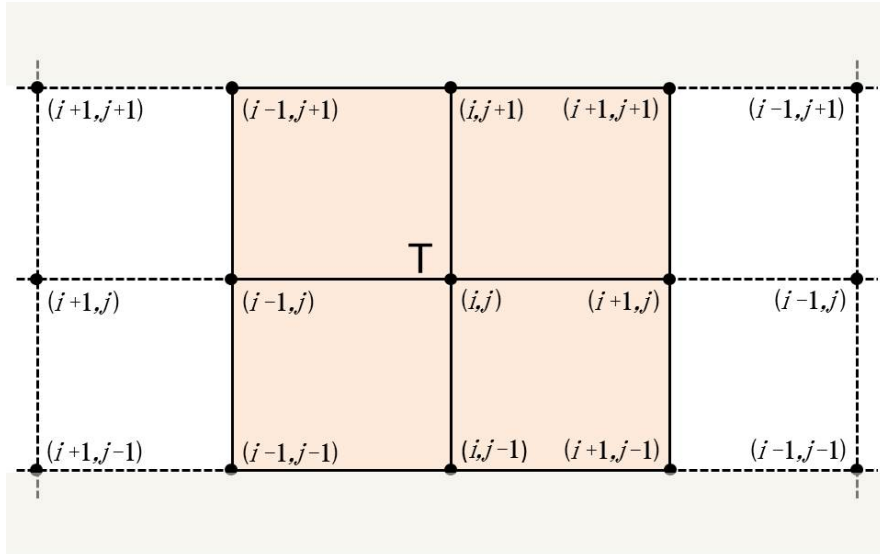


図 B.2 : 9 つの格子点を持つ領域  $T$ .

仮に領域  $T$  の中央の格子点を  $(i, j) = (5, 5)$  とすると、(B.25) より、

$$\begin{aligned}
 \phi_{5,5} \tilde{J}_{5,5}^L &= \phi_{5,5} \phi_{6,5} \zeta_{5,6} - \phi_{5,5} \phi_{6,5} \zeta_{5,4} - \phi_{5,5} \phi_{4,5} \zeta_{5,6} + \phi_{5,5} \phi_{4,5} \zeta_{5,4} \\
 &\quad - \phi_{5,5} \phi_{5,6} \zeta_{6,5} + \phi_{5,5} \phi_{5,6} \zeta_{4,5} + \phi_{5,5} \phi_{5,4} \zeta_{6,5} - \phi_{5,5} \phi_{5,4} \zeta_{4,5}
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

となる. (B.26) より, 格子点 (6, 5) では,

$$\begin{aligned} \phi_{6,5} \tilde{J}_{6,5}^C &= \phi_{6,5} \phi_{4,5} \zeta_{4,6} - \phi_{6,5} \phi_{4,5} \zeta_{4,4} - \phi_{6,5} \phi_{5,5} \zeta_{5,6} + \phi_{6,5} \phi_{5,5} \zeta_{5,4} \\ &\quad - \phi_{6,5} \phi_{6,6} \zeta_{4,6} + \phi_{6,5} \phi_{6,6} \zeta_{5,6} + \phi_{6,5} \phi_{6,4} \zeta_{4,4} - \phi_{6,5} \phi_{6,4} \zeta_{5,4}, \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

格子点 (4, 5) では,

$$\begin{aligned} \phi_{4,5} \tilde{J}_{4,5}^C &= \phi_{4,5} \phi_{5,5} \zeta_{5,6} - \phi_{4,5} \phi_{5,5} \zeta_{5,4} - \phi_{4,5} \phi_{6,5} \zeta_{6,6} + \phi_{5,5} \phi_{6,5} \zeta_{6,4} \\ &\quad - \phi_{4,5} \phi_{4,6} \zeta_{5,6} + \phi_{4,5} \phi_{4,6} \zeta_{6,6} + \phi_{4,5} \phi_{4,4} \zeta_{5,4} - \phi_{4,5} \phi_{4,4} \zeta_{6,4}, \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

格子点 (5, 6) では,

$$\phi_{5,6} \tilde{J}_{5,6}^C = -\phi_{5,6} \phi_{6,6} \zeta_{6,5} + \phi_{5,6} \phi_{4,6} \zeta_{4,5} + \phi_{5,6} \phi_{5,5} \zeta_{6,5} - \phi_{5,6} \phi_{5,5} \zeta_{4,5}, \quad (\text{B.31})$$

格子点 (5, 4) では,

$$\phi_{5,4} \tilde{J}_{5,4}^C = \phi_{5,4} \phi_{6,4} \zeta_{6,5} - \phi_{5,4} \phi_{4,4} \zeta_{4,5} - \phi_{5,4} \phi_{5,5} \zeta_{6,5} + \phi_{5,4} \phi_{5,5} \zeta_{4,5} \quad (\text{B.32})$$

である. (B.28) の右辺第 1, 2 項は (B.29) の右辺第 3, 4 項と, (B.28) の右辺第 3, 4 項は (B.30) の右辺第 1, 2 項と, (B.28) の右辺第 5, 6 項は (B.31) の右辺第 3, 4 項と, (B.28) の右辺第 7, 8 項は (B.32) の右辺第 3, 4 項と相殺する. ここには掲載しないが, 他の格子点でも同様のことが成り立つ. よって, 領域  $T$  の (B.25) と (B.26) の和は 0 になる.

次に (B.27) より, 格子点 (5, 5) では,

$$\begin{aligned} \phi_{5,5} \tilde{J}_{5,5}^R &= \phi_{5,5} \zeta_{5,6} \phi_{6,6} - \phi_{5,5} \zeta_{5,6} \phi_{4,6} - \phi_{5,5} \zeta_{5,4} \phi_{6,4} + \phi_{5,5} \zeta_{5,4} \phi_{4,4} \\ &\quad - \phi_{5,5} \zeta_{6,5} \phi_{6,6} + \phi_{5,5} \zeta_{6,5} \phi_{6,4} + \phi_{5,5} \zeta_{4,5} \phi_{4,6} - \phi_{5,5} \zeta_{4,5} \phi_{4,4} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

となる. 格子点 (6, 6) では,

$$\phi_{6,6} \tilde{J}_{6,6}^R = -\phi_{6,6} \zeta_{6,5} \phi_{4,5} + \phi_{6,6} \zeta_{6,5} \phi_{5,5} + \phi_{6,6} \zeta_{4,6} \phi_{4,5} - \phi_{6,6} \zeta_{5,6} \phi_{5,5}, \quad (\text{B.34})$$

格子点 (4, 6) では,

$$\phi_{4,6} \tilde{J}_{4,6}^R = -\phi_{4,6} \zeta_{4,5} \phi_{5,5} + \phi_{4,6} \zeta_{4,5} \phi_{6,5} + \phi_{4,6} \zeta_{5,6} \phi_{5,5} - \phi_{4,6} \zeta_{6,6} \phi_{6,5}, \quad (\text{B.35})$$

格子点 (6, 4) では,

$$\phi_{6,4} \tilde{J}_{6,4}^R = \phi_{6,4} \zeta_{6,5} \phi_{4,5} - \phi_{6,4} \zeta_{6,5} \phi_{5,5} - \phi_{6,4} \zeta_{4,4} \phi_{4,5} + \phi_{6,4} \zeta_{5,4} \phi_{5,5}, \quad (\text{B.36})$$

格子点 (4, 4) では,

$$\phi_{4,4} \tilde{J}_{4,4}^R = \phi_{4,4} \zeta_{4,5} \phi_{5,5} - \phi_{4,4} \zeta_{4,5} \phi_{6,5} - \phi_{4,4} \zeta_{5,4} \phi_{5,5} + \phi_{4,4} \zeta_{6,4} \phi_{6,5} \quad (\text{B.37})$$



である. (B.33) の右辺第 1, 5 項は (B.34) の右辺第 2, 4 項と, (B.33) の右辺第 2, 7 項は (B.35) の右辺第 1, 3 項と, (B.33) の右辺第 3, 6 項は (B.36) の右辺第 2, 4 項と, (B.33) の右辺第 4, 8 項は (B.37) の右辺第 1, 3 項と相殺する. ここには掲載しないが, 他の格子点でも同様のことが成り立つ. よって, 領域  $T$  の (B.27) は 0 になる. 以上より, (B.24) は,

$$\iint \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (\text{B.38})$$

となり, (B.23) のように近似するとエネルギーが確かに保存されている. また,  $\tilde{J}_{i,j}^L$  と  $\tilde{J}_{i,j}^C$  の和でもエネルギーをしていること,  $\tilde{J}_{i,j}^R$  のみでもエネルギーを保存していることが分かった.

次に, エンストロフィーの保存について確認する.

(B.17) の左辺第 2 項は,

$$\iint \zeta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx dy \simeq \sum_{i,j} \zeta_{i,j} \frac{1}{3} \left( \tilde{J}_{i,j}^L + \tilde{J}_{i,j}^C + \tilde{J}_{i,j}^R \right) \quad (\text{B.39})$$

と変形できる. そして, エネルギーの保存の確認で行ったのと同様に計算を行うと, (B.39) は,

$$\iint \zeta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (\text{B.40})$$

となる. よって, (B.23) のように近似するとエンストロフィーが確かに保存されている. ただし, エネルギーの場合と違って,  $\tilde{J}_{i,j}^L$  と  $\tilde{J}_{i,j}^R$  の和でもエンストロフィーを保存している. また,  $\tilde{J}_{i,j}^C$  のみでもエンストロフィーを保存している.

## 4 Jacobi 法と Gauss-Seidel 法

差分化された Poisson 方程式をコンピューター上で解く場合, いくつかの方法がある. ここでは, Jacobi 法と Gauss-Seidel 法について説明する.

本文, (2.3.19) に対して中央差分を行うと,

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = \zeta_{i,j} \quad (\text{B.41})$$

となる.  $\phi_{i,j}$  について解くと,

$$\phi_{i,j} = \frac{(\Delta x)^2(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}) + (\Delta y)^2(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j}) - (\Delta x)^2(\Delta y)^2\zeta_{i,j}}{2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]} \quad (\text{B.42})$$

(B.42) の  $\phi_{i,j}$  は, その隣にある  $\phi_{i+1,j}, \phi_{i-1,j}, \phi_{i,j+1}, \phi_{i,j-1}$  と  $\zeta_{i,j}$  によって表現されている. (B.42) の右辺を  $f(\phi, \zeta)$  とすると, Jacobi 法は,

$$\phi_{i,j}^{\tau+1} = f(\phi_{i-1,j}^{\tau}, \phi_{i+1,j}^{\tau}, \phi_{i,j-1}^{\tau}, \phi_{i,j+1}^{\tau}, \zeta_{i,j}) \quad (\text{B.43})$$

に従って計算する. ここで  $\phi_{i,j}^{\tau}$  と  $\phi_{i,j}^{\tau+1}$  はそれぞれ,  $\tau$  回目,  $\tau+1$  回目の計算で得られた値である.  $\phi_{i,j}^{\tau}$  と  $\phi_{i,j}^{\tau+1}$  の差,

$$\Delta\phi_{i,j} = |\phi_{i,j}^{\tau+1} - \phi_{i,j}^{\tau}| \quad (\text{B.44})$$

があらかじめ決めた許容誤差以内に収まるまで計算を繰り返す. また, 収束しない場合もあるので, あらかじめ決めた回数で計算を打ち切る必要もある. 一方, Gauss-Seidel 法では, 右辺の関数の計算に最新の  $\phi_{i,j}$  の値を使う. すなわち,

$$\phi_{i,j}^{\tau+1} = f(\phi_{i-1,j}^{\tau+1}, \phi_{i+1,j}^{\tau}, \phi_{i,j-1}^{\tau+1}, \phi_{i,j+1}^{\tau}, \zeta_{i,j}) \quad (\text{B.45})$$

に従って計算する. Gauss-Seidel 法では, すでに計算された  $\phi_{i-1,j}^{\tau+1}$  と  $\phi_{i,j-1}^{\tau+1}$  を使用しており, Jacobi 法より解の収束が速いことが予想できる. よって, 本研究では, Gauss-Seidel 法を採用した.

## 付 録 C 気象の知識

### 1 気象衛星画像

気象庁が提供している気象衛星画像について説明する。

気象衛星画像は気象庁が運用している静止気象衛星、ひまわりから送られてくるものである。この衛星は、赤道の約 35,800 km 上空で地球と同じ角速度で地球の周りを回っており、いつも同じ範囲を宇宙から観測している。観測の要素としては、雲や地表面の温度、大気中上層の水蒸気の多寡、土壌粒子による大気の混濁などがあげられる。これにより、低気圧や台風、黄砂や火山灰などの状態が広範囲にわたって分かる。また、ひまわりはある時間毎に連続して観測しているので、観測データを連結し、動画にすれば、観測要素の変化や動向なども解析できる。ただし、地球は球なので高緯度帯や東西方向の端の領域では、大気や地表面を斜めから観測していることになる。よって、赤道付近に比べると水平分解能、観測精度は良くないことに注意する必要がある。ひまわりが観測する画像として、可視画像、赤外画像、水蒸気画像がある。ここで、各画像の知識を簡単に解説する。また、それらの知識を用いて、2015 年 1 月 9 日 10 時 (日本時間) に発生したカルマン渦状の雲列を構成している雲形の判別を行う。

#### 可視画像

可視画像は太陽光 (主に可視光帯域) の反射光を観測したものである。よって、太陽光の当たらない夜間は観測できない。解像度は赤道付近で約 500 m である。画像の明るさに注目すると、厚い雲や太陽光をよく反射する地表面域 (雪氷域や海水域、積雪域など) では明るく、白く写る。太陽光をそれほど反射しない薄い雲は暗灰色に写り、雲のない領域や太陽高度の低い領域は暗く、黒く写る。画像のきめに注目すると、積乱雲などの対流雲は雲頂部に対応した凸凹が見られることが多い。一方、霧や層雲などの雲頂がほぼ水平に広がった層状の雲、雪氷域などは滑らか、一様に写ることが多い。2015 年 12 月 30 日 15 時 (日本時間) の可視画像を例にこれ

らのことを解析する.

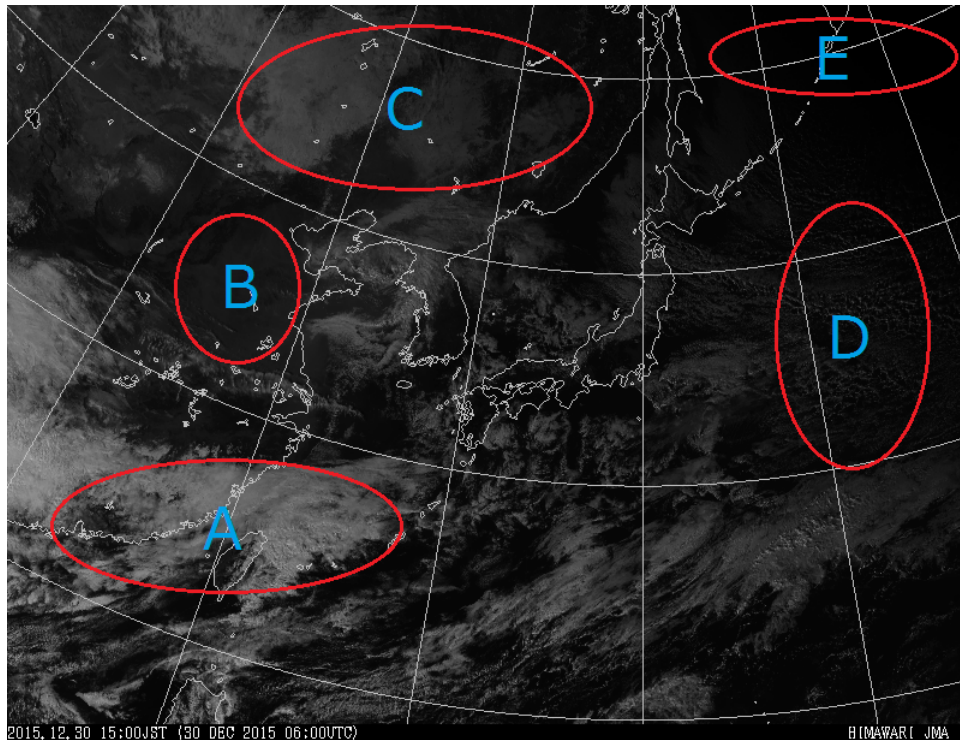


図 C.1 : 2015 年 12 月 30 日 15 時 (日本時間) の可視画像 (気象庁, 2015) を編集した.

#### A : 厚い雲域

白く、明るく写っているので厚い雲域であることが分かる。また、きめが凸凹している領域も見られるので発達した対流雲も存在することが分かる。

**B : 薄い雲域**

暗灰色であるので薄い雲であることが分かる。また、きめが滑らかであるので層状雲が存在している。

**C : 雪氷域**

白く、明るく写っている。また、ここには掲載しないが、可視画像を時系列の動画にしても C の白い領域の分布はほとんど変化しない。緯度が高いこと、冬季であることも考慮すると、C は雪氷域であると判断できる。太陽高度の高い西側の領域ほど相対的に明るく写っていることも分かる。

**D : 夕方**

時刻は日本時間 15 時であるが、12 月であるので、日本の東は太陽高度が低いと考えられる。よって、D 付近は夕方である。やや明るく写っている雲域も太陽高度が高ければ、より明るく写っているはずである。

**E : 夜**

宇宙に到達する可視光がほとんどなく、この領域は完全に黒く写っている。緯度、季節、時刻を考えると、太陽がほぼ沈んだ夜に近い状況であると分かる。

**赤外画像**

赤外画像は大気や地表面、雲の雲頂部が宇宙へ放射している赤外線を観測したものである。そのため、太陽光の有無に関わらず、24 時間観測できる。解像度は赤道付近で約 2 km である。ここでは解説しないが、赤外画像は赤外線を観測していると同時に、雲や地表面の温度を観測している。温度が低いほど白く、明るく写り、温度が高いほど黒く、暗く写るように設定されている。つまり、温度の低い雲頂高度の高い雲や地上気温の低い地表面ほど白く写る。雲頂高度が低くなるにつれ、暗く写り、雲が存在しない領域は黒く写る。発達した対流雲郡が独立して存在している場合は、団塊状に明るく写る。積乱雲が主体の雲域であると考えることができる。

可視画像と同様に 2015 年 12 月 30 日 15 時 (日本時間) の赤外面像を例にこれらのことを解析する。

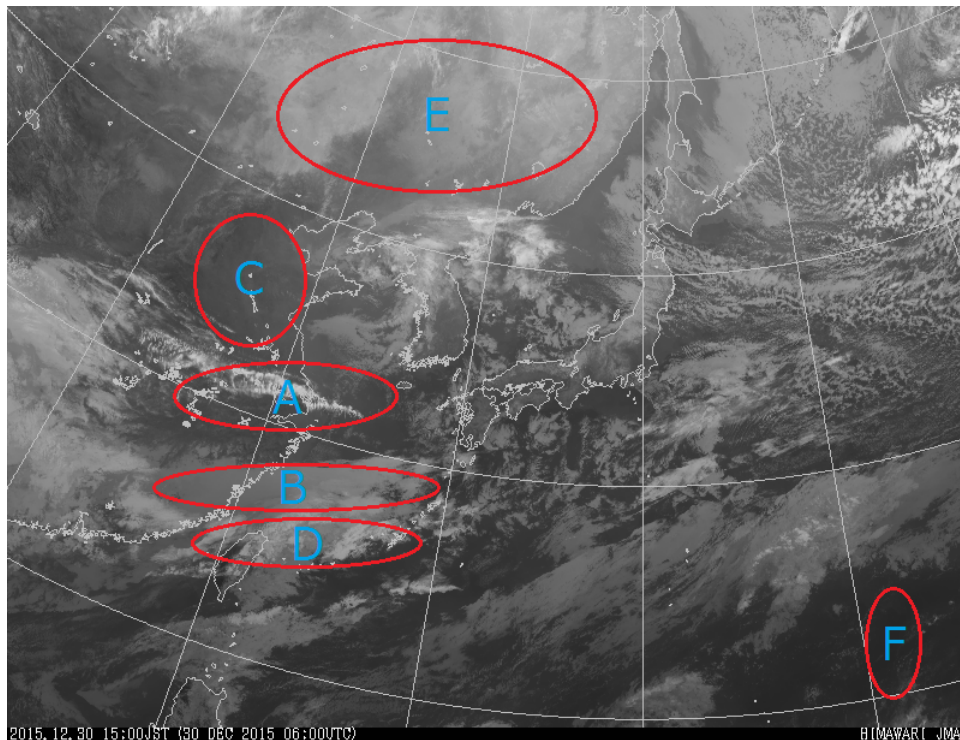


図 C.2 : 2015 年 12 月 30 日 15 時 (日本時間) の赤外面像 (気象庁, 2015) を編集した。

#### A : 上層の雲域

白く、明るく写っているので雲頂高度は高いことが分かる。図 B.1 で A と同じ領域を確認するとやや暗く写っている雲がある。よって、上層の薄い雲であると判断できる。おそらく巻雲であると考えられる。

**B : 中層の雲域**

雲頂が中層にあると灰色に写る. 図 C.1 から厚い雲域であると分かっているが, 雲底が下層に到達してるのかどうかまでは判断できない.

**C : 下層の雲域**

暗灰色に写っているので雲頂高度は低い, 下層の雲域であると分かる. 図 C.1 ではきめが滑らかなので層雲が主体の雲域であると判断できる. もし図 C.1 できめが凸凹しているなら層積雲や積雲であると考えられる.

**D : 雲頂が上層の雲域**

明るく写っている雲は雲頂が上層にあり, 図 C.1 より, 厚い雲であるので発達した対流雲であると判断できる. ただし, 発達した対流雲は D の領域のなかでも特に明るい部分に存在する.

**E : 雪氷域**

白く, 明るく写っている. 可視画像と同様に時系列の動画にしても E の白い領域の分布はほとんど変化しない. また, 緯度が高いこと, 冬季であることも考慮すると, E は雪氷域であると判断できる. 実際に, E のモンゴル付近の地表面は冬季に  $-30^{\circ}\text{C}$  以下になる.

**F : 海面**

暗くほとんど何も写っていないので, 被写体は表面温度は高い. 図 C.1 より, F には雲がほとんど存在しないので, 海面の温度を観測していると判断できる.

## 水蒸気画像

水蒸気画像は赤外画像の一種であり、大気に含まれる水蒸気による吸収が強い波長帯の赤外線を観測したものである。大気中上層に存在する絶対温度の低い水蒸気や雲からの弱い赤外線が放射されている領域を明域（白色）として、絶対温度の高いところからの赤外線が放射されている領域を暗域（黒色）として写るように処理している。つまり、大気中上層が湿潤であるほど白く、大気中上層が乾燥しているほど黒く写る。大気下層は水蒸気が多寡に関わらず絶対温度が高いため、暗く写る。また、水蒸気画像を時系列に動画にすることにより大気中上層の水蒸気の流れが分かる。2016年1月6日（日本時間）の水蒸気画像を例にこれらのことを確認する。

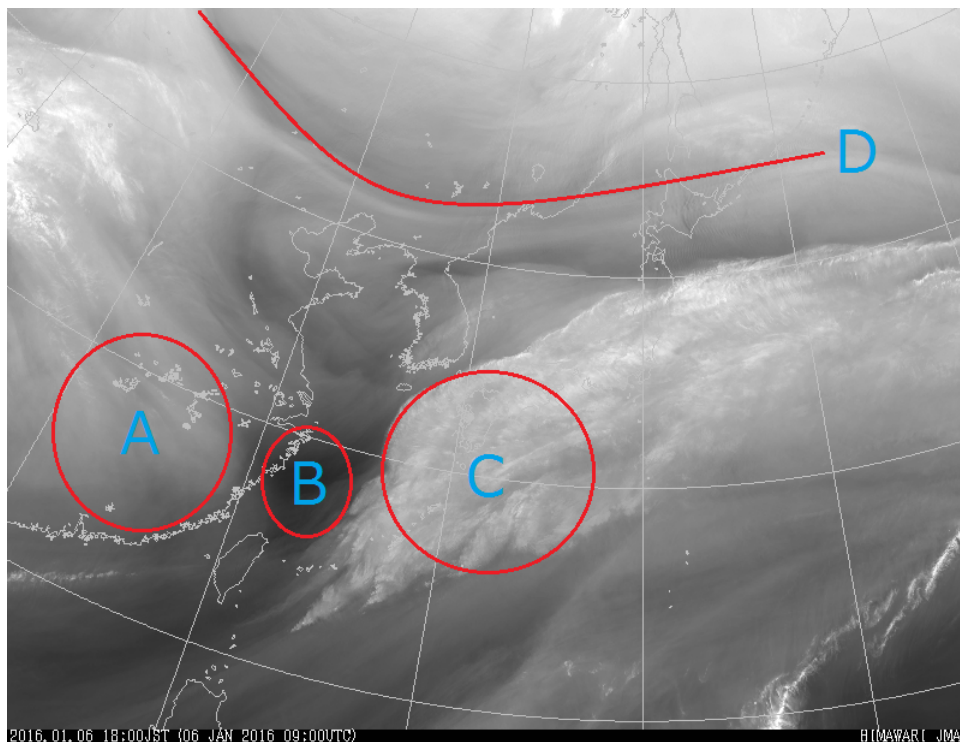


図 C.3 : 2016年1月6日18時（日本時間）の水蒸気画像（気象庁，2016）を編集した。



**A : 明域**

白く明るいので, 大気中上層は湿潤である.

**B : 暗域**

暗くなっているので, 大気中上層は乾燥している.

**C : 上層に存在する雲**

上層に厚い雲が存在すると, 雲頂部からの絶対温度のかなり低い赤外線が観測されるので, 特に明るくなる.

**D : ジェット気流**

高緯度側の暗域と低緯度側の明域の境界をバウンダリーと呼ぶ. バウンダリー付近にはジェット気流が走行している. 図 C.3 のバウンダリーは境界があまり明瞭でないが, 長距離にわたって蛇行しているのでジェット気流であると考えられる.

**カルマン渦状の雲列を構成している雲形の判別**

2015年1月9日10時(日本時間)の気象衛星画像である可視画像を再掲, 赤外画像と水蒸気画像を掲載する.

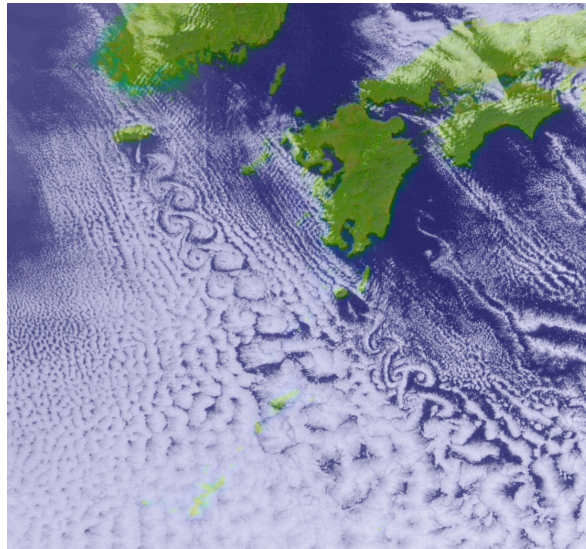


図 C.4 : 2015 年 1 月 9 日 10 時 (日本時間) の可視画像. (高知大学気象情報頁, 2016)

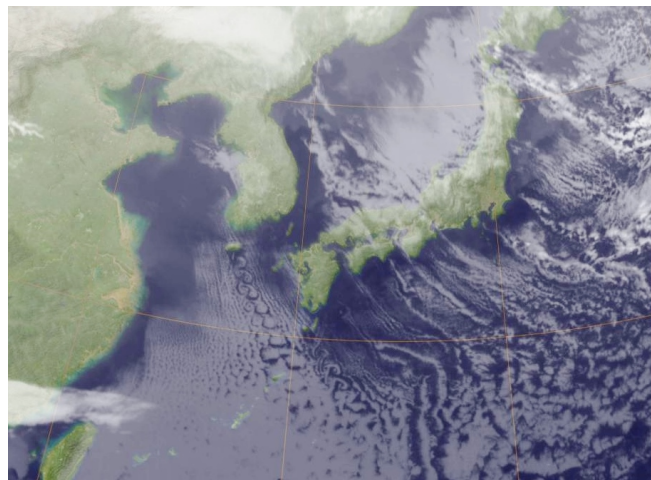


図 C.5 : 2015 年 1 月 9 日 10 時 (日本時間) の赤外画像. (高知大学気象情報頁, 2016)

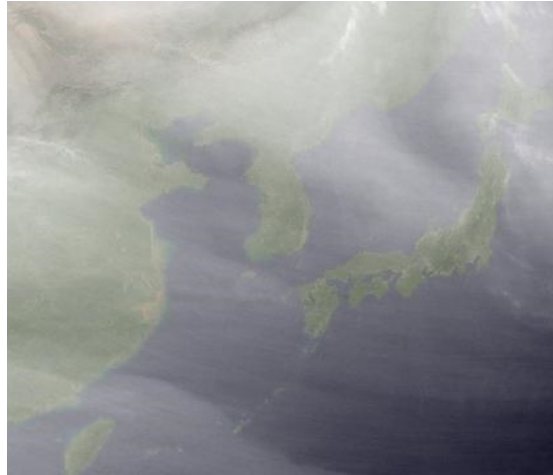


図 C.6 : 2015 年 1 月 9 日 10 時 (日本時間) の水蒸気画像. (高知大学  
気象情報頁, 2016)

カルマン渦状の雲列を構成している雲は, 図 C.4 の可視画像では, 白く, 明るく写っているので, 厚い雲であることが分かる. また, 紙面からは分かりにくいですが, きめが凸凹している. よって, この雲は厚い対流雲であると考えられる. 図 C.5 の赤外画像では, 暗白色に写っているので, 雲頂は下層にあると考えられる. 図 C.6 の水蒸気画像では, 濟州島付近は灰白色に写っている所以, 大気中上層がやや湿潤である. しかし, 濟州島より以南は灰色である所以, 大気中上層は雲が生成されるほど湿潤ではないと思われる. 以上の分析より, カルマン渦状の雲列を構成している雲は, 下層に存在する対流雲の積雲, または, 積雲に付随した層積雲であると判別できる.

## 2 地上天気図

気象庁が作成している地上天気図, アジア地上解析図 (ASAS) は, 赤道～北緯 60 度, 東経 100 ～ 180 度における天気図である. 日本時間の 3, 9, 15, 21 時に観測したデータをもとに, 気象庁が解析し, 1 日 4 回発表している. ここでは, 2015 年 1 月 9 日 9 時 (日本時間) の地上天気図を例にとりて, 地上天気図に関する知識を簡単に解説する.

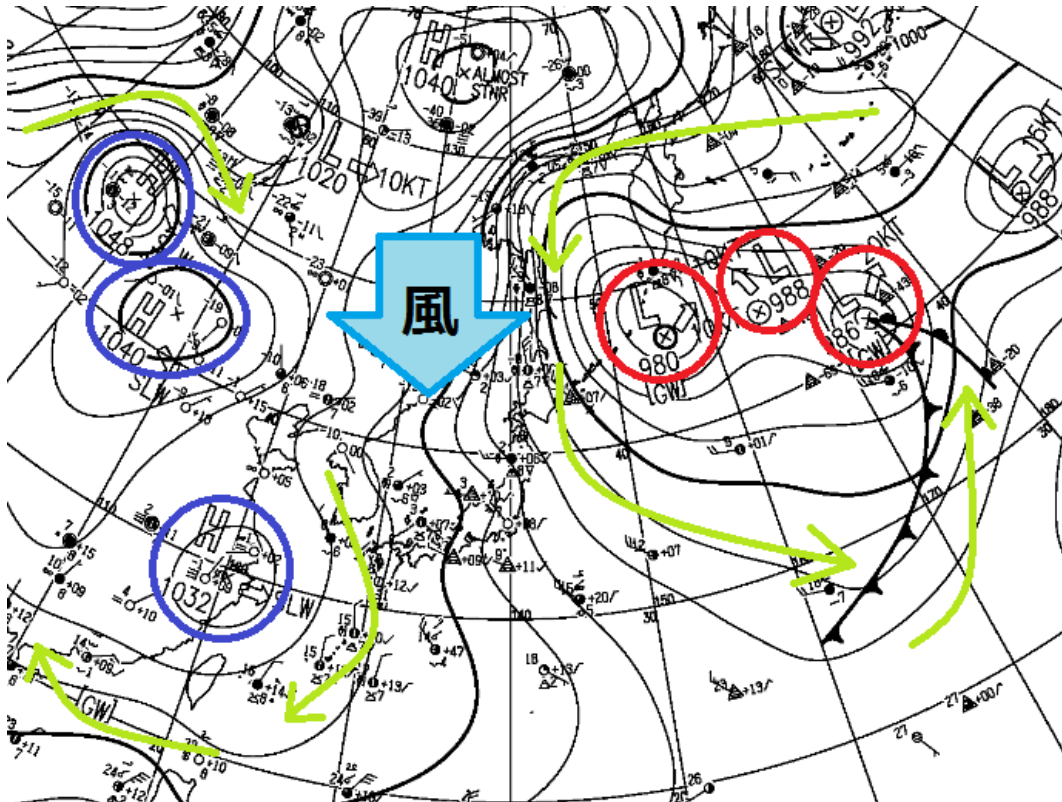


図 C.7 : 2015 年 1 月 9 日 9 時 (日本時間) の地上天気図 (日本気象予報士会, 2016) を編集した。

## 等圧線

図 C.7 の地上天気図において、等値線として描かれているのは等圧線である。等圧線の間隔は 4 hPa であり、20 hPa ごとに太線で描かれている。等圧線の間隔が狭いほど気圧差が大きい、つまり、気圧傾度力が大きいので地上の風速は大きくなる。また、地衡風の関係より、本来、風向は等圧線と平行であるが、地上では、風に摩擦がかかるのでコリオリ力が弱まり、風向が低圧側に傾く。低圧側には、海上で約 15 ~ 20 度、陸上で約 25 ~ 30 度ほど傾いている。ただし、これらのことは天気

図から読み取れる大まかな解析であり、他の要素により、実際は異なることもある。

## 高気圧

周りより気圧の高い領域を高圧部と呼び、天気図上で閉じた等圧線で描かれている高圧部が高気圧である。図 C.7 にもあるように「H」と記号で示されている。高気圧付近は空気が上空から下降している場であるので、空気は断熱圧縮により、気温が上がる。よって、空気の飽和水蒸気圧が上がり、相対湿度が低くなるため、雲が発生しにくく、晴天になりやすい。なお、北半球では、高気圧の周りは時計回りに風が吹いている。図 C.7 の青線で囲っている高気圧のうち、華北に位置している 2 つの高気圧はシベリア高気圧の一部である。地表の放射冷却により、乾燥した寒気が堆積しており、この寒気が季節風とともに日本付近に流入している。

## 低気圧

周りより気圧の低い領域を低圧部と呼び、天気図上で閉じた等圧線で描かれている低圧部が低気圧である。図 C.7 にもあるように「L」と記号で示されている。低気圧付近は空気が地表から上空に上昇しているため、空気は膨張し、温度が下がる。よって、空気の飽和水蒸気圧が下がり、相対湿度が高くなるため、雲が発生しやすい。なお、北半球では、低気圧の周りは反時計回りに風が吹いている。図 C.7 の赤線で囲っている低気圧は温帯低気圧である。一般に、温帯低気圧の前面（東側）で高緯度側の寒気の上に低緯度側の暖気が流れ込み、暖気が北上と上昇をしている。逆に、温帯低気圧の後面（西側）で低緯度側の暖気が高緯度側の寒気が流れ込み、寒気が南下と下降をしている。図 C.7 では、温帯低気圧により、日本列島に寒気が北から流入している。

## 3 エマグラム

エマグラムは大気の鉛直状態を解析する場合に用いられるものである。ここでは、2015 年 1 月 9 日 9 時（日本時間）の済州島のエマグラムを例にとって、エマグラムに関する知識を簡単に解説する。

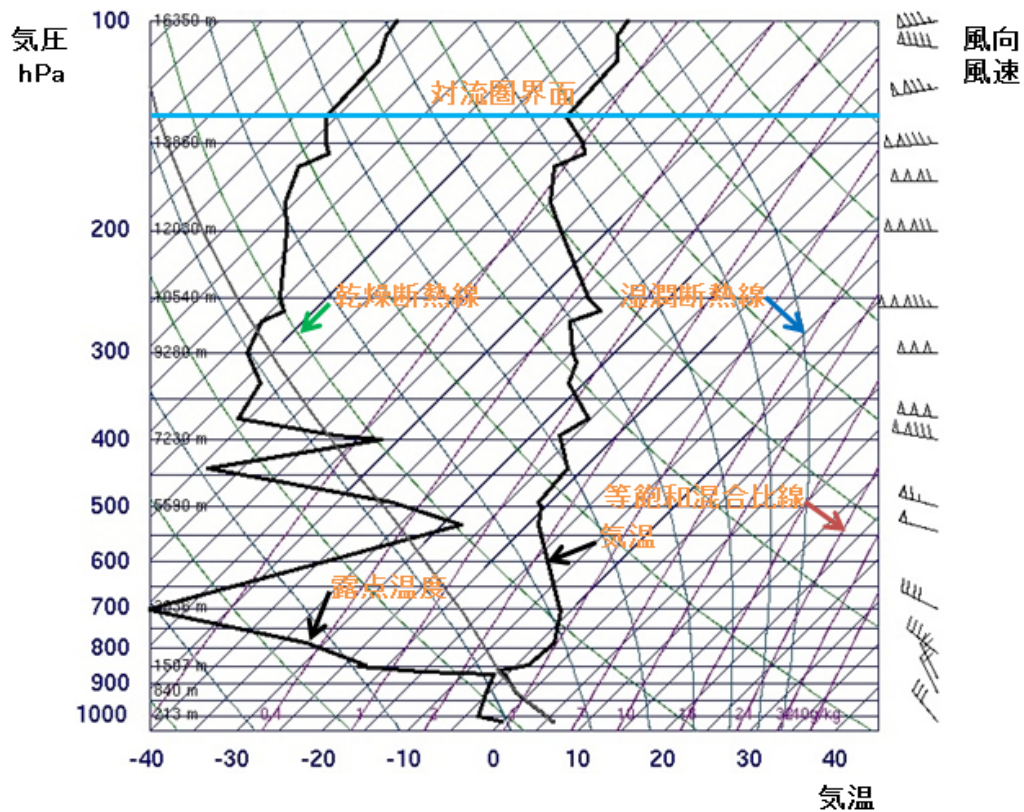


図 C.8 : 2015 年 1 月 9 日 9 時 (日本時間) の濟州島のエマグラム (University of Wyoming, 2016) を編集した。

図の縦軸は気圧 (hPa), 横軸は気温 ( $^{\circ}\text{C}$ ) であり, 右側の矢羽は風向・風速 (短棒 : 5 kt, 長棒 : 10 kt, 旗 : 50 kt) を示している. 2 本ある黒太線の温度の高い線は気温, 温度の低い線は露点温度 (空気が飽和するときの温度) の状態曲線である. 両者の差が  $3^{\circ}\text{C}$  未満の気層は湿潤であり, 大気には雲が存在することが多い. 逆に, 気温と露点温度の差が大きいと空気が乾燥しており, 雲が発生しにくい. また, 気温の状態曲線から対流圏界面を判断することができる. 対流圏界面の定義は, 気温減率が  $2^{\circ}\text{C}/\text{km}$  となり, その面より上空に 2 km にわたり, 気温減率が  $2^{\circ}\text{C}/\text{km}$  以下となっている層の下面を対流圏界面とする. ただし, 500 hPa より下層は除外

とする。これらより、図 C.8 では、地表から 850 hPa 付近までは気層が湿潤で雲が存在している可能性が高く、850 hPa より上層では雲が存在していない可能性が高い。また、対流圏界面は水色の線の高度に存在すると考えられる。図の緑の曲線は乾燥断熱線であり、気温減率は  $10\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{km}$  である。未飽和の空気の上昇下降はこの線に沿って移動する。紺色の曲線は湿潤断熱線であり、気温減率は  $5\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{km}$  である。飽和空気の上昇下降はこの線に沿って移動する。また、ある高度の空気の気温減率の傾きが乾燥断熱線の傾きより大きいならその空気は絶対安定であり、乾燥断熱線の傾きより小さく、湿潤断熱線の傾きより大きいなら条件付き不安定、湿潤断熱線の傾きより小さいなら絶対不安定である。図 C.8 では、地表から 850 hPa 付近までは条件付き不安定、850 hPa より上層では概ね絶対安定であることが分かる。図の赤線は等飽和混合比線である。単位は  $\text{g}/\text{kg}$  であり、乾燥空気 1 kg に含まれる水蒸気の質量比を表している。この線を用いると、ある高度、ある飽和混合比の空気の露点温度が分かる。

## 4 カルマン渦状の雲列の発生の背景

気象衛星センター (2003) によるとカルマン渦状の雲列は風向が一定した比較的強い下層風が吹いて、強い逆転層の下にある層雲や層積雲によって覆われた広い海域が存在し、逆転層より上空に山岳が突き出している場合によく発生する。実際に、2015 年 1 月 9 日 9 時 (日本時間) の地上天気図 (図 C.7) を見ると、日本列島付近は西高東低の冬型の気圧配置であり、東シナ海から九州にかけて等圧線が南北に並んでいる。また、その間隔は小さいので、気圧傾度が大きく、北西からの強い季節風が吹いていると考えられる。(济州島や奄美大島の天気記号の風向風速からもこのことが確認される。) また、同時刻の济州島のエマグラム (図 C.8) を見ると、850 hPa (1507 m) 付近に逆転層が存在することが分かる。さらに、济州島の中央には韓国最高峰の漢拏 (ハルラ) 山があり、標高は 1950 m であり、逆転層より 400 m 程高い。よって、この日はカルマン渦状の雲列が発生しやすい絶好の日であったと言える。

## 謝辞

本研究を行うにあたり、岩山隆寛准教授に大変きめ細やかなご指導を頂きました。林祥介教授には研究に対する心構えなどを教えて頂きました。高橋芳幸准教授には基礎理論読書会などで多くのご指導頂きました。また、大西将徳博士や院生、B4の方々には日々の生活でお世話になりました。お陰様で楽しみながら研究することができました。この場を借りて皆様に感謝致します。

なお、本論文を作成するにあたり、卒業論文、カルマン渦の数値シミュレーション(中道, 2007)を参考にした他、数値計算の結果を図に描写するために、地球流体電脳ライブラリ, dcl-6.0.4 (<http://www.gfd-dennou.org/library/dcl/>) を使用させて頂きました。中道啓輔氏, dcl の維持開発に携わっている方々に感謝致します。



## 参考文献

- Hirota, I, and K. Miyakoda, 1964: Numerical Solution of Kármán Vortex Street behind a Circular Cylinder. *J. Meteor. Soc. Japan*, Vol. 43, 30-41
- 伊藤純至, 新野宏, 2015: 濟州島後流に生じるカルマン渦列状雲の数値実験. 日本気象学会, 日本気象学会 2015 年度春季大会, 講演予稿集, 311
- Kármán, T. von, 1911, 1912: Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. Göttingen Nachrichten, *Math. Phys. Kl.* 12, 509-17, 13, 547-56
- 気象衛星センター, 2003: 気象衛星画像－今月のトピック－スーチェジュ島の風下に現れたカルマン渦. 気象庁,  
<http://www.jma-net.go.jp/sat/data/web/jirei/sat200303.pdf>
- 気象庁, 2015, 2016: 気象観測. 気象庁, <http://www.jma.go.jp/jp/gms/>
- 高知大学気象情報頁, 2016: 高知大学気象情報頁保存書庫. 高知大学,  
<http://weather.is.kochi-u.ac.jp/>
- 水島二郎, 武本幸生, 2010: 角柱（円柱）後方カルマン渦列の発生源. JAXA, 宇宙航空研究開発機構特別資料: 「境界層遷移の解明と制御」研究会講演論文集（第 43 回・第 44 回）, 27-30
- 日本気象予報士会, 2016: 気象庁天気図画像ファイル提供サービス. 日本気象予報士会, <http://www.yoho.jp/chart/>
- 酒井幸市, 2012: OpenGL + GLSL による「流れ」のシミュレーション. 工学社
- 武本幸生, 大橋俊介, 赤嶺博史, 水島二郎, 2012: カルマン渦列の発生の物理と数理. 同志社大学, 数理解析研究所講究録, 第 1776 巻, 28-41
- 種子田定俊, 1988: 画像から学ぶ流体力学. 朝倉書店, 98-99

University of Wyoming, College of Engineering, Department of Atmospheric Science, 2016: Upper Air Soundings. University of Wyoming, <http://weather.uwyo.edu/upperair/sounding.html>