

Alfvén 波の伝播特性に関する考察

香川 大輔

神戸大学 理学部 惑星学科
流体地球物理学教育研究分野

2019/02/08

要旨

Hannes Alfvén (1942) は流体力学と電磁気学を結び付け磁気流体力学 (MHD) の基礎を築いた。そして、プラズマにおいて波のような磁場の変動が存在することを提唱した。この波が今や Alfvén 波と呼ばれるものである。本研究では、磁気流体が一流体である場合と二流体である場合に分け、それぞれにおける Alfvén 波の伝播特性に関する考察を行なった。

目次

第1章 序論	4
第2章 プラズマの基本的な性質	5
2.1 プラズマの定義	5
2.2 プラズマの主な特性量	5
2.2.1 サイクロトロン運動の周期とラーマー半径	5
2.2.2 プラズマ周波数	6
2.2.3 デバイ長	8
第3章 磁気流体力学の基礎方程式系	10
3.1 磁気流体近似と理想磁気流体	11
3.2 基礎方程式系	11
3.2.1 Maxwell の方程式	11
3.2.2 Ohm の法則	11
3.2.3 連続の式	12
3.2.4 運動方程式	12
3.2.5 磁気流体の基礎方程式系 (まとめ)	13

3.3	誘導方程式	13
3.4	磁場の凍結	14
3.5	ドリフト	15
3.5.1	$E \times B$ ドリフト	15
3.5.2	反磁性ドリフト	16
3.5.3	分極ドリフト	16
第4章	一流体モデルにおける Alfvén 波	18
4.1	一流体モデル	18
4.2	基礎方程式系の線形化	19
4.3	簡単化した Alfvén 波の波動方程式と伝播メカニズム	20
4.3.1	波動方程式と Alfvén 速度	20
4.3.2	伝播メカニズム	21
4.4	Alfvén 波のより一般的な考察	22
4.5	v_1 が B_0 と k に垂直である場合	23
4.5.1	分散関係と位相速度, 群速度	24
4.6	v_1 が B_0 と k が作る平面上にある場合	24
4.6.1	分散関係	24
4.6.2	位相速度	26
4.6.3	群速度	28
4.7	位相速度および群速度に関する考察	29

4.7.1	位相速度	29
4.7.2	群速度	33
第 5 章	二流体モデルにおける Alfvén 波	35
5.1	二流体モデル	35
5.2	$v_{Ti}^2 \ll v_A^2 \ll v_{Te}^2$, および $v_A^2 \ll v_{Ti}^2, v_{Te}^2$ の場合	40
5.3	$v_A^2 \gg v_{Te}^2, v_{Ti}^2$ の場合	41
第 6 章	まとめ	42
付 録 A	本文中の各式の導出	44
A.1	(4.25) の導出	44
A.2	(4.11) の導出	45
A.3	(4.17) の導出	45

第1章 序論

プラズマは気体分子が電離した状態で荷電粒子により構成される。例えば、宇宙空間では質量の 99% 以上を占めており、また地球でも電離層と呼ばれる高度 100 km 付近において存在することが知られている。また、宇宙空間や地球磁気圏には磁場が存在することも知られている。プラズマ粒子は磁場中を移動すると磁場と作用し電流が生じる。そのような作用により様々な波が生じ、自然界で起こるプラズマ現象の原動力となっている。

プラズマが存在する領域で起こる諸現象にはプラズマの構造や運動が強く影響している。プラズマに関する現象を考察する場合、個々のプラズマ粒子の運動やエネルギーに着目して議論することもあるが、時間や空間のスケールが大きい問題を取り扱うならばプラズマ集団を流体とみなして議論することが一般的である。具体的には、プラズマ現象のうち、イオンサイクロトロン運動の周期よりもゆっくりとした時間スケールを持ち、またイオンサイクロトロン運動の半径よりも大きい空間スケールを持つものを対象とする^{*1}。このとき、プラズマ集団の流体を磁気流体という。また磁気流体の力学を磁気流体力学 (magneto-hydrodynamics : MHD) という。

本研究では、プラズマ集団を磁気流体とみなすことができるような時間および空間スケールを伴う現象を取り扱う。そして、磁気流体中を伝播する波の一つである Alfvén 波に関して、その特徴をもって様々なモードの波に分類し、それぞれの伝播特性について考察する。

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 章ではプラズマの基本的な性質と主な特性量を示す。第 3 章では、用いる近似に関する解説と、その近似に基づく磁気流体の基礎方程式系の導出を行なう。第 4 章では Alfvén 波に関してシアモードと圧縮モードの考察を行ない、第 5 章では Kinetic Alfvén 波と Inertial Alfvén 波の考察を行なう。第 6 章はまとめである。

^{*1}プラズマの諸特性量に関しては 2.2 節参照。

第2章 プラズマの基本的な性質

2.1 プラズマの定義

プラズマという学名は 1920 年頃, Irving Langmuir により使われ始め, 彼はプラズマの基本的な性質を明らかにした. プラズマは,

- 正と負の荷電粒子群を同時に含む.
- 巨視的な電気的中性が保たれている.
- 荷電粒子群は不規則な熱運動を行なっている.
- プラズマ周波数は衝突周波数よりも高い.
- デバイ長より十分大きい媒質空間である.

の特徴で定義される, 電離した気体分子による媒質である.

2.2 プラズマの主な特性量

2.2.1 サイクロトロン運動の周期とラーマー半径

一様な磁場 B 中に B と垂直な方向に初速度 v で入射された荷電粒子の運動を考える. 個々の荷電粒子が互いに影響を及ぼすことなく運動するならば, そのとき一つの荷電粒子には Lorentz 力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \quad (2.1)$$

が働く。ここで q は電荷量である。すると、荷電粒子の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.2)$$

となる。ここで m は荷電粒子の質量である。(2.2) は荷電粒子の円運動を表す運動方程式である。この円運動のことをサイクロトロン運動という。 r, ω_c をそれぞれサイクロトロン運動の半径、角周波数とすると $v = r\omega_c$ であり、また \mathbf{v} と \mathbf{B} は垂直なので、(2.2) は

$$mr\omega_c^2 = qr\omega B \quad (2.3)$$

となる。

(2.3) より、

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad (2.4)$$

となる。したがって、サイクロトロン運動の周期 T は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (2.5)$$

である。

また、(2.3) より、

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \quad (2.6)$$

となる。したがって、サイクロトロン運動の半径は

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (2.7)$$

であり、この半径のことをラーマー半径と呼ぶ。

2.2.2 プラズマ周波数

今、イオンは静止し一様な密度 n_0 で分布しており、電子のみが振動する準中性プラズマを考える。電子の密度と速度をそれぞれ n_e, \mathbf{v}_e とすると、電子の連続の式は

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (2.8)$$

である。また、電子の電荷量と質量をそれぞれ e, m_e 、電場を \mathbf{E} とすると、電子の運動方程式は

$$m_e n_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -en_e \mathbf{E} \quad (2.9)$$

である。ポアソンの方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e}{\epsilon_0}(n_0 - n_e) \quad (2.10)$$

である。ここで ϵ_0 は真空中の誘電率である。

ここで、物理量を時間と空間に一様な定常項 (添字 0 を付けて表す) と時間と空間に依存する振動項 (添字 1 を付けて表す) に分ける。つまり、

$$n_e = n_0 + n_{e1} \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{e1} \quad (2.11b)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \quad (2.11c)$$

とする。電子の速度と電場は電子の振動により生じるため、定常項はゼロとしている。これらを用いて、連続の式、運動方程式、ポアソンの方程式を線形化して整理すると、それぞれ

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{e1} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_1 \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} n_{e1} \quad (2.14)$$

となる。

まず (4.31) の時間微分をとると

$$\frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} + n_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} = 0 \quad (2.15)$$

となる。そして、この式の左辺第二項を (2.13) を用いて置き換えると、

$$\frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} - \frac{n_0 e}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad (2.16)$$

となる。最後にこの式の左辺第二項を (2.14) を用いて置き換えると、

$$\frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} + \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} n_{e1} = 0 \quad (2.17)$$

となる。この式は電子の密度の変化に対する振動方程式であり、周波数を ω_{pe} とすると、

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (2.18)$$

が得られる。この周波数 ω_{pe} を、電子のプラズマ周波数という。

同様に、イオンのプラズマ周波数 ω_{pi} は

$$\omega_{pi} = \left(\frac{n_0 e^2}{m_i \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (2.19)$$

である。ここで m_i はイオンの質量である。

2.2.3 デバイ長

今、準中性のプラズマ中に静止したイオンが置かれているとする。このとき、イオンの存在のために周囲の電子が移動し電子密度が変化する。

ある領域において、電子密度が変化すると電気的中性が成り立たなくなる。その結果、電位 ϕ が生じ電位はプラズマに対してポアソンの方程式

$$\nabla^2 \phi = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \quad (2.20)$$

を満たす。ここで、 e は電子の電荷量、 ϵ_0 は真空中の誘電率、 n_i と n_e はそれぞれイオンと電子の数密度である。なお今、電子密度は歪められるが、イオン密度は準中性条件 $n_i = n_0$ に従うと仮定する。電子が熱力学的平衡にあるとすると、電子の分布はボルツマン分布に従うので、電子の温度を T_e 、ボルツマン定数を k_B とすると

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \quad (2.21)$$

である。 $|e\phi| \ll k_B T_e$ に対して、

$$n_e = n_0 \left(1 + \frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \quad (2.22)$$

と近似できるので、これと (2.20) より

$$\nabla^2 \phi = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T_e} \phi \quad (2.23)$$

となる。この式の左辺は、次元に関して、静電位をある特徴的な長さ (λ_{De}) の二乗で割ったもの (ϕ/λ_{De}) に等しい。そして上式の両辺を比較することで

$$\lambda_{De} = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (2.24)$$

が導入できる。この特徴的な長さはデバイ長といい、準中性プラズマ中でイオンの存在のために電子密度が変化する距離である。

また同様に, イオンのデバイ長 λ_{Di} は

$$\lambda_{Di} = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_i}{n_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (2.25)$$

である. ここで T_i はイオンの温度である.

第3章 磁気流体力学の基礎方程式系

本研究では、流体を電気伝導性が非常に良いものとして理想磁気流体と考えることにする。そこで本章では、理想磁気流体を考えることにより得られる近似の解説、そしてその近似に基づく磁気流体の基礎方程式系の導出と磁場の凍結、各種ドリフトに関する解説を行なう。

初めに、本論文の以降で用いる物理量を以下のように定義しておく：

- E : 電場
- D : 電束密度
- Φ : 磁束
- B : 磁束密度
- J : 電流密度
- n : 電荷の数密度
- m : 電荷の質量
- q : 電荷量
- μ : 透磁率
- ϵ : 誘電率
- σ : 電気伝導率
- v : 速度
- ρ_σ : 電荷密度
- p : 圧力
- k : 波数ベクトル
- ω : 周波数
- a : 音速

3.1 磁気流体近似と理想磁気流体

プラズマの集団を電磁気力が働く流体 (磁気流体) とみなす近似を磁気流体近似という. この近似は, イオンのサイクロトロン運動の周期および半径より大きい時間, 空間スケールを伴う運動に対して適用することができ, プラズマの巨視的な動きを調べる際に有効である. Alfvén 波は前述の適用条件を満たすような時間および空間スケールを伴うため, 本研究では磁気流体近似を用いる.

また, プラズマの電気抵抗が小さく電気伝導率を無限大とした磁気流体を理想磁気流体という. 以降の議論では理想磁気流体を考え $\sigma \rightarrow \infty$ が成り立つとする. このとき変位電流は電流に比べて非常に小さく ($\mathbf{J} \gg \partial \mathbf{D} / \partial t$) 無視でき, また, 本章で述べる流体に対する磁場の凍結を取り扱うことができる.

3.2 基礎方程式系

3.2.1 Maxwell の方程式

電磁場に関する Maxwell の方程式は,

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.3)$$

である. ここで, (3.2) の右辺において, 磁気流体近似により変位電流を無視した.

3.2.2 Ohm の法則

今, 流体に対して静止した系の量に ' を付け, 空間に対して静止した系の量には ' を付けずそのまま表記することにする. 流体に対して静止した系で考えると, Ohm の法則は

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}' \quad (3.4)$$

と表される. 空間に対して静止した系で考えると, 速度 \mathbf{v} で運動している流体に対して $\mathbf{J}' = \mathbf{J} - \rho_\sigma \mathbf{v}$, $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ であり, また, 今流体は準中性条件により

電氣的に中性であるとみなせるため $\rho_\sigma = 0$ とできる. したがって, Ohm の法則 (3.4) は

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.5)$$

となる.

3.2.3 連続の式

流体の質量保存を表す連続の式は,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (3.6)$$

である.

3.2.4 運動方程式

運動方程式は, 電場を考慮した単位体積あたりにはたらく Lorentz 力 $nq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ を考慮して,

$$mn \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right\} = -\nabla p + nq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.7)$$

と書かれる. ここでは, 力としてプラズマによる圧力勾配力と Lorentz 力を考えている.

上記の運動方程式 (3.7) に関して考察を行う. $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ を書き換えると,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= -\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= -\frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \right\} \\ &= -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる. ここで, (3.2) とベクトル解析の公式

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (3.9)$$

を用いた. (3.8) の右辺について, $B^2/2\mu$ は磁気圧であるので, 第一項は磁場による圧力を表す. また第二項は磁気張力を表す.

最後に, (3.8) より運動方程式 (3.7) を書き換えると,

$$mn \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu} \right) + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + nq \mathbf{E} \quad (3.10)$$

となる. したがって, プラズマの加速度運動はプラズマと磁場の圧力勾配力および磁気張力, 電場により引き起こされることがわかる.

3.2.5 磁気流体の基礎方程式系 (まとめ)

本節で導出した磁気流体の基礎方程式系をここにまとめる:

$$\text{Maxwell の方程式: } \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.11a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (3.11b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.11c)$$

$$\text{Ohm の法則: } \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.11d)$$

$$\text{連続の式: } \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (3.11e)$$

$$\text{運動方程式: } mn \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p + nq (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.11f)$$

以上が, 磁気流体の運動と場の時間発展を記述する方程式系である.

3.3 誘導方程式

Maxwell の方程式 (3.11a) と (3.11b), そして Ohm の法則 (3.11d) から誘導方程式を導くことができる. まず, (3.11b) と (3.11d) から \mathbf{J} を消去して整理すると,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.12)$$

となる. これと (3.11a) より,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} \\
&= -\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \\
&= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma\mu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{B} \\
&= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

となり, 誘導方程式が導かれた. ここで, ベクトル解析の公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \tag{3.14}$$

と (3.3) を用いた. $1/\sigma\mu$ を磁気粘性率 (磁気拡散率) と呼ぶ.

今, 理想磁気流体, つまり $\sigma \rightarrow \infty$ を考えるので, 誘導方程式 (3.13) を

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{3.15}$$

と書くことができる.

3.4 磁場の凍結

前節で導出した誘導方程式 (3.13) の右辺第二項は磁場の拡散を表す. しかし理想磁気流体を考慮した誘導方程式 (3.15) 中には磁場の拡散を表す項が無い. 今, 磁気流体とともに動く任意の面 S を考えると, その面を貫く磁束は

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.16}$$

であり, その時間変化は,

$$\begin{aligned}
\frac{D\Phi}{Dt} &= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{B} \cdot \frac{\partial(d\mathbf{S})}{\partial t} \\
&= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \\
&= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} \\
&= \int_S \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right\} \cdot d\mathbf{S} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

となる. ここで, C は S の境界に沿った閉曲線であり, dl は C の微小線要素である. また式変形の際に, ベクトル解析の公式

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} \quad (3.18)$$

とストークスの定理, 誘導方程式 (3.15) を用いた. したがって, S を貫く磁束は保存され, 磁気流体とともに動くことになる. このことを「磁場の凍結」と呼び, 理想 MHD 近似が成り立つ場合, プラズマと磁力線が一体となって動くことを意味している. $\sigma \rightarrow \infty$ と仮定し「磁場の凍結」を考えることは巨視的なプラズマの構造や運動を議論する際によく用いられ, 本研究においてもこれを用いる.

3.5 ドリフト

磁場が存在するプラズマにおいて, プラズマ粒子の運動は磁場の影響を受ける. プラズマ粒子のサイクロトロン運動の中心が磁場を横切って ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp$) する運動をドリフトと呼ぶ. 以下では, 本研究において後に用いる各種ドリフトについて解説する.

3.5.1 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト

運動方程式 (3.11f) において, 単一粒子の運動は時間変化の項 $d\mathbf{v}/dt$ を無視できるほどゆっくりとした時間スケールを伴うとし, また圧力勾配力はゼロとすると,

$$0 = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) \quad (3.19)$$

となる. これより

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B} \quad (3.20)$$

と書ける. この式の両辺に \mathbf{B} との外積をとると,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= -(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ &= B^2 \mathbf{v}_\perp - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_\perp) \mathbf{B} \\ &= B^2 \mathbf{v}_\perp \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる. ここでベクトル解析の公式

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} \quad (3.22)$$

を用いた. (3.21) より $E \times B$ ドリフト

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.23)$$

を得る. このドリフトは電荷や質量, 速度に依らないため, 電子とイオンは同じ方向に同じ速度でドリフトする. ただし回転の向きは反対である.

3.5.2 反磁性ドリフト

運動方程式 (3.11f) において, 先程と同様に $d\mathbf{v}/dt$ を無視できるとし, 今度は電場がゼロとすると,

$$0 = -\nabla p + nq\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B} \quad (3.24)$$

である. これより

$$\frac{\nabla p}{nq} = \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B} \quad (3.25)$$

となる. この式の両辺に \mathbf{B} との内積をとり, $E \times B$ ドリフトを導出したときと同様に \mathbf{v}_\perp を求めると,

$$\mathbf{v}_\perp = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{nqB^2} \quad (3.26)$$

を得る. これが反磁性ドリフトである.

3.5.3 分極ドリフト

単一粒子に対して, 運動方程式 (3.11f) の圧力勾配力をゼロとすると,

$$m \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) \quad (3.27)$$

と書ける. 今, 電場は時間変化すると考え, 速度を $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_{E \times B} + \mathbf{v}_p$ と分解する. ここで $\mathbf{v}_{E \times B}$ は $E \times B$ ドリフトであり, \mathbf{v}_p は $\mathbf{v}_{E \times B}$ に比べて小さいものとする. すると,

$$m \frac{d(\mathbf{v}_{E \times B} + \mathbf{v}_p)}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}_{E \times B} \times \mathbf{B} + q\mathbf{v}_p \times \mathbf{B} \quad (3.28)$$

となる. この式の右辺第二項について,

$$q\mathbf{v}_{E \times B} \times \mathbf{B} = q \frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{B^2} = -q\mathbf{E} \quad (3.29)$$

であり, これと $dv_p/dt \ll dv_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}/dt$ を仮定することにより, (3.28) は,

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}}{dt} = q\mathbf{v}_p \times \mathbf{B} \quad (3.30)$$

となる. この式の両辺に \mathbf{B} との外積をとり整理すると,

$$\mathbf{v}_p = -\frac{m}{qB^2} \frac{d\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (3.31)$$

となり, $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ を書き換えて計算すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p &= -\frac{m}{qB^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \right) \times \mathbf{B} \\ &= \frac{m}{qB^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \end{aligned} \quad (3.32)$$

を得る. これが分極ドリフトである.

第4章 一流体モデルにおける Alfvén 波

磁気流体中を伝播する Alfvén 波は Hannes Alfvén (1942) によって発見された波であり、波長のスケールが長く周波数が低いことを特徴とする。自然界では、オーロラや磁気嵐に伴って起こる磁気擾乱の伝播、太陽コロナにおける磁場変動などとして観測される。

本章では、一流体モデルの下での Alfvén 波を考える。

4.1 一流体モデル

電子とイオンに対する連続の式および運動方程式は

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{v}_s) = 0 \quad (4.1)$$

と

$$m_s n_s \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s \right\} = -\nabla p_s + n_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) \quad (4.2)$$

である。ここで、添字 s は電子またはイオンを表し、電子の場合は e 、イオンの場合は i を添字として書くことにする。

まず磁気流体では、電子とイオンの質量比 $m_e/m_i \ll 1$ とし、準中性条件 $n = n_e = n_i$ が成り立つとする。そして、電子とイオンを合わせた流体の密度を ρ とし、 $\rho = m_e n_e + m_i n_i = n(m_e + m_i) \approx n m_i$ とする。すると、電子とイオンそれぞれの連続の式の和をとると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.3)$$

を得る。ここで流体の速度 \mathbf{v} は流体の重心の速度とし、 $\rho \mathbf{v} = \sum_s n_s m_s \mathbf{v}_s \approx n m_i \mathbf{v}_i$ である。また $p = p_i + p_e$ 、 $\mathbf{J} = \sum_s q_s n_s \mathbf{v}_s$ とすると、電子とイオンそれぞれの運動

方程式の和は

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.4)$$

となる. ここで, E の項は電子とイオンの和をとることで打ち消しあう. こうして一流体の連続の式および運動方程式が得られた.

4.2 基礎方程式系の線形化

流体は時間と空間に一様で静止した状態 (物理量に添字 0 を付けて表す) にあったとする. 今, その状態に時間と空間に依存した微小変動 (物理量に添字 1 を付けて表す) が加えられたとして,

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(r, t) \quad (4.5a)$$

$$p = p_0 + p_1(r, t) \quad (4.5b)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(r, t) \quad (4.5c)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(r, t) \quad (4.5d)$$

とおく. これらを用いて, 基礎方程式 (3.11c), (4.3), (4.4), (3.15) を線形化すると,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad (4.7)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + a^2 \nabla \rho_1 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (4.9)$$

となる^{*1}. ここで, a は音速である^{*2}.

以降は上記の線形化した基礎方程式系を用いて Alfvén 波に関する議論を行なう.

^{*1}運動方程式 (3.11f) の線形化は, Lorentz 力 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ を $-\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$ と書き換えたのちに行なった.

^{*2}状態変化が断熱的であるとすると, $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ を用いて

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \nabla \rho = a^2 \nabla \rho_1$$

である. これを (3.11f) から (4.8) を導く際に用いた.

4.3 簡単化した Alfvén 波の波動方程式と伝播メカニズム

4.3.1 波動方程式と Alfvén 速度

ここでは、非圧縮な運動を伴う波の性質について考察する。そのとき連続の式 (4.7) は、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0 \quad (4.10)$$

となる。

まず運動方程式 (4.8) を変形し、

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} = -\nabla \left\{ p_1 + \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_1) \right\} + \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{B}_1 \quad (4.11)$$

と書き換える^{*3}。そして (4.11) に ∇ をスカラー的にかけると、

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1) = -\nabla^2 \left\{ p_1 + \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_1) \right\} + \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla) (\nabla \cdot \boldsymbol{B}_1) \quad (4.12)$$

となる。ここで (4.6) と (4.10) を用いると、(4.12) は

$$\nabla^2 \left\{ p_1 + \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_1) \right\} = 0 \quad (4.13)$$

となる。これを積分し、任意関数をゼロとすると

$$p_1 + \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_1) = 0 \quad (4.14)$$

とすることができる。(4.14) を考慮すると (4.11) は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu \rho_0} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{B}_1 \quad (4.15)$$

となる。

一方、(4.9) は、ベクトル解析の公式を用い (4.10) を考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t} &= \boldsymbol{v}_1 (\nabla \cdot \boldsymbol{B}_0) - \boldsymbol{B}_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{B}_0 \\ &= (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{v}_1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

^{*3}(4.11) の詳しい導出は付録 A にて行う。

となる.

最後に, (4.15) と (4.16) から v_1 を消去すれば,

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu\rho_0} \frac{\partial^2 B_1}{\partial z^2} \quad (4.17)$$

が得られる^{*4}. また, (4.15) と (4.16) から B_1 を消去すれば,

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu\rho_0} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \quad (4.18)$$

が得られる. (4.17) と (4.18) はともに z 方向に伝播する波の波動方程式であり, これらの方程式で表される波がシアー Alfvén 波である. この波は磁気張力を復元力とし, 磁場の変動や流体の速度の変動は磁力線に沿って伝わる. また, 速度の微小変動について (4.10) より横波である.

(4.17) や (4.18) で表される波の速度は

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu\rho_0}} \quad (4.19)$$

であり, v_A を Alfvén 速度と呼ぶ.

4.3.2 伝播メカニズム

単純化した Alfvén 波の伝播のメカニズムを以下に示す.

B_0 の方向を z 方向とし, y 方向に速度場の擾乱 v_1 が生じたとする. すると $v_1 \times B_0$ の方向, つまり x 方向に電場が生じ, その方向に電流 J_1 が生じる. この電流により $J_1 \times B_0$ の方向, つまり $-y$ 方向 (B_1 と逆方向) に力 (磁気張力) が生じ, その磁気張力により v_1 は $-y$ 方向に引き戻される (図 4.1).

このようにして振動が生じ波として伝播する. Alfvén 波は磁気張力を復元力とする波である.

^{*4}(4.17) の詳しい導出は付録 A にて行なう.

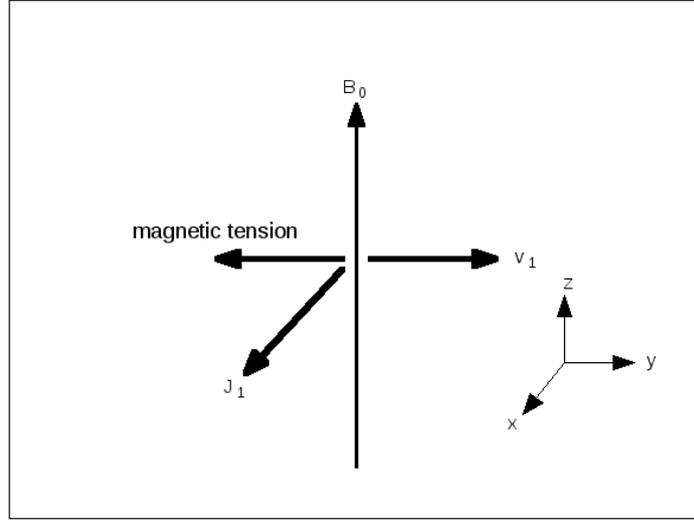


図 4.1: 非圧縮性流体におけるシアア Alfvén 波の伝播の略図.

4.4 Alfvén 波のより一般的な考察

微小振幅の波を考える. まず波の解を仮定する. 微小変動 v_1, B_1, ρ_1 を,

$$v_1, B_1, \rho_1 \propto \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \quad (4.20)$$

を満たす平面波とする. これらを (4.7), (4.8), (4.9) に代入すると,

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{\omega} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \quad (4.21)$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{a^2 \rho_1}{\omega \rho_0} \mathbf{k} + \frac{1}{\mu \rho_0 \omega} \mathbf{B}_0 \times (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \quad (4.22)$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{v}_1) \quad (4.23)$$

が得られる. (4.21) と (4.23) を用いて (4.22) から ρ_1 と B_1 を消去すると,

$$\omega^2 \mathbf{v}_1 = a^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} + \frac{1}{\mu \rho_0} [\mathbf{k} \times \{\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)\}] \times \mathbf{B}_0 \quad (4.24)$$

が得られる. そして (4.24) の右辺第二項をベクトル解析の公式を用いて変形し, そのあと式全体を整理すると,

$$\left\{ \frac{1}{\mu \rho_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \omega^2 \right\} \mathbf{v}_1 + \left\{ \left(\frac{\mathbf{B}_0^2}{\mu \rho_0} + a^2 \right) \mathbf{k} - \frac{1}{\mu \rho_0} \mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \right\} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - \frac{1}{\mu \rho_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} = 0 \quad (4.25)$$

となる^{*5}.

(4.25) から波の分散関係を得ることができる. 以下では (4.25) を用いて, 速度の微小変動 v_1 の方向によって波を三つのモードに分類する.

4.5 v_1 が B_0 と k に垂直である場合

このとき,

$$(k \cdot v_1) = 0, \quad (B_0 \cdot v_1) = 0 \quad (4.26)$$

であるので, (4.25) より

$$\frac{1}{\mu\rho_0}(B_0 \cdot k)^2 - \omega^2 = 0 \quad (4.27)$$

を得る. この場合 (4.21) から $\rho_1 = 0$ となるため, 波に伴う運動は非圧縮である. 以下, B_0 を z 方向にとり, k は xz 平面上にあるとする (図 4.2).

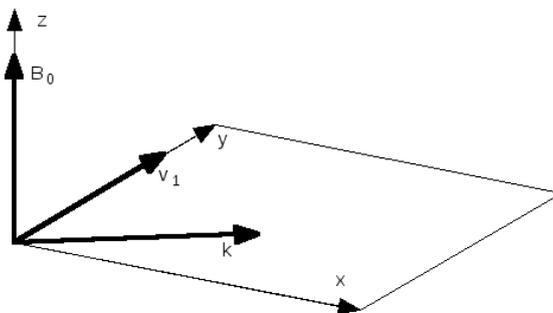


図 4.2: B_0 は z 方向, k は xz 平面上にある. v_1 は B_0 と k に垂直である.

^{*5}(4.22) から (4.25) を導出する過程は, 付録 A にて詳述する.

4.5.1 分散関係と位相速度, 群速度

波の分散関係は, (4.27) から,

$$\omega = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})}{\sqrt{\mu\rho_0}} \quad (4.28)$$

であるとわかる. この分散関係で表される波は, シアー Alfvén 波と呼ばれる.

次に位相速度を求める. B_0 と k のなす角を θ とすると, 位相速度 v_p は

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu\rho_0}} \cos\theta = v_A \cos\theta \quad (4.29)$$

と求められる. したがって, 位相速度は磁場の方向に最大値 v_A となり, 磁場と垂直な方向には波は伝播しないことがわかる.

最後に群速度を求める. k_x, k_y, k_z をそれぞれ波数の x, y, z 成分とし, また $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ をそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルとすると, 群速度 \mathbf{v}_g は,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_g &= \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\mathbf{e}_z \\ &= \frac{B_0}{\sqrt{\mu\rho_0}}\mathbf{e}_z \\ &= v_A\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (4.30)$$

となる. したがって, 波は z 方向, つまり磁場の方向にのみエネルギーを伝播するとわかる.

4.6 \mathbf{v}_1 が B_0 と k が作る平面上にある場合

前節と同様に B_0 の方向は z 方向, k は xz 平面上にあり, B_0 と k のなす角を θ とする (図 4.3).

4.6.1 分散関係

今, 流体は圧縮性である. まず図 4.4 のように \mathbf{v}_1 を B_0 と k の方向に分解すると,

$$\mathbf{v}_1 = v_{1z}\mathbf{e}_z + v_{1k}\mathbf{e}_k \quad (4.31)$$

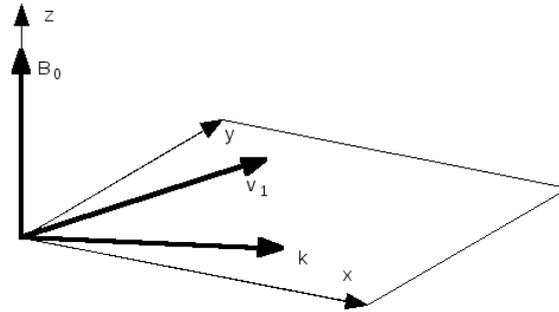


図 4.3: B_0 は z 方向, k は xz 平面上にある. v_1 は B_0 と k が作る平面上にある.

である. ここで, v_{1z}, v_{1k} をそれぞれ v_1 の z, k 成分とし, e_z, e_k をそれぞれ z, k 方向の単位ベクトルとした.

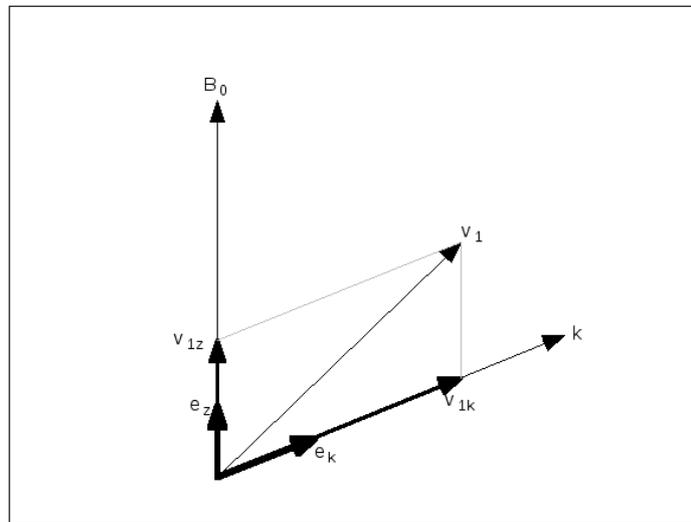


図 4.4: v_1 を B_0 と k の方向に分解する.

また,

$$B_0 \cdot k = B_0 k \cos \theta \tag{4.32a}$$

$$B_0 \cdot v_1 = B_0(v_{1z} + v_{1k} \cos \theta) \tag{4.32b}$$

$$k \cdot v_1 = k(v_{1z} \cos \theta + v_{1k}) \tag{4.32c}$$

である. (4.25) に (4.31) ~ (4.32c) を代入し $v_A^2 = B_0^2/\mu\rho_0$ を用いると,

$$\begin{aligned} & (v_A^2 k^2 \cos^2 \theta - \omega^2)(v_{1z} \mathbf{e}_z + v_{1k} \mathbf{e}_k) + \{(v_A^2 + a^2)k^2 \mathbf{e}_k \\ & \quad - v_A^2 k^2 \cos \theta \mathbf{e}_z\}(v_{1z} \cos \theta + v_{1k}) \\ & \quad - v_A^2 k^2 \cos \theta (v_{1z} + v_{1k} \cos \theta) \mathbf{e}_k = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

となり, この式を $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_k$ でまとめると,

$$\begin{aligned} & (\omega^2 v_{1z} + k^2 v_A^2 \cos \theta v_{1k}) \mathbf{e}_z \\ & \quad + (a^2 k^2 \cos \theta v_{1z} + \{(v_A^2 + a^2)k^2 - \omega^2\} v_{1k}) \mathbf{e}_k = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

となる. これを満たす解として,

$$\omega^2 v_{1z} + k^2 v_A^2 \cos \theta v_{1k} = 0 \quad (4.35)$$

かつ

$$a^2 k^2 \cos \theta v_{1z} + \{(v_A^2 + a^2)k^2 - \omega^2\} v_{1k} = 0 \quad (4.36)$$

が存在する. (4.35) と (4.36) を v_{1z} と v_{1k} に関する連立方程式とみなすと

$$\begin{pmatrix} \omega^2 & k^2 v_A^2 \cos \theta \\ a^2 k^2 \cos \theta & (v_A^2 + a^2)k^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1z} \\ v_{1k} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.37)$$

とできるので, ゼロでない解を持つとすると,

$$\begin{vmatrix} \omega^2 & k^2 v_A^2 \cos \theta \\ a^2 k^2 \cos \theta & (v_A^2 + a^2)k^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.38)$$

であることが必要である. この式から

$$\omega^4 - k^2(v_A^2 + a^2)\omega^2 + k^4 a^2 v_A^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (4.39)$$

を得ることができ, これが分散関係である. この分散関係で表される波を圧縮モード Alfvén 波といい, プラズマおよび磁場の圧力と磁気張力を復元力とする.

4.6.2 位相速度

(4.39) を ω^2 の 2 次方程式とみなすと, その判別式 D は,

$$\begin{aligned} D &= k^4(v_A^2 + a^2)^2 - 4a^2 v_A^2 k^4 \cos^2 \theta \\ &= k^4(v_A^2 - a^2)^2 + 4a^2 v_A^2 k^4 \sin^2 \theta > 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

となり, また $k^2(v_A^2 + a^2) > 0$, $k^4 a^2 v_A^2 \cos^2 \theta > 0$ であるので, (4.39) は異なる二つの正の実数解を持ち, その解は,

$$\omega_f^2 = \frac{1}{2} k^2 [v_A^2 + a^2 + \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}] \quad (4.41)$$

と

$$\omega_s^2 = \frac{1}{2} k^2 [v_A^2 + a^2 - \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}] \quad (4.42)$$

である. そのため, 圧縮モード Alfvén 波はさらに二つのモードに分解することができる.

位相速度の大きい方を v_{pf} , 小さい方を v_{ps} とすると,

$$v_{pf}^2 = \left(\frac{\omega_f}{k}\right)^2 = \frac{1}{2} [v_A^2 + a^2 + \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}], \quad (4.43)$$

$$v_{ps}^2 = \left(\frac{\omega_s}{k}\right)^2 = \frac{1}{2} [v_A^2 + a^2 - \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}] \quad (4.44)$$

である. 位相速度 v_{pf} で伝播する波を速進波 (fast mode), 位相速度 v_{ps} で伝播する波を遅進波 (slow mode) という.

これらの波は v_A と a の大小関係によって位相速度が異なる. (4.43) と (4.44) は $\theta = 0$ において,

$$v_{pf}^2 = \frac{1}{2} [v_A^2 + a^2 + \{(v_A^2 - a^2)^2\}^{1/2}] = \begin{cases} v_A^2 & (v_A > a) \\ a^2 & (v_A < a) \end{cases} \quad (4.45)$$

$$v_{ps}^2 = \frac{1}{2} [v_A^2 + a^2 - \{(v_A^2 - a^2)^2\}^{1/2}] = \begin{cases} a^2 & (v_A > a) \\ v_A^2 & (v_A < a) \end{cases} \quad (4.46)$$

となる. $\theta = 0$ のとき, 位相速度が v_A になるものを変形 Alfvén 波 (modified Alfvén wave), a になるものを変形音波 (modified sound wave) という. また, $\theta = \pi/2$ のとき (4.43) は

$$v_{pf}^2 = \frac{1}{2} [v_A^2 + a^2 + \{(v_A^2 + a^2)^2\}^{1/2}] = v_A^2 + a^2 \quad (4.47)$$

となる. したがって, 速進波は $\theta = \pi/2$ において, つまり磁場に垂直な方向には速度 $(v_A^2 + a^2)^{1/2}$ で伝播する. この波を磁気音波 (magnetosonic wave) という. 圧縮性流体では連続の式 (4.7) より速度の微小変動について $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 \neq 0$ であるので, 変形音波と磁気音波は縦波である.

4.6.3 群速度

圧縮モード Alfvén 波の群速度は、シア Alfvén 波の群速度と同様に、定義により、

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \mathbf{e}_z \quad (4.48)$$

である。ここで、 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = (k \sin \theta, 0, k \cos \theta)$ である。群速度の各成分は、 k と θ の各成分に分けて考えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial k_x} &= \frac{\partial k}{\partial k_x} \frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{\partial \theta}{\partial k_x} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \\ &= \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{\cos \theta}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (4.49a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_y} = 0 \quad (4.49b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial k_z} &= \frac{\partial k}{\partial k_z} \frac{\partial \omega}{\partial k} - \frac{\partial \theta}{\partial k_z} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \\ &= \cos \theta \frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{\sin \theta}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (4.49c)$$

と表される。速進波に対して、

$$\frac{\partial \omega_f}{\partial k} = \frac{1}{\sqrt{2}} [v_A^2 + a^2 + \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}]^{1/2} \quad (4.50a)$$

$$\frac{\partial \omega_f}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{2} k v_A^2 a^2}{[v_A^2 + a^2 + \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}]^{1/2}} \sin \theta \cos \theta \quad (4.50b)$$

であり、遅進波に対して、

$$\frac{\partial \omega_s}{\partial k} = \frac{1}{\sqrt{2}} [v_A^2 + a^2 - \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}]^{1/2} \quad (4.51a)$$

$$\frac{\partial \omega_s}{\partial \theta} = -\frac{\sqrt{2} k v_A^2 a^2}{[v_A^2 + a^2 - \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}]^{1/2}} \sin \theta \cos \theta \quad (4.51b)$$

である。したがって、速進波の群速度を \mathbf{v}_{gf} 、遅進波の群速度を \mathbf{v}_{gs} とすると、 \mathbf{v}_{gf} の各成分は

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_{gf})_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} [v_A^2 + a^2 + \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}]^{1/2} \sin \theta \\ &\quad + \frac{\sqrt{2} v_A^2 a^2}{[v_A^2 + a^2 + \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}]^{1/2}} \sin \theta \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (4.52a)$$

$$(\mathbf{v}_{gf})_y = 0 \quad (4.52b)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_{gf})_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} [v_A^2 + a^2 + \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}]^{1/2} \cos \theta \\ &\quad - \frac{\sqrt{2} v_A^2 a^2}{[v_A^2 + a^2 + \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}]^{1/2}} \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (4.52c)$$

と求められ, v_{gs} の各成分は

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v}_{gs})_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[v_A^2 + a^2 - \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2} \right]^{1/2} \sin \theta \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}v_A^2 a^2}{[v_A^2 + a^2 - \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}]^{1/2}} \sin \theta \cos^2 \theta \quad (4.53a)
 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{v}_{gs})_y = 0 \quad (4.53b)$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v}_{gs})_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[v_A^2 + a^2 - \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2} \right]^{1/2} \cos \theta \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}v_A^2 a^2}{[v_A^2 + a^2 - \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2 a^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}]^{1/2}} \sin^2 \theta \cos \theta \quad (4.53c)
 \end{aligned}$$

と求められる.

4.7 位相速度および群速度に関する考察

4.7.1 位相速度

これまで求めてきた式からわかるように, シアー Alfvén 波と圧縮モード Alfvén 波の位相速度はともに B_0 と k のなす角 θ に依存する. つまり, 磁場に対して波が伝播する方向によって位相速度は変化する. その様子を図 4.5 から図 4.10 に示す.

図 4.5, 4.6, 4.7 では, 横軸を θ , 縦軸を各モードの位相速度としている. B_0 と k が平行であるところから垂直であるところに向かって, v_{pf} は増加し v_p と v_{ps} は減少していることがわかる. 図 4.8, 4.9, 4.10 では, 横軸を位相速度の x 成分, 縦軸を位相速度の z 成分としており, また B_0 の方向を縦軸にとっている. 動径の絶対長さは特定の角度における位相速度の値である. これらの図は原点に点源があるときの瞬間的な波面の形と考えることができる.

図 4.5 ~ 図 4.10 より, $\theta = \pi/2$, つまり波の伝播方向が磁場に対して垂直であるとき, シアー Alfvén 波と遅進波はともに位相速度がゼロでありその方向には伝播しないことがわかる. 一方, そのとき速進波は磁気音波として最大の位相速度 ($v_A^2 + a^2$) で伝播する. また, $\theta = 0$, つまり波の伝播方向が磁場に平行であるとき, $v_A > a$ ならば シアー Alfvén 波と速進波は等しい位相速度で伝播し, $v_A < a$ ならば シアー Alfvén 波と遅進波が等しい位相速度で伝播することがわかる.

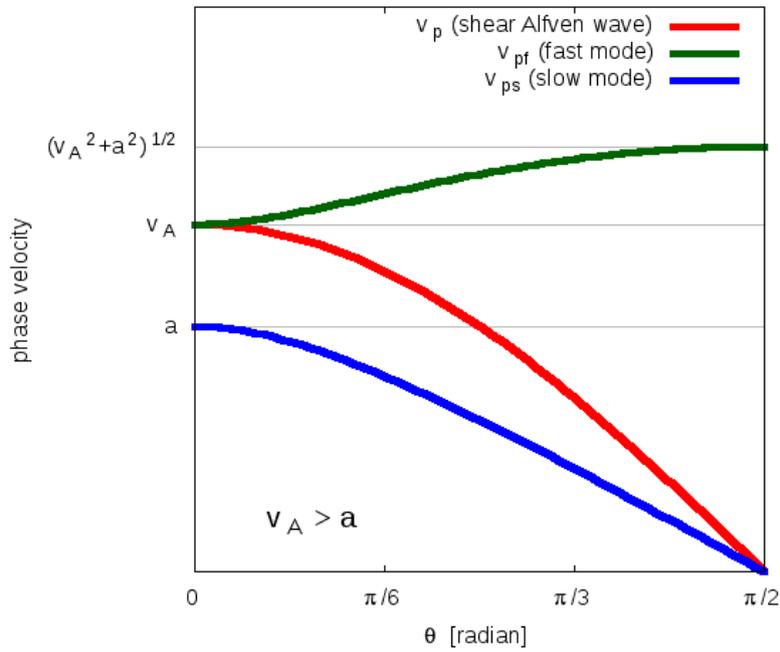


図 4.5: $v_A > a$ の場合の v_p, v_{pf}, v_{ps} . ここで $v_A = \sqrt{2}a$ とした.

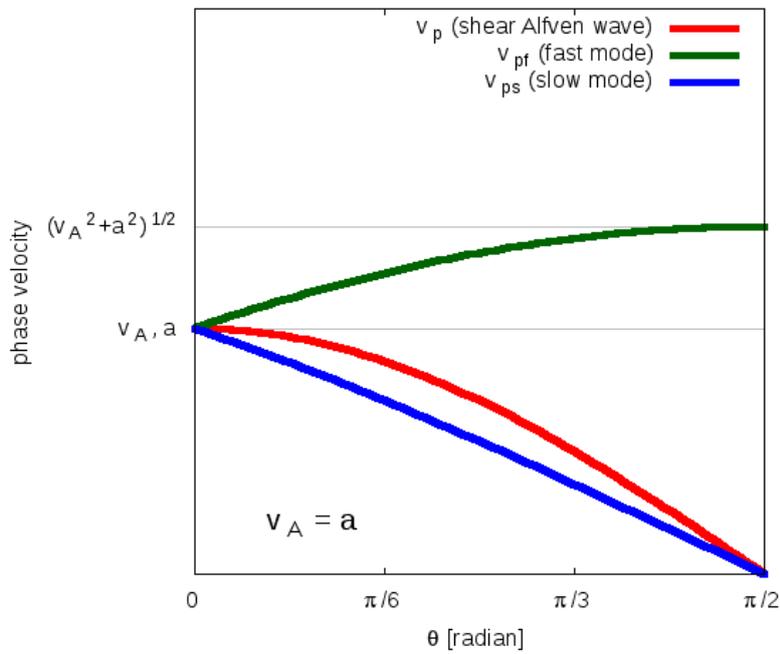


図 4.6: $v_A = a$ の場合の v_p, v_{pf}, v_{ps} .

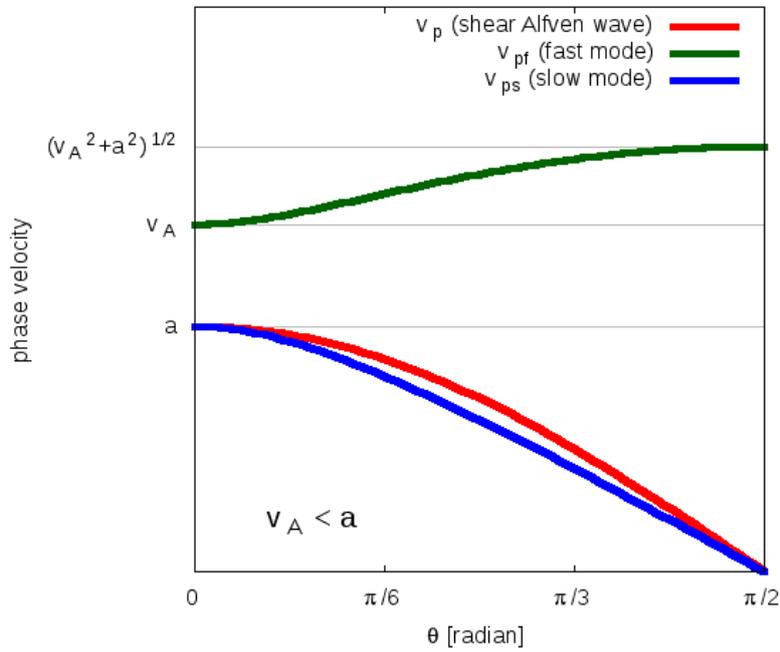


図 4.7: $v_A < a$ の場合の v_p, v_{pf}, v_{ps} . ここで $a = \sqrt{2}v_A$ とした.

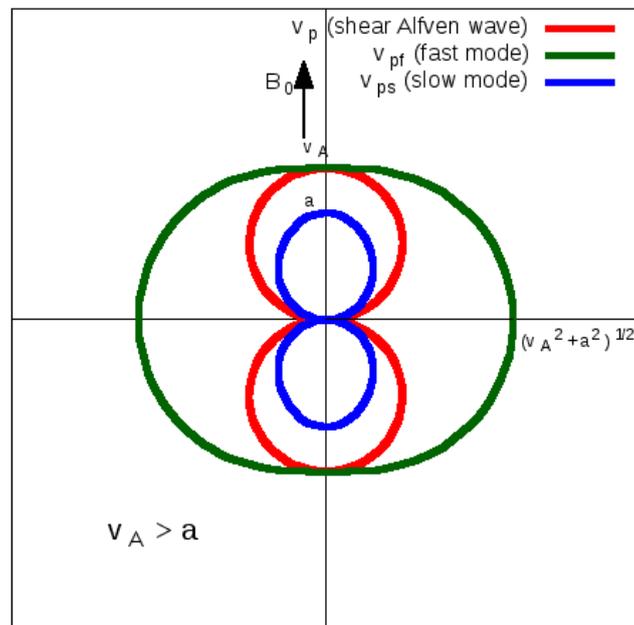


図 4.8: $v_A > a$ の場合の v_p, v_{pf}, v_{ps} . ここで $v_A = \sqrt{2}a$ とした.

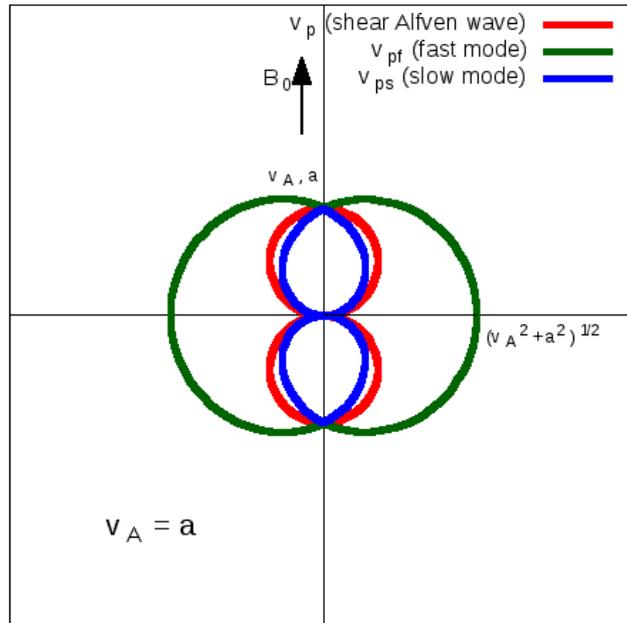


図 4.9: $v_A = a$ の場合の v_p, v_{pf}, v_{ps} .

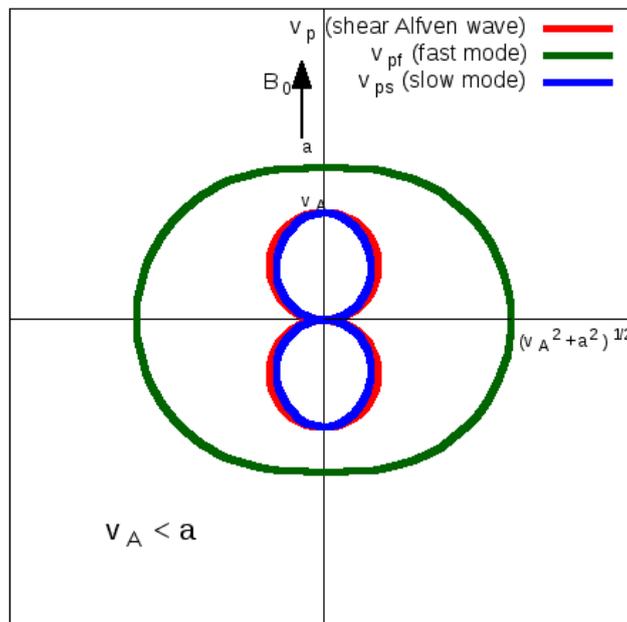


図 4.10: $v_A < a$ の場合の v_p, v_{pf}, v_{ps} . ここで $a = \sqrt{2}v_A$ とした.

4.7.2 群速度

シアー Alfvén 波と圧縮モード Alfvén 波の群速度も, 位相速度と同様に θ によって変化する. その様子を図 4.11 ~ 図 4.13 に示す. それらの図において横軸を群速度の x 成分, 縦軸を群速度の z 成分としており, また B_0 の方向を縦軸にとっている. 図中の v_T は Tube velocity と呼ばれ,

$$v_T = \frac{v_A a}{\sqrt{v_A^2 + a^2}} \tag{4.54}$$

である.

これらの図より, 速進波は磁場に垂直な方向に最大の速さでエネルギーを輸送することがわかる. また, 遅進波は磁場に沿ってエネルギーを輸送するとき, 円錐形
の方向に輸送することがわかる.

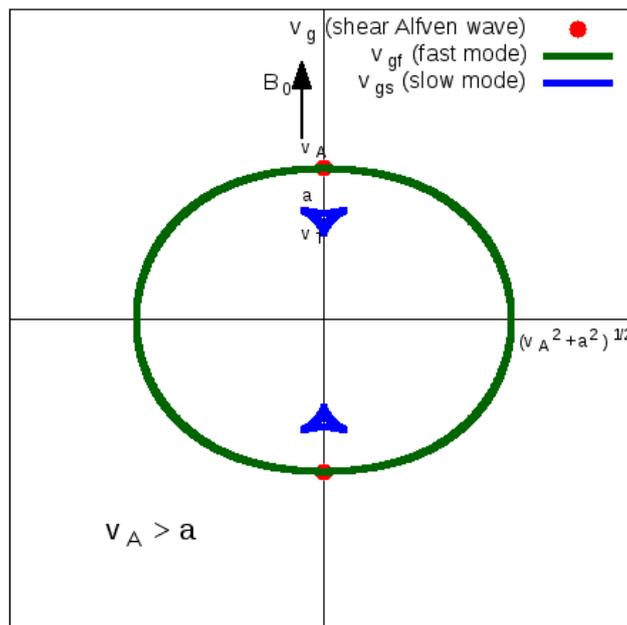


図 4.11: $v_A > a$ の場合の v_g, v_{gf}, v_{gs} . ここで $v_A = \sqrt{2}a$ とした.

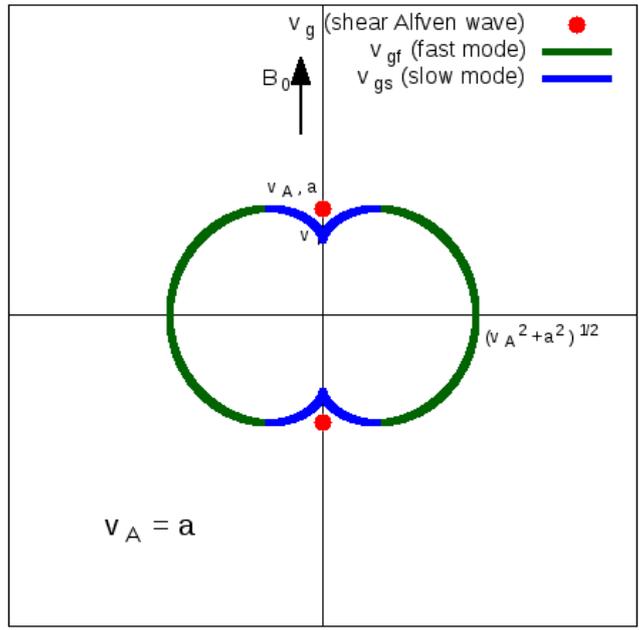


図 4.12: $v_A = a$ の場合の v_g, v_{gf}, v_{gs} .

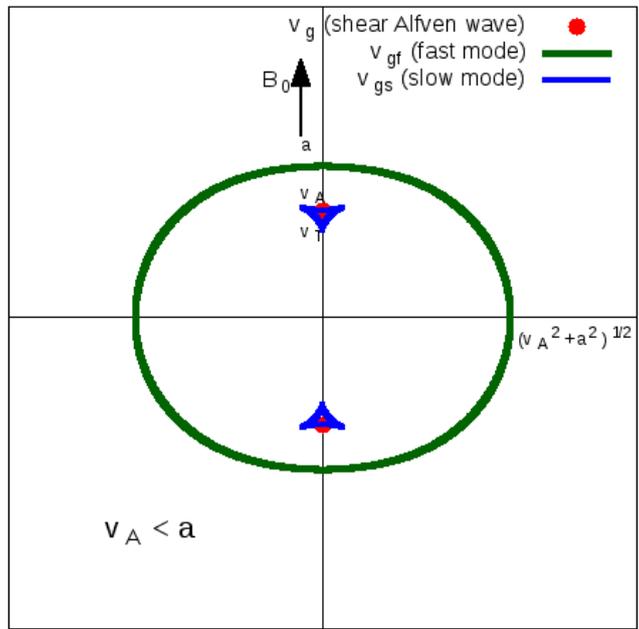


図 4.13: $v_A < a$ の場合の v_g, v_{gf}, v_{gs} . ここで $a = \sqrt{2}v_A$ とした.

第5章 二流体モデルにおける Alfvén 波

ここでは電子とイオンの二つの磁気流体を考え、Alfvén 速度を電子およびイオンの熱速度と比較することにより複数のモードの波を考察する。

5.1 二流体モデル

今、流体は非圧縮性であるとする。つまり生じる波はシアーモードである。以後、荷電粒子に関する物理量を添字 s を付けて表す。そのような物理量のうち電子に関するものは添字を e と置き換え、イオンに関するものは添字を i と置き換える。また準中性条件 $n = n_e = n_i$ を用いる。

(3.11f) の運動方程式は

$$m_s n \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s \right\} = -\nabla p_s + n q_s (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) \quad (5.1)$$

である。これを前章と同様の方法で線形化すると、

$$m_s n \frac{\partial \mathbf{v}_{s1}}{\partial t} = -\nabla p_{s1} + n q_s (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{s1} \times \mathbf{B}_0) \quad (5.2)$$

となる。今、磁場に平行な成分 (z 成分) を考えると、

$$m_s n \frac{\partial v_{sz1}}{\partial t} = -T_s \frac{\partial n_1}{\partial z} + n q_s E_{z1} \quad (5.3)$$

である。ここで、横波であるシアーモードの波を考えているために $B_{z1} = 0$ であることを用いた。また等温過程として $p_{s1} = n_1 T_s$ (T_s は電荷の温度) を用いた。

次に、一度 (5.2) の磁場に垂直な成分について考える。取り扱っている運動の時間スケールは荷電粒子のサイクロトロン運動の周期よりもずっとゆっくりである。

つまり、運動の周波数は荷電粒子のサイクロトロン運動の周波数よりも十分小さいので、(5.2) の左辺の時間変化の項を無視することにする。すると、(5.2) の磁場に垂直な成分は、

$$\mathbf{v}_{s\perp 1} \times \mathbf{B}_0 = -\mathbf{E}_{\perp 1} + \frac{\nabla_{\perp} p_{s\perp 1}}{nq_s} \quad (5.4)$$

となる。(5.4) に \mathbf{B}_0 との外積をとると、

$$(\mathbf{v}_{s\perp 1} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = -\mathbf{E}_{\perp 1} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\nabla_{\perp} p_{s\perp 1} \times \mathbf{B}_0}{nq_s} \quad (5.5)$$

であり、この式の左辺をベクトル解析の公式を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_{s\perp 1} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 &= -\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{v}_{s\perp 1} \times \mathbf{B}_0) \\ &= -(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_0)\mathbf{v}_{s\perp 1} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{v}_{s\perp 1})\mathbf{B}_0 \\ &= -B_0^2 \mathbf{v}_{s\perp 1} \end{aligned} \quad (5.6)$$

である。これを用いて (5.5) を整理すると、

$$\mathbf{v}_{\sigma\perp 1} = \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} - \frac{\nabla_{\perp} p_{\sigma\perp 1} \times \mathbf{B}_0}{nq_{\sigma} B_0^2} \quad (5.7)$$

が得られる^{*1}。右辺第一項は線形化した単一粒子の $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト、右辺第二項は線形化した反磁性ドリフトを表す。この式の発散をとると、

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\sigma\perp 1} = \frac{1}{B_0^2} \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0) - \frac{1}{nq_{\sigma} B_0^2} \nabla \cdot (\nabla_{\perp} p_{\sigma\perp 1} \times \mathbf{B}_0) \quad (5.8)$$

である。右辺の各項をベクトル解析の公式を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0) &= \mathbf{B}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_1) - \mathbf{E}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{B}_0) \\ &= \mathbf{B}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_1) \end{aligned} \quad (5.9)$$

と

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla_{\perp} p_{\sigma\perp 1} \times \mathbf{B}_0) &= \mathbf{B}_0 \cdot (\nabla \times \nabla_{\perp} p_{\sigma\perp 1}) - \nabla_{\perp} p_{\sigma\perp 1} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}_0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

となる。これと (3.11a) を用い、 $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ と置き換えると、(5.8) から

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_{\sigma\perp 1} &= \frac{1}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_1) \\ &= -\frac{1}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{B_0^2} B_0 \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}_{\perp 1} + B_{z1} \mathbf{k}) \\ &= \frac{i\omega}{B_0} B_{z1} \end{aligned} \quad (5.11)$$

^{*1}(5.7) の右辺第一項について、 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{\perp 1} + E_{z1} \mathbf{k}$ かつ $E_{z1} \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = E_{z1} \mathbf{k} \times B_0 \mathbf{k} = 0$ より、 $\mathbf{E}_{\perp 1} \times \mathbf{B}_0$ を $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ と書き換えた。

という関係式を得る.

そしてもう一度磁場に平行な成分を考えると, $B_{z1} = 0$ より $\nabla \cdot \mathbf{v}_{\sigma\perp 1} = 0$ である. これを考慮し $\rho = m_\sigma n$ を用いると, 線形化した連続の式は

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n v_{\sigma z 1}) = 0 \quad (5.12)$$

と書ける. (5.12) の z 微分をとったものを (5.3) の時間微分をとったものと組み合わせ整理すると,

$$\frac{\partial^2 v_{\sigma z 1}}{\partial t^2} - \frac{T_\sigma}{m_\sigma} \frac{\partial^2 v_{\sigma z 1}}{\partial z^2} = \frac{q_\sigma}{m_\sigma} \frac{\partial E_{z1}}{\partial t} \quad (5.13)$$

が得られる. この式が, 磁場に平行な電場の寄与を考慮した場合の波動方程式である. すべての物理量が $\exp(i(k_z z - \omega t))$ に比例するとすれば, (5.13) の解として

$$v_{\sigma z 1} = \frac{i\omega q_\sigma}{m_\sigma} \frac{E_{z1}}{\omega^2 - k_z^2 T_\sigma / m_\sigma} \quad (5.14)$$

が得られる. そして $J_{z1} = \sum n q_\sigma v_{\sigma z 1}$ を用い, またプラズマ周波数 $\omega_{p\sigma}^2 = n q_\sigma^2 / \epsilon m_\sigma$ を導入すると, 上の式から磁場に平行な電流と電場の間の関係式

$$\mu J_{z1} = \frac{i\omega}{c^2} E_{z1} \sum_\sigma \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2 - k_z^2 T_\sigma / m_\sigma} \quad (5.15)$$

が得られる. ここで c は光速であり,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (5.16)$$

である.

ここで, (5.15) の左辺の μJ_{z1} を書き換える. (5.7) について, $\mathbf{v}_{\sigma\perp 1}$ は時間に依存するため単一粒子の分極ドリフト $(m_\sigma / q_\sigma B_0^2) d\mathbf{E}_{\perp 1} / dt$ を考慮する. そして, 単一粒子に対する $\mathbf{E}_{\perp 1}$ の代わりに流体に対する $\mathbf{E}_{\perp 1} - \nabla_{\perp} p_{\sigma\perp 1} / n q_\sigma$ を用いる ((5.4) を参照). ($d\mathbf{E}_{\perp 1} / dt$ と $dp_{\sigma\perp 1} / dt$ はそれぞれ $\mathbf{E}_{\perp 1}$ と $p_{\sigma\perp 1}$ に比べて小さいため, (5.7) ではそれらを無視していた.) すると, (5.7) は

$$\mathbf{v}_{\sigma\perp 1} = \frac{\mathbf{E}_{\perp 1} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} - \frac{\nabla_{\perp} p_{\sigma\perp 1} \times \mathbf{B}_0}{n q_\sigma B_0^2} + \frac{m_\sigma}{q_\sigma B_0^2} \frac{d\mathbf{E}_{\perp 1}}{dt} - \frac{m_\sigma}{n q_\sigma^2 B_0^2} \nabla_{\perp} \frac{dp_{\sigma\perp 1}}{dt} \quad (5.17)$$

となる. 次に, (5.17) を用いて磁場に垂直な電流 $\mathbf{J}_{\perp 1} = \sum n q_\sigma \mathbf{v}_{\sigma\perp 1}$ を計算する. 電子とイオンは互いに反対回りにドリフト運動するので $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトの項は互いに打ち消し合う. また, 電子の分極ドリフトの項は分子の質量のためにイオンの分極ドリフトの項に比べて小さいので無視し, $dp_{\perp 1} / dt$ は $p_{\perp 1}$ に比べて小さいので無視する. したがって, 磁場に垂直な電流は

$$\mu \mathbf{J}_{\perp 1} = \frac{\mu n m_i}{B_0^2} \frac{d\mathbf{E}_{\perp 1}}{dt} - \sum_\sigma \frac{\mu \nabla_{\perp} p_{\sigma\perp 1} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} = \frac{1}{v_A^2} \frac{d\mathbf{E}_{\perp 1}}{dt} - \frac{\mu \nabla_{\perp} p_{\perp 1} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \quad (5.18)$$

である. ここで $\sum p_{\sigma\perp 1} = p_{\perp 1}$ を用いた. v_A は 4.3 節で導入した Alfvén 速度である. 次に Maxwell 方程式について考える. $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{\perp 1} + E_{z1}\mathbf{k}$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{\perp 1} + B_{z1}\mathbf{k}$ と $\nabla = \nabla_{\perp} + \mathbf{k}\partial/\partial z$ を用いると, Maxwell 方程式 (3.11a) は

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp 1} + \nabla_{\perp} \times E_{z1}\mathbf{k} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \times \mathbf{E}_{\perp 1} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}_{\perp 1} + B_{z1}\mathbf{k}) \quad (5.19)$$

と書ける. そしてこの式の磁場に平行な成分は

$$\mathbf{k} \cdot \nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp 1} = i\omega B_{z1} \quad (5.20)$$

であり, 磁場に垂直な成分は

$$(\nabla_{\perp} E_{z1} - ik_z \mathbf{E}_{\perp 1}) \times \mathbf{k} = i\omega \mathbf{B}_{\perp 1} \quad (5.21)$$

である. ここで $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$, $\partial/\partial z \rightarrow ik_z$ と置き換えた. 同様に Maxwell 方程式 (3.11b) は

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp 1} + \nabla_{\perp} \times B_{z1}\mathbf{k} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \times \mathbf{B}_{\perp 1} = \mu(\mathbf{J}_{\perp 1} + J_{z1}\mathbf{k}) \quad (5.22)$$

と書けて, 磁場に平行な成分は

$$\mathbf{k} \cdot \nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp 1} = \mu J_{z1} \quad (5.23)$$

で, 磁場に垂直な成分は

$$(\nabla_{\perp} B_{z1} - ik_z \mathbf{B}_{\perp 1}) \times \mathbf{k} = \mu \mathbf{J}_{\perp 1} \quad (5.24)$$

である. (5.24) を (5.18) に代入すると,

$$(\nabla_{\perp} B_{z1} - ik_z \mathbf{B}_{\perp 1}) \times \mathbf{k} = \frac{1}{v_A^2} \frac{d\mathbf{E}_{\perp 1}}{dt} - \frac{\mu \nabla_{\perp} p_{\perp 1} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \quad (5.25)$$

である. この式において $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ と置き換え, また $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{k}$ であることを用いると,

$$(\nabla_{\perp} B_{z1} - ik_z \mathbf{B}_{\perp 1}) \times \mathbf{k} = -\frac{i\omega}{v_A^2} \mathbf{E}_{\perp 1} - \frac{\mu \nabla_{\perp} p_{\perp 1} \times \mathbf{k}}{B_0} \quad (5.26)$$

となる. これを変形して,

$$-ik_z \mathbf{B}_{\perp 1} \times \mathbf{k} + \frac{i\omega}{v_A^2} \mathbf{E}_{\perp 1} = -\nabla_{\perp} \left(B_{z1} + \frac{\mu p_{\perp 1}}{B_0} \right) \times \mathbf{k} \quad (5.27)$$

となる. また, (5.21) と \mathbf{k} との外積をとると,

$$i\omega \mathbf{B}_{\perp 1} \times \mathbf{k} - ik_z \mathbf{E}_{\perp 1} = -\nabla_{\perp} E_{z1} \quad (5.28)$$

となる。(5.27) と (5.28) は $E_{\perp 1}$ と $B_{\perp 1} \times \mathbf{k}$ についての連立方程式とみなせるので、それを解くと

$$\mathbf{E}_{\perp 1} = \frac{ik_z \nabla_{\perp} E_{z1} + i\omega \nabla_{\perp} (B_{z1} + \mu p_{\perp 1}/B_0) \times \mathbf{k}}{\omega^2/v_A^2 - k_z^2} \quad (5.29a)$$

$$\mathbf{B}_{\perp 1} \times \mathbf{k} = \frac{i(\omega/v_A^2) \nabla_{\perp} E_{z1} + ik_z \nabla_{\perp} (B_{z1} + \mu p_{\perp 1}/B_0) \times \mathbf{k}}{\omega^2/v_A^2 - k_z^2} \quad (5.29b)$$

が得られる。一方, (5.20) と (5.23) はそれぞれ

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_{\perp 1} \times \mathbf{k}) = i\omega B_{z1} \quad (5.30a)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}_{\perp 1} \times \mathbf{k}) = \mu J_{z1} \quad (5.30b)$$

と書ける。これらの式に $E_{\perp 1}$ と $B_{\perp 1} \times \mathbf{k}$ を代入すると,

$$\nabla \cdot \left(\frac{ik_z \nabla_{\perp} E_{z1} \times \mathbf{k} - i\omega \nabla_{\perp} (B_{z1} + \mu p_{\perp 1}/B_0)}{\omega^2/v_A^2 - k_z^2} \right) = i\omega B_{z1} \quad (5.31a)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{i(\omega/v_A^2) \nabla_{\perp} E_{z1} + ik_z \nabla_{\perp} (B_{z1} + \mu p_{\perp 1}/B_0) \times \mathbf{k}}{\omega^2/v_A^2 - k_z^2} \right) = \mu J_{z1} \quad (5.31b)$$

が得られる。ここで, スカラーポテンシャル ψ に対して, $\nabla \cdot (\nabla_{\perp} \psi \times \mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \nabla_{\perp} \psi = 0$ であるので, 上の二式は

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla_{\perp} (B_{z1} + \mu p_{\perp 1}/B_0)}{\omega^2/v_A^2 - k_z^2} \right) = -B_{z1} \quad (5.32a)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{i\omega \nabla_{\perp} E_{z1}}{\omega^2/v_A^2 - k_z^2} \right) = v_A^2 \mu J_{z1} \quad (5.32b)$$

となる。ここで得られた (5.32b) を用いると, (5.15) を書き換えることができ,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla_{\perp} E_{z1}}{\omega^2/v_A^2 - k_z^2} \right) - \frac{v_A^2}{c^2} E_{z1} \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2 - k_z^2 T_{\sigma}/m_{\sigma}} = 0 \quad (5.33)$$

が得られる。

(5.33) において $\nabla_{\perp} \rightarrow ik_{\perp}$ と置き換えて整理すると,

$$\frac{k_{\perp}^2}{\omega^2 - k_z^2 v_A^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \frac{1}{\omega^2 - k_z^2 T_e/m_e} + \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \frac{1}{\omega^2 - k_z^2 T_i/m_i} = 0 \quad (5.34)$$

が得られる。

次に, (5.34) において, Alfvén 速度 ($v_A = \omega/k \cos \theta = \omega/k_z$) と電子およびイオンの熱速度の大小関係を考えることにより二つのモードの波に分類し, それぞれについて考察する。

5.2 $v_{Ti}^2 \ll v_A^2 \ll v_{Te}^2$, および $v_A^2 \ll v_{Ti}^2, v_{Te}^2$ の場合

まず, $v_{Ti}^2 \ll v_A^2 \ll v_{Te}^2$, つまり $T_i/m_i \ll \omega^2/k_z^2 \ll T_e/m_e$ の場合, (5.34) は

$$\frac{k_\perp^2}{\omega^2 - k_z^2 v_A^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \frac{1}{k_z^2 T_e/m_e} + \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \frac{1}{\omega^2} = 0 \quad (5.35)$$

となる. ここで, 今考えているモードの波がイオン音波よりも十分に速い, つまり $\omega^2/k_z^2 \gg T_e/m_e$ であると仮定すると^{*}, (5.35) の左辺第三項は無視でき, そこから分散関係

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2 \left(1 + \frac{k_\perp^2}{v_A^2} \frac{T_e}{m_e} \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \right) \quad (5.36)$$

を得る. この分散関係で表される波は Kinetic Alfvén 波と呼ばれる.

(5.36) から位相速度が得られ, 磁場に平行なものは

$$v_{pz}^K = v_A \left(1 + \frac{k_\perp^2}{v_A^2} \frac{T_e}{m_e} \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} \quad (5.37)$$

であり, 磁場に垂直なものは

$$v_{p\perp}^K = \frac{k_z}{k_\perp} v_A \left(1 + \frac{k_\perp^2}{v_A^2} \frac{T_e}{m_e} \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} = \cot \theta v_{pz}^K \quad (5.38)$$

である.

次に, $v_A^2 \ll v_{Ti}^2, v_{Te}^2$, つまり $\omega^2/k_z^2 \ll T_i/m_i, T_e/m_e$ の場合, (5.34) は

$$\frac{k_\perp^2}{\omega^2 - k_z^2 v_A^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \frac{1}{k_z^2 T_e/m_e} - \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \frac{1}{k_z^2 T_i/m_i} = 0 \quad (5.39)$$

となる. これより, 同様に分散関係

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2 \left(1 + \frac{k_\perp^2}{v_A^2} \frac{T_e}{(1 + T_e/T_i)m_e} \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \right) \quad (5.40)$$

を得る. この分散関係で表される波も Kinetic Alfvén 波と呼ばれている.

(5.40) から位相速度が得られ, 磁場に平行なものは

$$v_{pz}^K = v_A \left(1 + \frac{k_\perp^2}{v_A^2} \frac{T_e}{(1 + T_e/T_i)m_e} \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} \quad (5.41)$$

^{*}イオン音波の位相速度は, 電子の温度がイオンの温度より十分高いとすると T_e/m_e である.

であり,

$$v_{p\perp}^K = \frac{k_z}{k_\perp} v_A \left(1 + \frac{k_\perp^2}{v_A^2} \frac{T_e}{(1 + T_e/T_i)m_e} \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} = \cot \theta v_{pz}^K \quad (5.42)$$

である.

分散関係より, Kinetic Alfvén 波は電子の慣性長 c/ω_{pe} と電子の熱速度 T_e/m_e により Alfvén 速度 v_A からずれることがわかる. また Kinetic Alfvén 波の位相速度に関して, $k_z \ll k_\perp$, つまり $\cot \theta \ll 1$ より, $v_{p\perp}^K \ll v_{pz}^K$ であることがわかる.

5.3 $v_A^2 \gg v_{Te}^2, v_{Ti}^2$ の場合

$v_A^2 \gg v_{Te}^2, v_{Ti}^2$, つまり $\omega^2/k_z^2 \gg T_e/m_e, T_i/m_i$ の場合, 質量が $m_i \gg m_e$ より $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{pi}^2$ であることも考慮すると, (5.34) は

$$\frac{k_\perp^2}{\omega^2 - k_z^2 v_A^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \frac{1}{\omega^2} = 0 \quad (5.43)$$

となる. これより分散関係

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 v_A^2}{1 + k_\perp^2 c^2 / \omega_{pe}^2} \quad (5.44)$$

を得る. この波は Inertial Alfvén 波と呼ばれる.

(5.44) から位相速度が得られ, 磁場に平行なものは

$$v_{pz}^I = \frac{v_A}{(1 + k_\perp^2 c^2 / \omega_{pe}^2)^{1/2}} \quad (5.45)$$

であり, 磁場に垂直なものは

$$v_{p\perp}^I = \frac{k_z}{k_\perp} \frac{v_A}{(1 + k_\perp^2 c^2 / \omega_{pe}^2)^{1/2}} = \cot \theta v_{pz}^I \quad (5.46)$$

である.

分散関係より, Inertial Alfvén 波は電子の慣性長 c/ω_{pe} により Alfvén 速度 v_A からずれることがわかる. また Inertial Alfvén 波の位相速度に関して, Kinetic Alfvén 波の位相速度と同様に, $v_{p\perp}^I \ll v_{pz}^I$ であることがわかる.

第6章 まとめ

本研究では、磁気流体の基礎方程式系を導出した後、磁気流体が一流体である場合と二流体である場合に分け、波の解を仮定し分散関係を求め、伝播特性に関して考察を行なった。

(1) 一流体モデルの下での Alfvén 波

速度の微小変動 v_1 の方向によって、シアーモードと圧縮モードに分類することができた。また、圧縮モードの波はさらに二つのモードに分類することができた。

シアー Alfvén 波

v_1 が磁場と波数に垂直な場合、シアーモードとなる。この波は非圧縮な運動を伴い磁気張力を復元力とする、磁場や流体速度の変動が磁力線に沿って伝わる波であることがわかった。また、位相速度は磁場と垂直な方向にはゼロとなるためその方向には波は伝播せず、群速度は磁場方向の成分しか持たないためエネルギーは磁場の方向にのみ伝播されることを確認した。

圧縮モード Alfvén 波

v_1 が磁場と波数の作る平面上にある場合、圧縮モードとなる。この波は圧縮性の運動を伴い、プラズマおよび磁場の圧力と磁気張力を復元力とする。分散関係から大きい方と小さい方の二つの周波数を得ることができ、大きい方の周波数を持つ波は速進波 (fast mode)、小さい方を持つ波は遅進波 (slow mode) である。位相速度より、速進波はあらゆる方向に伝播するが遅進波は磁場と垂直な方向には伝播しないことがわかった。また、群速度より速進波はあらゆる方向にエネルギーを輸送し、磁場に垂直な方向に最大の速さで輸送することがわかった。遅進波は磁場に沿って

エネルギーを輸送するとき, 円錐形の方に輸送することがわかった. また位相速度が, 磁場に沿った方向には Alfvén 速度 v_A となる波を変形 Alfvén 波, 音速 a となる波を変形音波といい, 磁場に垂直な方向には $(v_A^2 + a^2)^2$ となる波を磁気音波という.

(2) 二流体モデルの下での Alfvén 波

Alfvén 速度を電子およびイオンの熱速度と比較することにより, Kinetic モードと Inertial モードに分類することができた.

Kinetic Alfvén 波

$v_{Ti}^2 \ll v_A^2 \ll v_{Te}^2$, あるいは $v_A^2 \ll v_{Ti}^2, v_{Te}^2$ の場合, Kinetic Alfvén 波となる. Kinetic Alfvén 波は電子の慣性長と電子の熱速度により Alfvén 速度からずれることがわかった. また位相速度に関して, 磁場に垂直な成分は磁場に平行な成分に比べて十分小さいことがわかった.

Inertial Alfvén 波

$v_A^2 \gg v_{Te}^2, v_{Ti}^2$ の場合, Kinetic Alfvén 波となる. Inertial Alfvén 波は電子の慣性長により Alfvén 速度 v_A からずれることがわかった. また位相速度に関して, 磁場に垂直な成分は磁場に平行な成分に比べて十分小さいことがわかった.

付録 A 本文中の各式の導出

A.1 (4.25) の導出

式 (4.22)

$$\mathbf{v}_1 = \frac{a^2 \rho_1}{\omega \rho_0} \mathbf{k} + \frac{1}{\mu \rho_0 \omega} \mathbf{B}_0 \times (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \quad (\text{A.1})$$

から始める. ここに (4.21) と (4.23) を代入して ρ_1, \mathbf{B}_1 を消去すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{a^2}{\mu \rho_0} \frac{\rho_0}{\omega} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} + \frac{1}{\mu \rho_0 \omega} \mathbf{B}_0 \times \left[\mathbf{k} \times \left\{ \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{v}_1) \right\} \right] \\ &= \frac{a^2}{\omega^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} + \frac{1}{\mu \rho_0 \omega^2} \mathbf{B}_0 \times [\mathbf{k} \times \{\mathbf{k} \times (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{v}_1)\}] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

となる. これより, 式 (4.24)

$$\omega^2 \mathbf{v}_1 = a^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} - \frac{1}{\mu \rho_0} \mathbf{B}_0 \times [\mathbf{k} \times \{\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)\}] \quad (\text{A.3})$$

を得る. 次にこの式の右辺第二項に対してベクトル解析の公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A.4})$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 \times [\mathbf{k} \times \{\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)\}] &= \mathbf{k}[\mathbf{B}_0 \cdot \{\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)\}] - \{\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)\}(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \\ &= \mathbf{k}\{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) - \mathbf{B}_0^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)\} \\ &\quad - \{\mathbf{v}_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)\}(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) + \{\mathbf{B}_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)\}(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{k} - \mathbf{B}_0^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \\ &\quad - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{B}_0(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となる. これを (A.3) に代入すると,

$$\begin{aligned} \omega^2 \mathbf{v}_1 &= a^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} - \frac{1}{\mu \rho_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{k} + \frac{1}{\mu \rho_0} \mathbf{B}_0^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \\ &\quad + \frac{1}{\mu \rho_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \mathbf{v}_1 - \frac{1}{\mu \rho_0} \mathbf{B}_0(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

となり, これを整理すると,

$$\left\{ \frac{1}{\mu\rho_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \omega^2 \right\} \mathbf{v}_1 + \left\{ \left(\frac{B_0^2}{\mu\rho_0} + a^2 \right) \mathbf{k} - \frac{1}{\mu\rho_0} \mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \right\} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - \frac{1}{\mu\rho_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} = 0 \quad (\text{A.7})$$

が得られ, (4.25) が導出された.

A.2 (4.11) の導出

運動方程式 (4.8)

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) = 0 \quad (\text{A.8})$$

から始める. 左辺第三項について,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) &= \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) - (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1 \times (\nabla \times \mathbf{B}_0) \\ &= \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

である. したがって (A.8) は,

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -\nabla p_1 - \frac{1}{\mu} \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 \\ &= -\nabla \left\{ p_1 + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) \right\} + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

と書き換えることができ, (4.11) が導出できた.

A.3 (4.17) の導出

\mathbf{B}_0 の方向が z 方向であるから,

$$(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) = B_0 \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.11})$$

となる. そのため式 (4.15) と (4.16) はそれぞれ

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{B_0}{\mu\rho_0} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial z} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial z} \quad (\text{A.13})$$

と書き換えられる. 次に (A.12) の z 微分をとると,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial z \partial t} = \frac{B_0}{\mu \rho_0} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_1}{\partial z^2} \quad (\text{A.14})$$

となり, (A.13) の時間微分をとると,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_1}{\partial t^2} = B_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t \partial z} \quad (\text{A.15})$$

となる. したがって, (A.14) と (A.15) より, 波動方程式

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_1}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu \rho_0} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_1}{\partial z^2} \quad (\text{A.16})$$

が導出できた.

謝辞

本研究を行なうにあたり, 高橋芳幸准教授には研究内容全体に関して事細かにご指導していただきました。林祥介教授には基礎理論講義を通じて波動理論を教えていただきました。システム情報学研究科計算科学専攻の堀久美子助教には磁気流体力学の基礎を教えていただきました。藤林凜氏には研究の進め方等において様々な相談に乗っていただきました。皆様に深く御礼申し上げます。

参考文献

- [1] Wolfgang Baumjohann, Rudolf A. Treumann, 2012: Basic Space Plasma Physics, Imperial College Press, 199-210 pp, 220-225 pp.
- [2] Hannes Alfvén, 1942: Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves, Nature.
- [3] P. K. Shukla, L. Stenflo, R. Bingham and B. Eliasson, 2004: Nonlinear effects associated with dispersive Alfvén waves in plasmas, Plasma Phys. Control. Fusion **46** (2004), B349-B358.
- [4] Fermi Thomas Albertz, 2010: Propagating Waves in Plasma : Magnetohydrodynamic (MHD) regime, Department of Earth and Planetary Science, The University of Tokyo,
URL:https://www.s.u-tokyo.ac.jp/en/utrip/archive/2010/pdf/07Fermi_FINAL_REPORT.pdf
- [5] Paul M. Bellan, 2008: Fundamentals of Plasma Physics, Cambridge University Press, 146-173 pp.
- [6] NASA, 2017: Alfvén Waves - Basic,
URL:<https://svs.gsfc.nasa.gov/4560>
- [7] NASA, 2017: Alfvén Waves - Kinetic,
URL:<https://svs.gsfc.nasa.gov/4561>
- [8] NASA, 2017: NASA Observations Reshape Basic Plasma Wave Physics,
URL:<https://www.nasa.gov/feature/goddard/2017/nasa-observations-reshape-basic-plasma-wave-physics>
- [9] 坂下 志郎, 池内 了, 1996: 宇宙流体力学, 培風館, 7-34 pp, 51-58 pp.
- [10] 小野 高幸, 三好 由純, 2012: 現代地球科学入門シリーズ 2 太陽地球圏, 共立出版, 1-31 pp.