

# シア一流中の不安定波の考察

白濱 理花

神戸大学 理学部 惑星学科  
流体地球物理学教育研究分野

2019/02/08

## 要旨

本論文では、基本場の風速の水平シアーにより生じる順圧不安定を研究する。初めに非粘性、非回転系での二次元渦度方程式を導出し、線形化により Rayleigh 方程式を導く。そして波動解を仮定し、シアー境界における条件に沿った式変形を行うことで、擾乱の安定性を調べた。その後、不安定モードと中立モードの分散曲線と固有関数の構造を調べることで、不安定モードが中立モードの共鳴によって説明されることが確かめられた。

# 目次

第1章	はじめに	1
第2章	基礎方程式	2
2.1	渦度方程式	2
2.1.1	二次元流れ	3
第3章	平行シアー流	4
3.1	Rayleigh 方程式	4
3.2	境界条件	7
第4章	積分定理	9
4.1	Rayleigh の条件	9
4.2	Fjørtoft の条件	12
4.3	Lin の定理 (中立波の存在の条件)	13
4.4	エネルギー方程式	13
第5章	区分的線形流れ	15
5.1	ケルビンヘルムホルツ不安定	15

5.2	エッジ波 . . . . .	17
5.3	二点折れ線モデル . . . . .	18
5.4	解析解 . . . . .	22
<b>第 6 章</b>	<b>中立波の共鳴による シア不安定</b>	<b>28</b>
6.1	渦位の保存 . . . . .	28
6.2	擬運動量 . . . . .	31
6.3	共鳴を起こすモードの特定 . . . . .	33
<b>第 7 章</b>	<b>結論</b>	<b>38</b>
付録 A	流体の連続の式, 運動方程式の導出	39
付録 B	渦に関する定理	42
付録 C	Iga (2012) の訳文	44
1	はじめに . . . . .	44
2	シア不安定モードをもたらす中立波 . . . . .	47
3	隠された中立波を取り戻す方法 . . . . .	52
4	定数ポテンシャル渦度の窓をまたぐ導出における不連続 . . . . .	56
5	連続モードとの関係 . . . . .	57
6	数値計算 . . . . .	59
7	折れ線速度分布の場合との比較 . . . . .	63

8	まとめ . . . . .	67
	謝辞	69
	参考文献	70

# 第1章 はじめに

大気中の大規模な流れが持つ不安定性の中で、特に重要と思われるものは2つある。一つは傾圧不安定 (baroclinic instability) と呼ばれるもので、日々の天気変化を引き起こす中緯度の高・低気圧の成因としてよく知られている。これに対し、もう一つの不安定性が順圧不安定 (barotropic instability) である。順圧不安定はシア不安定 (shear instability) とも呼ばれる。

地衡風平衡と静水圧平衡の関係は、速度場を  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  と書くとき、

$$f\mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{k} \quad (1.1)$$

で与えられ、ここで  $f$  はコリオリパラメータ、 $g$  は重力加速度、 $\rho$  は密度、 $p$  は圧力、 $\mathbf{k}$  は鉛直方向の単位ベクトルである。(1.1) の回転をとり、水平成分をとると、

$$\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial z} = -\frac{1}{f\rho^2}(\nabla\rho \times \nabla p)_H \quad (1.2)$$

となる。順圧な場、つまり  $\rho$  が  $p$  のみの関数であるような場においては、(1.2) の右辺はゼロになる。このとき、流れは鉛直方向に変化しない。このような鉛直方向に変化しない流れを順圧流と呼び、流体の運動を2次元的に考えることができる。順圧不安定はこのように鉛直方向にシアを持たない流れに存在する不安定である。 $\rho$  が  $p$  と  $T$ (温度) に依存する傾圧な場においては(1.2)の右辺はゼロにならず、流れが鉛直シアを持つ。しかし、傾圧流においても流れが適当な水平シアの分布を持つならば、順圧不安定が生じる可能性がある。したがって厳密には、順圧不安定は流れの渦度の水平分布の不均一性を起因とする不安定である。

流れの不安定性は、数学的には固有値問題を解くことにより考えられるが、その物理的な理解は困難とされてきた。

Iga (2012) は中立波間の共鳴による不安定の理解を、ポテンシャル渦度が一様でない場合に適用する方法を示した。本論文では理想化された最も簡単な区分的線形流れに対して、線形不安定論を用いて不安定モードについて考察し、中立波の共鳴により不安定モードが導かれることを示す。

## 第2章 基礎方程式

### 2.1 渦度方程式

渦度  $\omega$  は速度場  $v$  の回転

$$\omega = \nabla \times v \quad (2.1)$$

によって定義される.

運動方程式の非線形項は, ベクトル解析の公式<sup>\*1</sup> より,

$$v \cdot \nabla v = \nabla \left( \frac{1}{2} |v|^2 \right) - v \times \omega \quad (2.2)$$

と書き換えられる. これを用いると, 運動方程式は,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left( \frac{1}{2} |v|^2 \right) + v \times \omega + F \quad (2.3)$$

である. この回転をとると,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (v \times \omega) + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times F \quad (2.4)$$

となる. さらにベクトル解析の公式を用いることで

$$\frac{D\omega}{Dt} = -\omega(\nabla \cdot v) + (\omega \cdot \nabla)v + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times F \quad (2.5)$$

と書き換えられる. 連続の式は,

$$\nabla \cdot v = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (2.6)$$

<sup>\*1</sup>任意のベクトル場  $A, B$  についてのベクトル解析の公式

$$\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B + A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A)$$

と変形できるので, (2.6) を (2.5) に代入して整理すると,

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \times \nabla p + \frac{\nabla \times \mathbf{F}}{\rho} \quad (2.7)$$

(2.5) や (2.7) は渦度方程式と呼ばれる. (2.7) の右辺第一項は伸縮項, 第二項は傾圧項, 第三項はソレノイド項と呼ばれる.

### 2.1.1 二次元流れ

$xy$  平面における二次元流れを考える. 平面上の流体の速度  $\mathbf{u}$  は  $\mathbf{u} = ui + vj$  であり, 平面における垂直な速度  $w$  はゼロである. このとき, 渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.8)$$

によって与えられる. つまり, 二次元流れにおいて渦度は速度に対して垂直である. 伸縮項と傾圧項は二次元流れにおいてゼロであり, 体積力がない場合, 非圧縮流れに対する二次元の渦度方程式は,  $\zeta \equiv \omega^z \equiv \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}$  を用いると,

$$\frac{D\zeta}{Dt} = 0 \quad (2.9)$$

となる. つまり, 二次元流れにおいて渦度は保存される. 流体パーセルは周囲に移流されるときでさえも, その渦度を維持する.

## 第3章 平行シア一流

### 3.1 Rayleigh 方程式

ここで、図 3.1 に描かれているような平行シア一流の不安定について考える。また、特に二次元非圧縮流れに注目する。これは流線関数を導入し、質量の連続の式を満たすことにするためである。二次元非圧縮流れに対する渦度方程式は、

$$\frac{D\zeta}{Dt} = 0 \quad (3.1)$$

である。基本場は  $x$  方向に平行な流れで、 $y$  方向に変化すると仮定する。つまり、

$$\bar{\mathbf{u}} = U(y)\mathbf{i} \quad (3.2)$$

であるとする。

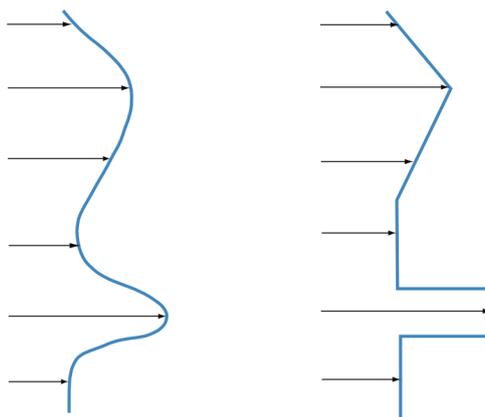


図 3.1: Vallis(2017) 左: なめらかな速度プロファイルの例, 速度と渦度は連続的である。右: 区分的に連続的な速度プロファイル, ここで速度と渦度は不連続である。

線形化された渦度方程式<sup>\*1</sup>は,

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

となる. ここで,  $\zeta'$  は渦度場のゆらぎ成分,  $u'$  と  $v'$  は速度場のゆらぎの  $x$  成分と  $y$  成分であり,  $Q = -\partial_y U$  である. また, 同様に線形化された質量の連続の式は

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

である. 流線関数  $\psi'$  を

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{\partial \psi'}{\partial y} \\ v' &= \frac{\partial \psi'}{\partial x} \\ \zeta' &= \nabla^2 \psi' \end{aligned}$$

<sup>\*1</sup>(3.3) を導出する. 基本状態からのゆらぎが小さい場合には, 線形化は妥当な手続きである. 速度場と渦度場  $\zeta$  を基本状態とそれからのゆらぎとして表現する:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \\ \zeta &= \bar{\zeta} + \zeta' \end{aligned}$$

ここで,  $\bar{\mathbf{u}} = \bar{U} \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{u}' = u' \mathbf{i} + v' \mathbf{j}$  とする. また  $\zeta = \omega \cdot \mathbf{k}$  なので,

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

である. これらを用いて (3.1) は,

$$\frac{\partial (\bar{\zeta} + \zeta')}{\partial t} + ((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla) (\bar{\zeta} + \zeta') = 0$$

となる. 第一項は, 簡単に  $\frac{\partial \zeta'}{\partial t}$  と展開できる. 第二項を展開すると,

$$\begin{aligned} ((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla) (\bar{\zeta} + \zeta') &= U \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + U \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \\ &= v' \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + U \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \end{aligned}$$

となる. ここで二つ目の等号ではゆらぎの二次の量は無視することにして,  $\bar{\zeta}$  の  $y$  依存性に注意した.

$$\bar{\zeta} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = Q$$

を用いてこれらをまとめると,

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

となる.

のように導入すると、線形化された渦度方程式は、

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial t} + U \frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

となる。ここで、

$$\psi'(x, y, t) = \text{Re} [\Psi(y) e^{ik(x-ct)}] \quad (3.6)$$

という形の正弦波解を仮定すると、 $\Psi(y)$  に対する微分方程式が、

$$(U - c) \left( \frac{d^2 \Psi}{dy^2} - k^2 \Psi \right) + \frac{dQ}{dy} \Psi = 0 \quad (3.7)$$

のように得られる。これは Rayleigh 方程式として知られている。回転の効果を考慮すると、より一般化して、

$$(U - c) \left( \frac{d^2 \Psi}{dy^2} - k^2 \Psi \right) + \left( \beta - \frac{dQ}{dy} \right) \Psi = 0 \quad (3.8)$$

となり、これは Rayleigh - Kuo 方程式として知られている。ここで  $\beta$  はコリオリパラメータ  $f = f_0 + \beta y$  のように  $\beta$  平面近似した場合にその  $y$  微分によるものである。これは二階線形常微分方程式であり、 $\Psi$  に対して境界条件を与えることで固有値を  $c$  とする固有値問題とみなすことができる。

$$c = c_r + ic_i \quad (3.9)$$

( $c_r, c_i$  は実数) として、 $k > 0$  の場合には (3.6) の時間依存性により、

$$\begin{cases} c_i < 0 & \text{安定} \\ c_i = 0 & \text{中立} \\ c_i > 0 & \text{不安定} \end{cases} \quad (3.10)$$

のように  $c_i$  の符号によって基本場の安定性が判断できる。また

$$\sigma \equiv kc_i \quad (3.11)$$

で定義される  $\sigma$  を擾乱の成長率という。

## 3.2 境界条件

境界条件は運動学的境界条件と力学的境界条件があり、前者のうち1つは流体粒子の鉛直速度が界面速度の鉛直成分と一致することである。なぜなら流体が界面に押し入ることはあり得ないため、界面上で流体粒子と界面との相対速度は界面に垂直な成分を持たないためである。後者の境界条件は界面で圧力が連続なことである。

### 運動学的境界条件

境界面においては、鉛直速度  $v$  は力学的条件から得られ、

$$v = \frac{D\eta}{Dt} \quad (3.12)$$

である。ここで、 $\eta$  は境界面の変位を表す。(3.12) を線形化すると、

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + U \frac{\partial \eta'}{\partial x} = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \quad (3.13)$$

となる。もし流体が一様ならばこの方程式は境界面の両側に対して成立し、二つの方程式

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta'}{\partial x} = \frac{\partial \psi'_1}{\partial x} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \eta'}{\partial x} = \frac{\partial \psi'_2}{\partial x} \quad (3.15)$$

が成り立つ。ここで、

$$\eta' = \text{Re} H e^{ik(x-ct)} \quad (3.16)$$

$$\psi'_i = \text{Re} \Psi_i(y) e^{ik(x-ct)} \quad (i = 1, 2) \quad (3.17)$$

のように指数関数的に成長する解を仮定して代入すると、

$$(U_1 - c)H = \Psi_1 \quad (3.18)$$

$$(U_2 - c)H = \Psi_2 \quad (3.19)$$

が得られる。したがって境界面での物質の連続性は一つ目の境界条件として

$$\boxed{\frac{\Psi}{U - c}} \quad (3.20)$$

が境界面の両側において連続であることを与える。

力学的境界条件

境界面に沿った方向での線形化された運動量方程式は,

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (3.21)$$

である. 基準モードに対して

$$u' = -\Psi_y e^{ik(x-ct)} \quad (3.22a)$$

$$v' = ik\Psi_y e^{ik(x-ct)} \quad (3.22b)$$

$$p' = P e^{ik(x-ct)} \quad (3.22c)$$

なので, これらを代入すると (3.21) は,

$$ik(U - c)\Psi_y - ik\Psi U_y = -ikP \quad (3.23)$$

となる. 圧力は境界面において連続であると考えられるので, 二つ目の境界条件として,

$$\boxed{(U - c)\Psi_y - U_y\Psi} \quad (3.24)$$

が境界面の両側において連続であることを得る.

## 第4章 積分定理

Rayleigh の方程式を実際には解かずにいくつかの解の性質を述べるができる。これらの性質は Rayleigh 方程式を適当に変形して境界から境界まで積分することで得られることが多いので積分定理と呼ばれる。ここでは積分定理のうちいくつか重要なものをまとめる。

簡単な分布に対して、解析解を求めることは可能である。しかし、連続的な  $U(y)$  の分布に対して解を求めることは難しいことがある。基本場の流れの分布が不安定になりうるときについて、いくらか一般的な基準を設けることができる。不安定になりうることを認識するために、不安定のための必要条件もしくは安定のための十分条件を導く。

### 4.1 Rayleigh の条件

Rayleigh 方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2\right)\Psi + \frac{Q_y}{U-c}\Psi = 0 \quad (4.1)$$

の両辺に  $\Psi$  の複素共役  $\Psi^*$  をかけて  $y$  方向に全領域  $y_1 \sim y_2$  で積分し、積分範囲の両端で境界条件  $\Psi = 0$  を用いて変形する。このとき  $|y|$  が無限大に近づくにつれて、 $\Psi$  がゼロに近づくことを仮定する。第一項については微分のチェーンルールより、

$$\Psi^* \frac{d^2 \Psi}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left( \Psi^* \frac{d\Psi}{dy} \right) - \frac{d\Psi^*}{dy} = \left| \frac{d\Psi}{dy} \right|^2 \quad (4.2)$$

となることを用いることに注意すると、

$$\int_{y_1}^{y_2} \left( \left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 \right) dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{Q_y}{U-c} |\Psi|^2 dy = 0 \quad (4.3)$$

を得る. ここで唯一の変数は複素数の  $c$  であり, 一つ目の積分の項は実数である. 二つ目の積分の虚数部分は,

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{Q_y}{|U - c|^2} |\Psi|^2 dy = 0 \quad (4.4)$$

である. 不安定になるためには  $c_i$  がゼロであってはならないので, (9.3) の積分がゼロでなければならない. したがって, 不安定の必要条件は

$$Q_y(y) = 0 \quad (4.5)$$

を満たす  $y = y_s$  (変曲点) が存在しなければならない. 言い換えると, 「基本場の絶対渦度の緯度微分  $dQ/dy$  が領域内で符号を変える」として与えられる. 変曲点が存在することはあくまでも不安定波の存在のための必要条件であり, この条件を満たしているからといって必ずしも不安定波が存在するとは限らない. このような基本場の流れが不安定となる必要条件は,  $\beta = 0$  の場合には Rayleigh の条件として,  $\beta \neq 0$  の場合には Rayleigh - Kuo の条件として知られている.

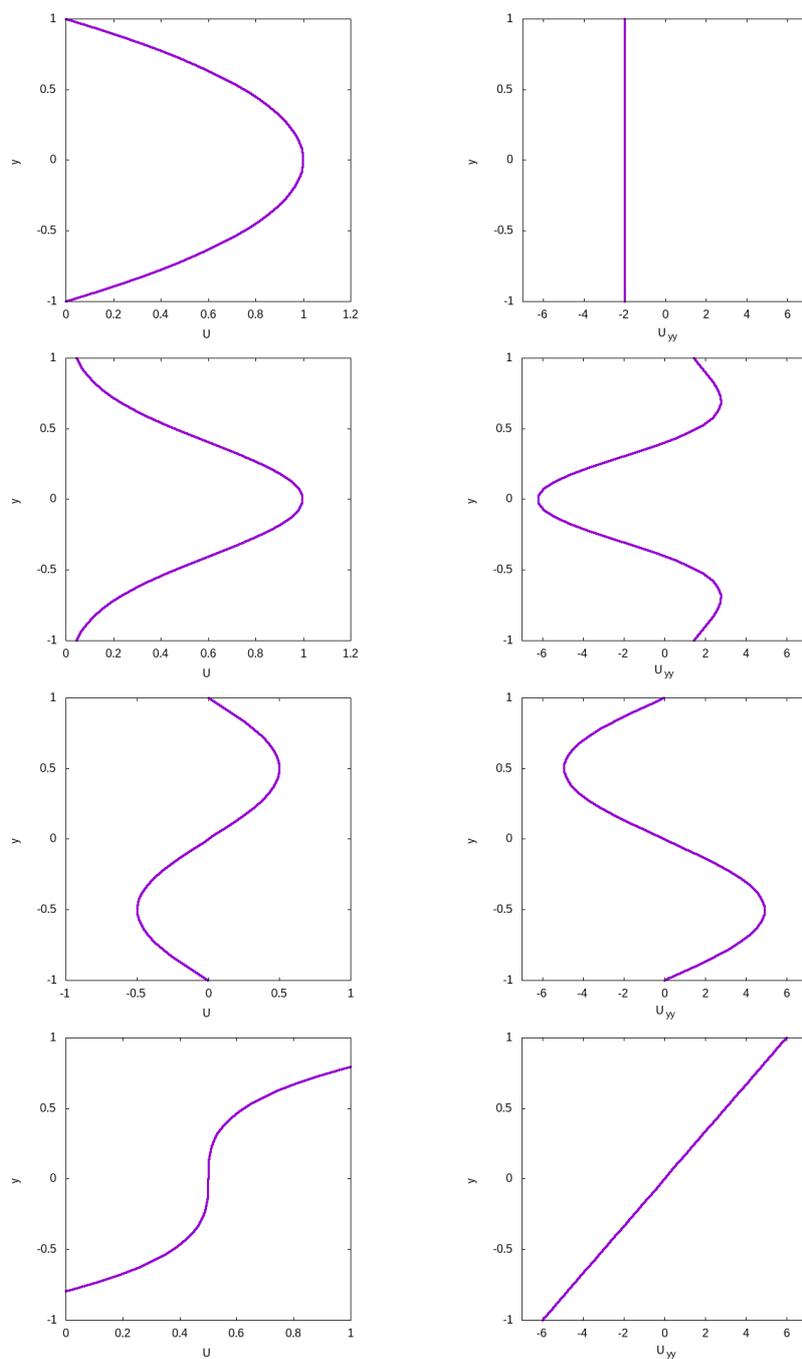


図 4.1: 平行な速度プロファイルの例 (左の列) とその二階微分 (右の列). 上から順にポアズイユ流れ ( $U = 1 - y^2$ ), ガウシアンジェット, 正弦波分布の流れ, 多項式分布の流れである. Rayleigh の基準より, 下から 3 つの分布はポテンシャル不安定の可能性がある流れである. 一方で一番上の分布は安定である.

## 4.2 Fjørtoft の条件

次に, (5.2) の実部を取り出すと,

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{Q_y}{|U - c|^2} |\Psi|^2 (U - c_r) dy = \int_{y_1}^{y_2} \left( \left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 \right) dy > 0 \quad (4.6)$$

である. (5.4) より不安定であるためには

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{Q_y}{|U - c|^2} |\Psi|^2 dy = 0 \quad (4.7)$$

でなければならない. この方程式と, (5.5) を用いて, 不安定であるときには,

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{Q_y}{|U - c|^2} |\Psi|^2 U dy > 0 \quad (4.8)$$

であるとわかる. これは Rayleigh - Kuo の条件とは別の不安定の必要条件を課すことができ, それは「 $Q_y U > 0$  となる領域が存在しなければならない」という条件である. ここで  $Q = -U_y$  である. 別の言い方をすると, 基本場の絶対渦度勾配と速度とが基本的に正の相関関係にあるという条件である. この不安定の必要条件は Fjørtoft の条件と呼ばれている. Fjørtoft の条件が満たされていれば, Rayleigh - Kuo の条件も自動的に満たされているので, Fjørtoft の条件は Rayleigh - Kuo の条件よりも厳しい条件である. 図 4.2 に Fjørtoft の条件で判断できる順圧不安定の可能性がある流れを示す.

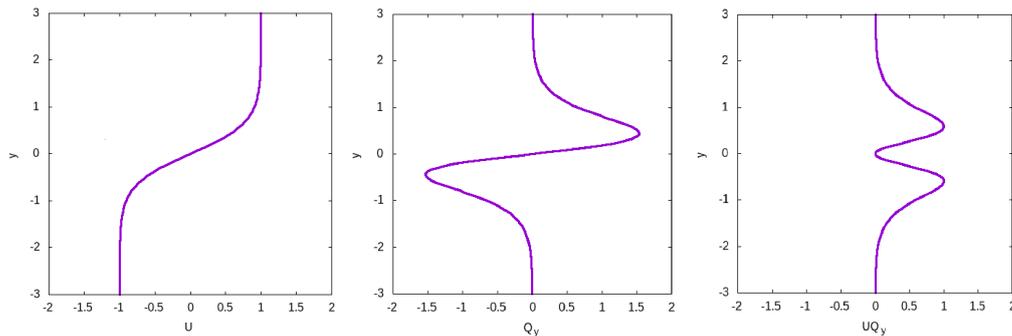


図 4.2: Fjørtoft の条件で判別できる順圧不安定の可能性がある流れ

### 4.3 Lin の定理 (中立波の存在の条件)

Lin の定理より, 波の位相速度が流れの中のどこかで基本流の流速に等しくなるように中立波が存在するためには, 流れは変曲点を持たなければならない. 特に流れが Fjørtoft の条件を満たす場合には, この中立波の位相速度は変曲点での基本流の流速に等しい. 一般に, 波の位相速度の流れの速さに等しくなる位置  $y = y_c$  は臨界点 (critical point) と呼ばれる.  $y = y_c$  は Rayleigh 方程式の特異点であるが, Fjørtoft の条件を満たす流れにおける中立波に対しては, 変曲点が臨界点と一致するため, Rayleigh 方程式に特異点は現れない. このような中立波を特異性のない中立モード (non-singular mode, 略して NSNM) または正則な中立モード (regular neutral mode) と呼ぶことがある. これに対して流れが単調でない場合には臨界点と変曲点が一致しないような中立波が存在できる. このような中立波は  $y = y_c$  に特異点を持つ. 一般に臨界点において特異性を持つ中立モードを singular neutral mode (SNM) と呼ぶ.

### 4.4 エネルギー方程式

線形化された渦度方程式,

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi' - U_{yy} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (4.9)$$

に  $-\psi$  をかけて,  $x$  と  $y$  に対して積分すると, (以下では擾乱の成分を表すプライムを省略することに注意して, )

$$\int_{-d}^d \frac{1}{L} \int_0^L \left[ -\psi \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi - U \psi \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\psi^2}{2} \right) U_{yy} \right] dy = 0 \quad (4.10)$$

となる. 東西境界について周期境界条件を, 南北境界について滑りなし条件を課すことにする. すなわち,

$$\psi(X + L, y, t) = \psi(x, y, t) \quad (4.11)$$

$$\psi(x, d, t) = \psi(x, -d, t) = 0 \quad (4.12)$$

である. (4.10) についていくつかの部分積分を実行し, 境界条件を適用することで, エネルギー方程式,

$$\frac{d}{dt} \int_{-d}^d \frac{u'^2 + v'^2}{2} dy = - \int_{-d}^d \frac{u'v'}{dy} dU dy \quad (4.13)$$

を得る. ここで  $u' = -\partial\psi/\partial y, v' = \partial\psi/\partial x$  である. この方程式の右辺は,

$$\psi(x, y, t) = \Psi(y, t) \cos[kx - \theta(y, t)] \quad (4.14)$$

のように  $\psi$  を表現することで決定できる. ここで  $\Psi$  は複素振幅であり,  $\theta$  は位相である. このとき運動量フラックス  $\overline{u'v'}$  は,

$$\overline{u'v'} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (4.15)$$

$$= \Psi^2 \frac{\partial\theta}{\partial y} k \sin^2(kx - \theta) + k \frac{\partial\Psi}{\partial y} \sin(kx - \theta) \cos(kx - \theta) \quad (4.16)$$

のように書かれる. 三角関数の公式を用いて,  $L$  が  $2\pi/k$  の倍数であるという条件を課すと, 運動量フラックスは,

$$\overline{u'v'} = \frac{k}{2} \Psi^2 \frac{\partial\theta}{\partial y} \quad (4.17)$$

となる. これにより,  $\overline{u'v'}$  の符号は位相の緯度方向の傾き  $\partial\theta/\partial y$  によって決定されることが示される. (4.17) を用いると, エネルギー方程式は,

$$\frac{d}{dt} \int_{-d}^d \frac{u'^2 + v'^2}{2} dy = -\frac{k}{2} \int_{-d}^d \Psi^2 \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{dU}{dy} dy \quad (4.18)$$

と書き換えられる. この方程式は,  $(\partial\theta/\partial y)(dU/dy) < 0$  である (擾乱の位相の緯度方向の傾きと平均流の南北シアーの符号が逆符号である) とき擾乱は成長する一方で,  $(\partial\theta/\partial y)(dU/dy) > 0$  である (擾乱の位相の緯度方向の傾きと平均流の南北シアーの符号が同符号である) とき擾乱は減衰することを示している.

## 第5章 区分的線形流れ

### 5.1 ケルビンヘルムホルツ不安定

ここで、図 5.1 に描かれる状況を考える。  $y = 0$  の境界面の両側の層において等しい密度であり、それぞれ  $x$  軸方向に  $U_1$  と  $U_2$  の速度で動く二つの流体のかたまりを考える。このとき渦度は  $y = 0$  にある薄い層以外ではゼロであるとする。

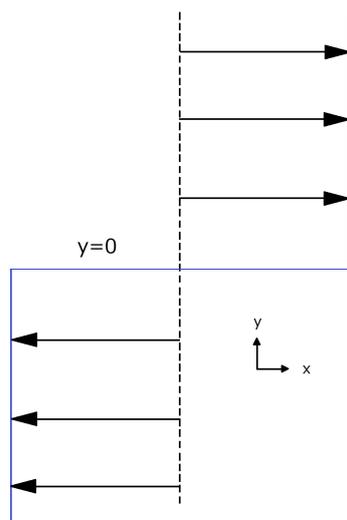


図 5.1: シアー流の不安定を発生させる基本状態のひとつ。

Rayleigh 方程式は簡単な形で、

$$(U_i - c) \left( \frac{d^2 \Psi}{dy^2} - k^2 \Psi_i \right) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.1)$$

となり、 $U_i \neq c$  とすると、 $\frac{d^2 \Psi}{dy^2} - k^2 \Psi_i = 0$  となる。この方程式に対して、二層の境界

面から離れたところで減衰する解は,

$$\Psi = \begin{cases} \Phi_1 e^{-ky} & (y > 0) \\ \Phi_2 e^{ky} & (y < 0) \end{cases} \quad (4.2)$$

であり, ここで  $\Phi_1$  と  $\Phi_2$  は定数である. 運動学的境界条件 (3.20)<sup>\*1</sup> は,

$$\frac{\Phi_1}{(U_1 - c)} = \frac{\Phi_2}{(U_2 - c)} \quad (5.2)$$

を与え, 力学的境界条件 (3.24)<sup>\*2</sup> は,

$$(U_1 - c)(-k)\Phi_1 = (U_2 - c)(k)\Phi_2 \quad (5.3)$$

を与える. (5.3) と (5.2) を組み合わせると,

$$(U_1 - c)^2 = -(U_2 - c)^2 \quad (5.4)$$

が得られ,

$$U_1 = U, \quad U_2 = -U \quad (5.5)$$

であるとき,

$$c^2 = -U^2 \quad (5.6)$$

となる. したがって,  $U$  は実数であるため

$$c = \pm iU \quad (5.7)$$

であり, 擾乱の成長率  $\sigma$  は  $\sigma = kc_i$  であるため, この系において擾乱は指数関数的に成長する.

---

<sup>\*1</sup>(3.20) を再掲する.

$$\frac{\Psi}{U - c} \quad (3.20)$$

<sup>\*2</sup>(3.24) を再掲する.

$$(U - c)\Psi_y - U_y\Psi \quad (3.24)$$

## 5.2 エッジ波

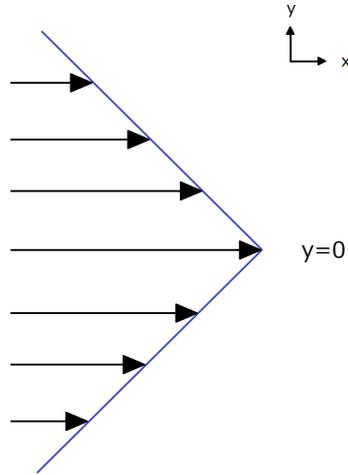


図 5.2:

基本場の流れが図 5.2 に描かれたような分布の場合を考える.  $y = 0$  の両側において  $U_{yy} = 0$  であるので, Rayleigh 方程式は単に

$$(U - c)(\Psi_{yy} - k^2\Psi) = 0 \quad (5.8)$$

となる.  $c \neq U$  と仮定すると, これは

$$\Psi = \begin{cases} \Phi_1 e^{-ky} & (y > 0) \\ \Phi_2 e^{ky} & (y < 0) \end{cases} \quad (5.9)$$

の解を持つ.  $c$  は 2 つの境界条件 (3.20) と (3.24) を適用することで求められる. (5.9) を境界条件の式に代入すると,

$$-k(U_0 - c)\Psi_1 - \Phi_1 \partial_y U_1 = k(U_0 - c)\Phi_2 - \Phi_2 \partial_y U_2 \quad (4.10a)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (4.10b)$$

を得る. ここで  $U_0$  は  $y = 0$  での速度,  $U_1(y)$  と  $U_2(y)$  は境界面の両側での速度で, ともに境界面では  $U_0$  に等しい. (図 5.2 は,  $U_1 = -Ay, U_2 = Ay$  であり, ここで  $A$  は正の定数の場合を描いている.) (4.10a) より  $c$  を求めると,

$$c = U_0 + \frac{\partial_y U_1 - \partial_y U_2}{2k} \quad (5.11)$$

が得られる. これは境界面に沿って基本場の流速と二つの層の間の渦度の差に比例する要素との和に等しい速度で伝播するエッジ波の分散関係である.  $y = 0$  の両側のシアーがどうであろうとも, 位相は実数であり不安定は生じない.

### 5.3 二点折れ線モデル

下図のような二つの半無限領域の層 (領域 1 と領域 3) に挟まれたシア層 (領域 2) を考える.

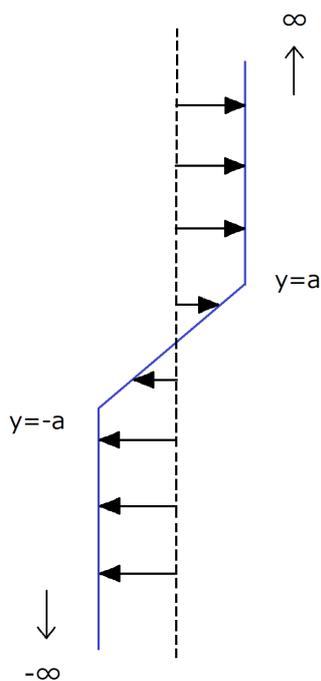


図 5.3:

基本場の流れは,

$$y > a: U = U_1 = U_0 \quad (4.12a)$$

$$-a < y < a: U = U_2 = \frac{U_0}{a}y \quad (4.12b)$$

$$y < -a: U = U_3 = -U_0 \quad (4.12c)$$

であり,  $U_0$  は定数とする. Rayleigh 方程式の解の形を,

$$y > a : \Psi_1 = Ae^{-k(y-a)} \quad (4.13a)$$

$$-a < y < a : \Psi_2 = Be^{k(y-a)} + Ce^{-k(y+a)} \quad (4.13b)$$

$$y < -a : \Psi_3 = De^{k(y+a)} \quad (4.13c)$$

と仮定する. これらの解の形は, 領域の端において減衰するような解を考えるためである. 境界面  $y = a$  と  $y = -a$  において境界条件 (3.20) と (3.24) を適用すると,

$$-A[(U_0 - c)k] = B \left[ (U_0 - c)k - \frac{U_0}{a} \right] - Ce^{-2ka} \left[ \frac{U_0}{a} + (U_0 - c)k \right] \quad (4.14a)$$

$$A = B + Ce^{-2ka} \quad (4.14b)$$

$$D[(U_0 - c)k] = B \left[ (U_0 + c)k + \frac{U_0}{a} \right] + Ce^{-2ka} \left[ \frac{U_0}{a} + (U_0 + c)k \right] \quad (4.14c)$$

$$D = Be^{-2ka} + C \quad (4.14d)$$

が得られる. この任意定数  $A, B, C, D$  を伴った四つの方程式は行列式の形で,

$$\begin{pmatrix} k(U_0 - c) & k(U_0 - c) - U_0/a & -e^{-2ka}[U_0/a + k(U_0 - c)] & 0 \\ 1 & -1 & -e^{-2ka} & 0 \\ 0 & -e^{-2ka}[k(U_0 + c) + U_0/a] & k(U_0 + c) - (U_0/a) & k(U_0 + c) \\ 0 & e^{-2ka} & a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0 \quad (5.15)$$

と書かれる.

非自明な解に対してこの行列の行列式はゼロになるはずであり, 分散関係式

$$c^2 = \left( \frac{U_0}{2ka} \right)^2 [(1 - 2ka)^2 - e^{-4ka}] \quad (5.16)$$

が得られる. 図 5.4 の上図はこれを図示したものである. 不安定が起こる臨界波数は

$$(1 - 2ka)^2 = e^{-4ka} \quad (5.17)$$

を解くことで得られ,  $a = 1$  の場合  $k < k_c \neq 0.63$  で不安定となる. また, 5.4 の下図は二点折れ線モデルにおける擾乱の成長率を描いたものである.  $k = 0.39$  において擾乱が最大発達する. このような基本流の不安定性により発達する擾乱を不安定擾乱または不安定波という. このとき不安定擾乱の位相速度  $c_r$  はゼロである. これに対して,  $k > k_c$  の擾乱は中立であり, 正または負の位相速度をもつ.

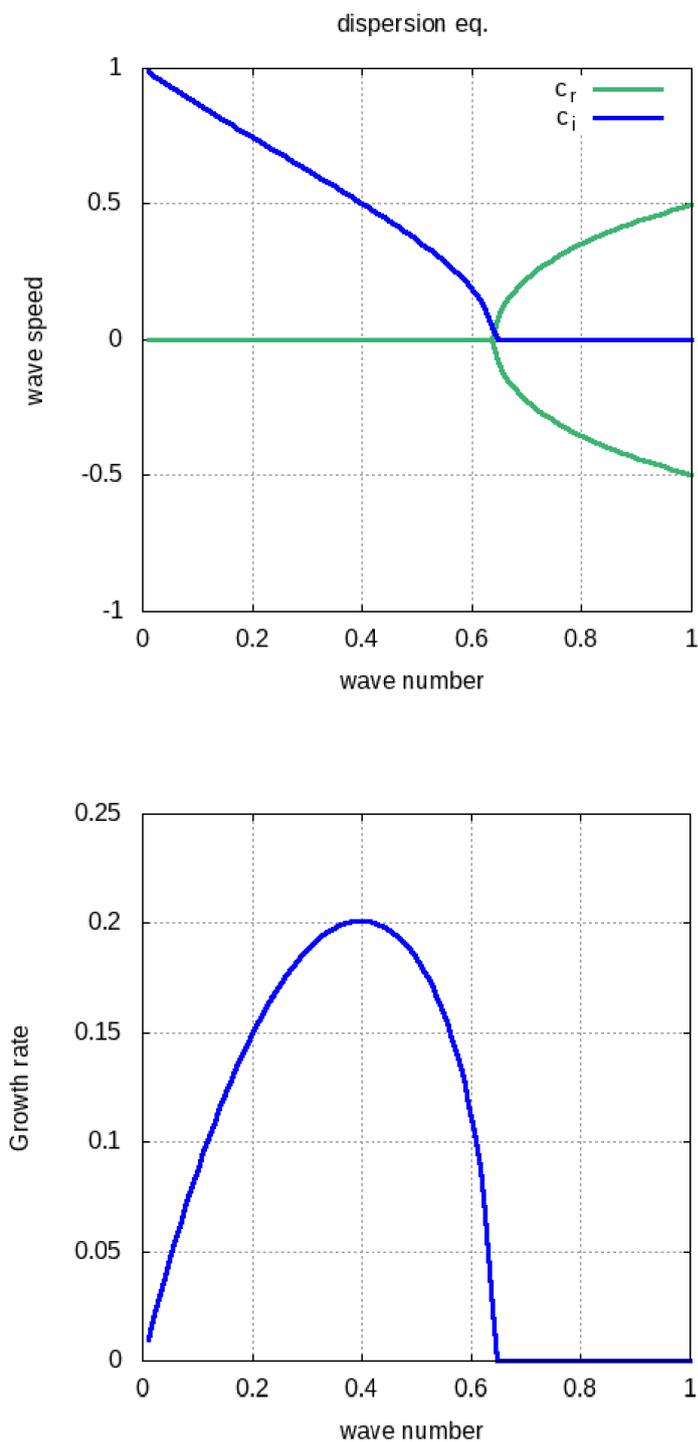


図 5.4: 上図: 擾乱の位相速度の実数部分  $c_r$  と虚数部分  $c_i$ , 下図: 擾乱の成長率 ( $a = U_0 = 1$  とした場合)

ここで  $a$  の値を変更すると成長率にどのような変化があるかを調べる.  $a$  の値を大きくすると, 図 5.5 に示したように成長する波数域が狭くなる. つまり, シアーの領域が離れると, 成長する擾乱は少なくなる. また,  $a$  の値が小さくなると成長する波数域が広がり,  $a = 0$  の場合は前に紹介したケルビンヘルムホルツ不安定の場合に一致し, あらゆる波数の波が成長する.

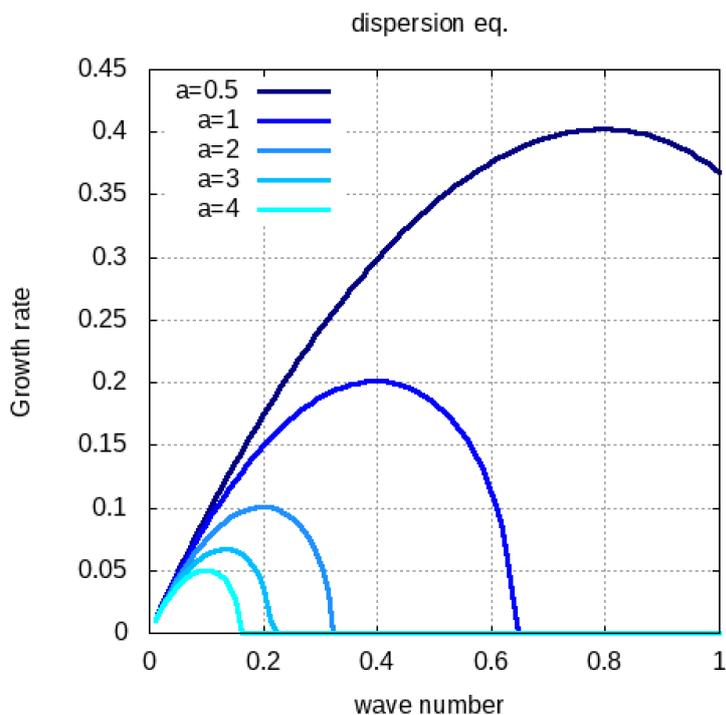


図 5.5:  $a$  の値を変えた場合の擾乱の成長率. 成長率が最大の波数は  $a = 0.5$  で 0.79,  $a = 2$  で  $k = 0.19$ ,  $a = 3$  で  $k = 0.13$ ,  $a = 4$  で  $k = 0.10$  となる.  $a$  の値が大きいくほど成長する波数域は狭くなり, 最大発達する波数は小さくなる.

## 5.4 解析解

二点折れ線モデルにおける解析解は、各固有値  $c$  に対応する固有関数  $\Psi(y)$  を求めることで与えられる。具体的には (5.16) が成立している場合に対して、境界条件 (3.20) と (3.24) を用いて定数を決定することで解析解が得られる。擾乱の流線関数は、

$$\psi' = \text{Re}[\Psi(y)e^{ik(x-ct)}] \quad (5.18)$$

であるので、求められた  $\Psi(y)$  を (5.18) に代入することで擾乱の空間構造が得られる。

このような手順で得られた解析解  $\Psi(y)$  は:

$$y > a : \quad \psi'_1 = \text{Re} \left[ \left\{ 1 + \left( \frac{2ka(U_0 - c)}{U_0} - 1 \right) \right\} e^{-k(y-a)} e^{ik(x-ct)} \right] \quad (4.19a)$$

$$-a < y < a : \quad \psi'_2 = \text{Re} \left[ \left\{ e^{k(y-a)} + \left( \frac{2ka(U_0 - c)}{U_0} - 1 \right) e^{2ka} e^{-k(y+a)} \right\} e^{ik(x-ct)} \right] \quad (4.19b)$$

$$y < -a : \quad \psi'_3 = \text{Re} \left[ \left\{ e^{-2ka} + \left( \frac{2ka(U_0 - c)}{U_0} - 1 \right) e^{2ka} \right\} e^{k(y+a)} e^{ik(x-ct)} \right] \quad (4.19c)$$

であり、それを図 5.6 に描いた。以下に示される擾乱の構造はすべて  $a = U_0 = 1$  の場合である。

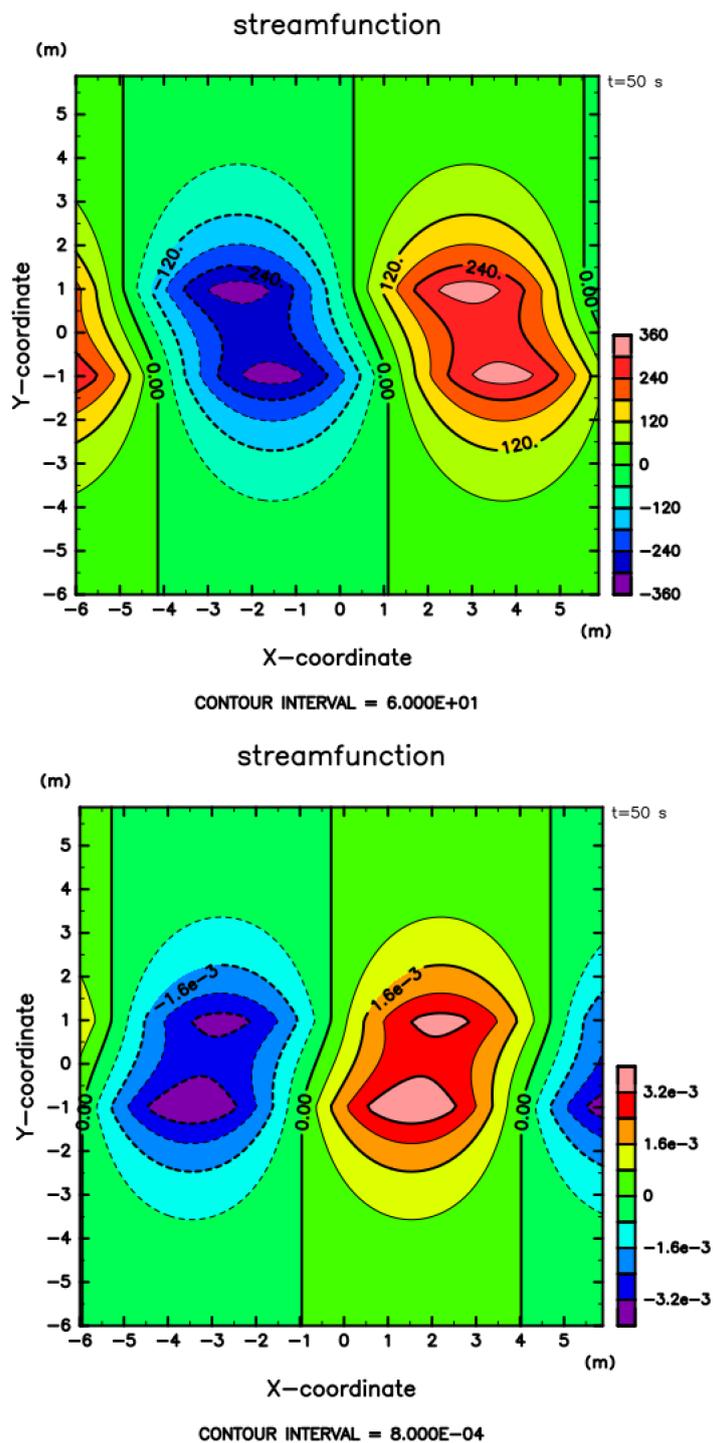


図 5.6: 上図:  $k = 0.63(c_i = 0.1877i)$  の不安定モードの流線関数. 下図:  $k = 0.63(c_i = -0.1877i)$  の安定モードの流線関数.

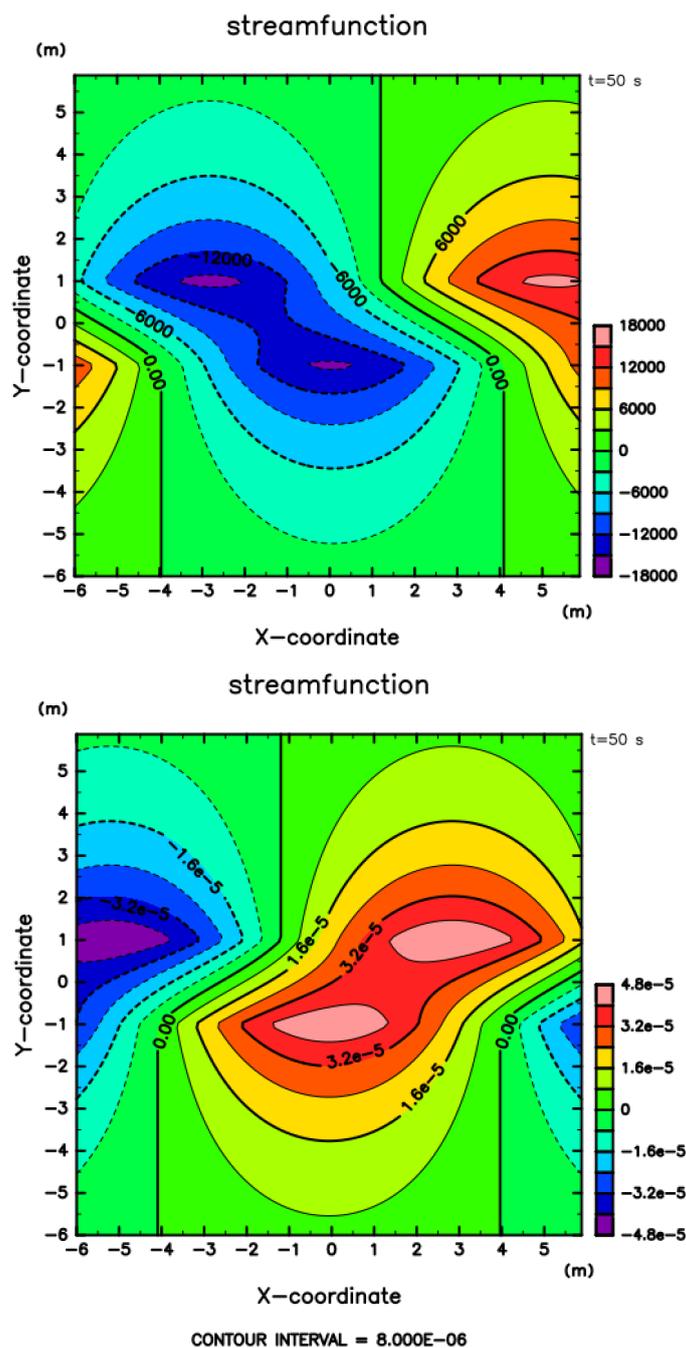


図 5.7: 上図:  $k = 0.39(c_i = 0.503i)$  の不安定モードの流線関数. 下図:  $k = 0.39(c_i = -0.503i)$  の安定モードの流線関数.

不安定な擾乱の場合, シアの存在する  $-1 \leq y \leq 1$  の領域で, その位相が基本流のシアと逆向きに傾いているのが特徴である. また, 成長率の大きな波数の擾

乱のほうが位相の傾きが大きくなる. これに対して, 安定な擾乱の構造は, 不安定擾乱を東西に折り返した構造になっている.

不安定擾乱の位相の傾きより, この擾乱に伴う運動量フラックスを

$$\overline{u'v'} = -\frac{\overline{\partial\psi' \partial\psi'}}{\partial y \partial x} \quad (5.20)$$

として推定できる.  $-1 < y < +1$  の領域では擾乱の位相が北西から南東向きに傾いているので, 基本的に  $\partial\psi'/\partial y$  と  $\partial\psi'/\partial x$  は正の相関関係を持つ. つまり, この領域では運動量フラックスが負であり,  $y = \pm 1$  より外側では 0 なので,  $y = +1$  付近では運動量フラックスの発散,  $y = -1$  付近では収束があることになる. 結果として, 不安定擾乱に伴う運動量フラックスの発散と収束は, 基本流のシアーを弱めるように働いている. つまり, 基本場の流れが不安定な場合に成長する擾乱は, その不安定性を解消するように働く空間構造を持つ.

また, 以下に中立波の流線関数の例を示す.

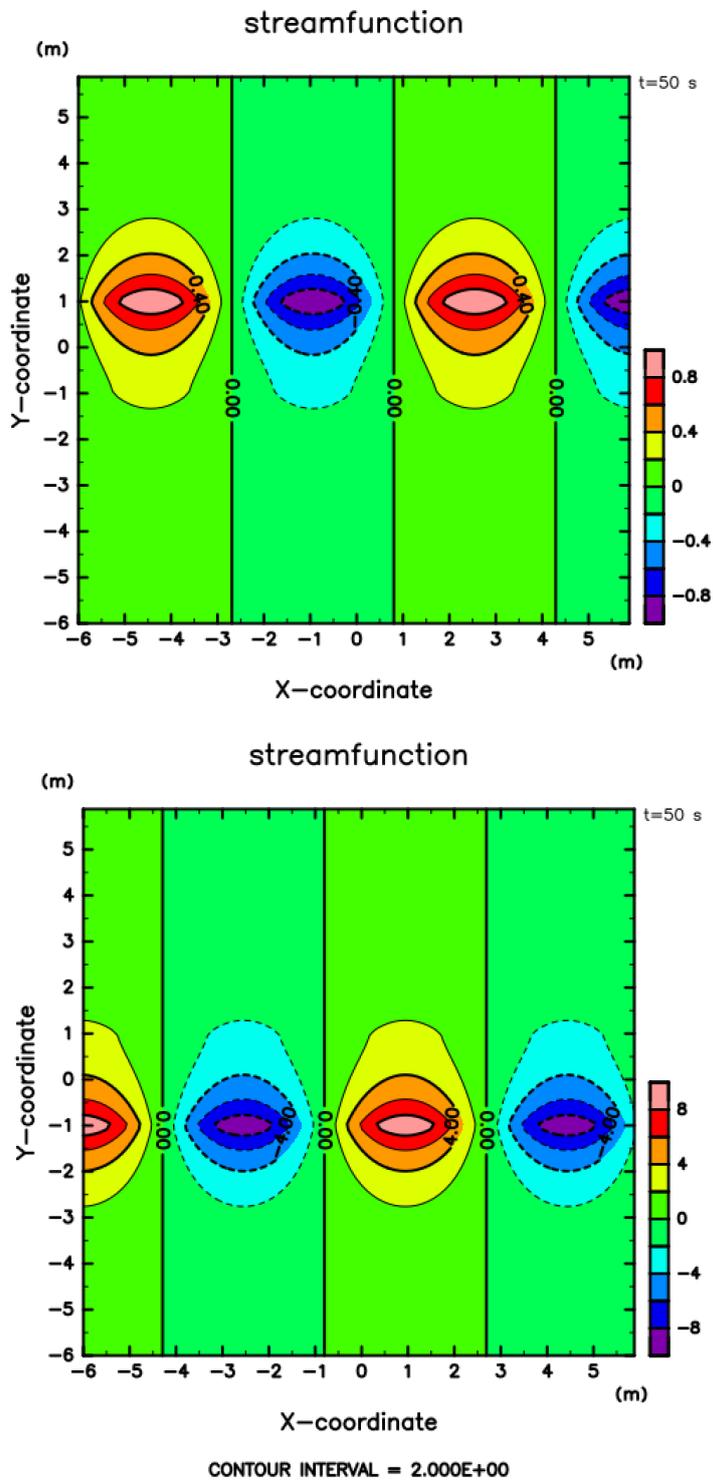


図 5.8: 上図: 波数  $k = 0.9$  で負の位相速度  $c = -0.4349$  をもつ中立モードの流線関数. 下図: 波数  $k = 0.9$  で正の位相速度  $c = 0.4349$  をもつ中立モードの流線関数

中立擾乱の位相は南北に変化せず,  $y = 1$  または,  $y = -1$  付近で振幅が最大である. このような解析解を求めて不安定を考察することの発展として, 不安定問題を中立波の共鳴として捉える考え方が提案されている. つまり,  $y = +1$  と  $y = -1$  付近に存在する二つの中立波の位相速度が近い値になると, 相互作用して共鳴的に増幅するようになる.

## 第 6 章 中立波の共鳴による シア不安定

### 6.1 渦位の保存

第 5 章では, 固有値問題を解くことで, 系が安定か不安定かを調べた. この方法では不安定が起こるメカニズムの物理的理解はできないので, そのためにラグランジュ保存量である渦位  $Q$  に注目する.

二点折れ線モデルの  $y = -a$  と  $y = a$  における波形の変移を考える.  $y = a$  において, 流体粒子の全渦位が保存されることを考慮し, 擾乱の渦位を考えると, 図 6.1 に示すようにパターンが  $x$  負方向へ伝播することがわかる. 同様に  $y = -a$  において考えると, 図 6.2 に示されるようにパターンは  $x$  正方向へ伝播することがわかる.

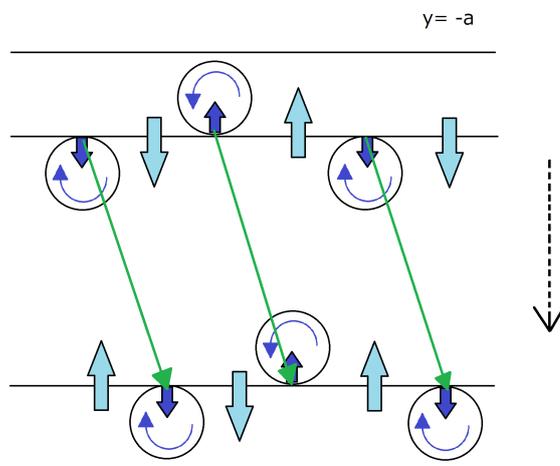


図 6.1:  $y = a$  における流体パーセルの渦位の保存を考える. パーセルが  $y$  方向に微小に変位することを考えると, 図の上側では場の渦位が小さく, 下側は大きいので, パーセルが回転し  $x$  負方向へ伝播することがわかる.

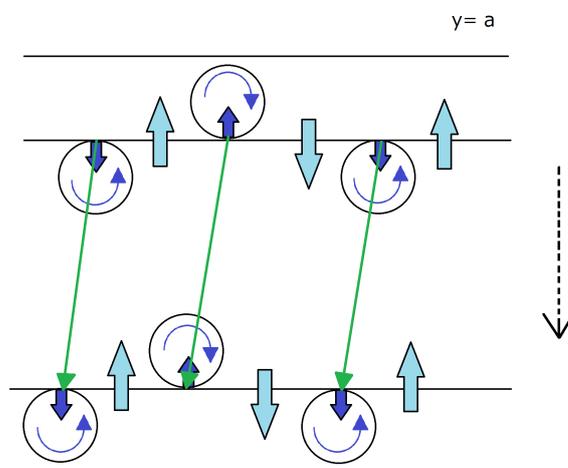


図 6.2:  $y = -a$  における流体パーセルの渦位の保存を考える. パーセルが  $y$  方向に微小に変位することを考えると, 図の上側では場の渦位が大きく, 下側は小さいので, パーセルが回転し  $x$  正方向へ伝播することがわかる.

また, 図 6.1, 図 6.2 からわかるように, 両者が適当な位置関係でずれて並んでいる場合には, 互いの波形の変移を強めあう位置関係になる場合があり, このような互いに強め合う位置関係は, 両者が互いに逆方向に伝播しようとする場合にのみ起こりうる.(図 6.3 参照) 擾乱が強め合うのに都合の良い位置関係を保つには, 擾乱は相対的に逆方向に伝播し, 基本場も含めて同じ速度で伝播する必要がある. 時間とともに擾乱の位置関係が変化するため, 基本場も含めて同じ速度で伝播しないと, 強め合う位置関係を維持できないのである.

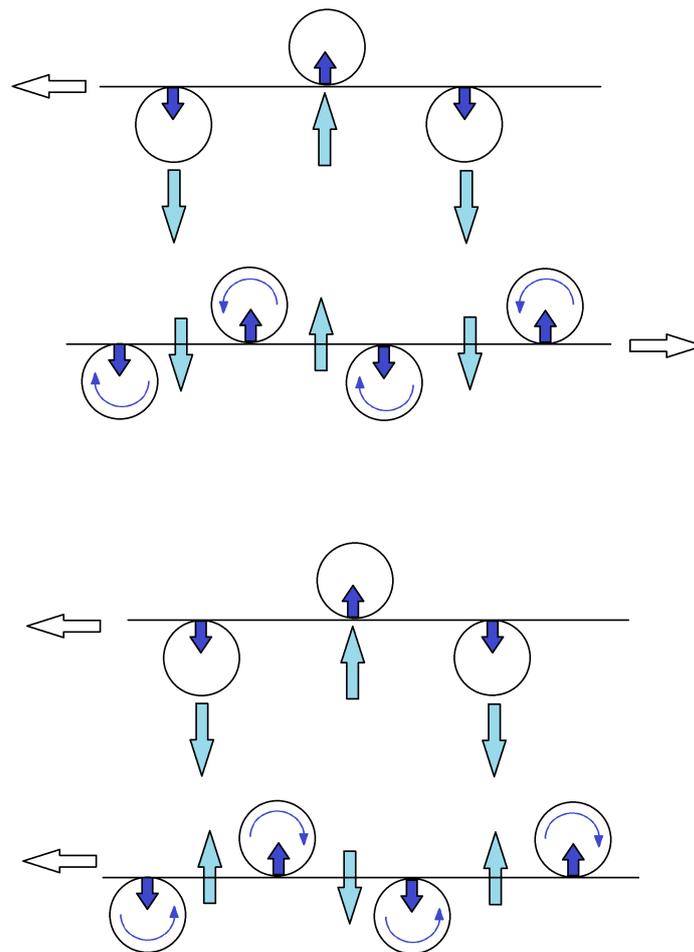


図 6.3: 擾乱が強め合うのは図の下側に示すように互いに逆方向に伝播する擾乱の組がある場合である.

以上より、擾乱を強め合う二つの条件が得らる。

- 不安定が起こるためには波が同じ速度で進まなければならないこと、つまり中立波の分散曲線が交わること
- 波自身の伝播方向はお互いに逆を向いていなければならないこと、つまり位相速度がその波が存在する場の流速の中間値をとるということ

しかし、擾乱の振幅が空間的に広がりを持つ場合、波が存在する場所の流速をどうやって決めるかという問題が出てくる。そこで擬運動量を導入する。

## 6.2 擬運動量

渦位保存の方程式は、

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{dQ}{dy} = 0 \quad (6.1)$$

であり、ここで  $Q$  は基本場の渦位、 $q'$  は擾乱の渦位である。(6.1) を  $dQ/dy$  で割り、 $q'$  をかけると

$$q' \frac{\partial}{\partial t} \frac{q'}{dQ/dy} + q' U \frac{\partial}{\partial x} \frac{q'}{dQ/dy} + v' q' = 0 \quad (6.2)$$

となり、さらに変形して、

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{q'^2}{2dQ/dy} + U \frac{\partial}{\partial x} \frac{q'^2}{2dQ/dy} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (v'^2 - u'^2) - \frac{\partial}{\partial y} (u'v') = 0 \quad (6.3)$$

となる。 $x$  方向に周期的であるとした場合、(6.3) は

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{q'^2}}{2dQ/dy} = -\frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \quad (6.4)$$

で、 $y$  方向にも積分すると

$$\frac{d}{dt} \int -\frac{\overline{q'^2}}{2dQ/dy} dy = 0 \quad (6.5)$$

となる。つまり、

$$M \equiv \int -\frac{\overline{q'^2}}{2dQ/dy} dy \quad (6.6)$$

という量が保存し, この保存量を擬運動量という. またその  $y$  方向のフラックスが,

$$F = \overline{u'v'} \quad (6.7)$$

で表されることがわかる.

不安定になる条件に擬運動量を用いると,

- 擬運動量は保存する.
- 擬運動量が振幅の 2 乗に比例する.

の二つの条件を同時に満たさなければならないことになる. 中立波は波の振幅が一定なので擬運動量は一定であり, 不安定波は波の振幅が時間とともに擬運動量の絶対値が増加してしまう. 中立波と不安定波を共存させるには擬運動量がゼロでなければならない. しかし, 一般的には擬運動量がちょうどゼロになることは考えにくいので, 二つの中立波をがあって片方が正, もう片方が負の擬運動量を持っていると, 両者の適当な振幅の比で重ね合わせると擬運動量の合計がゼロになりうる.

また, 適当に位相をずらして並べると, 負の擬運動量を持った波の振幅の大きな領域からフラックスが正の擬運動量を持った波の振幅の大きな領域に向かい, 負の擬運動量の部分はますます負に, 正の擬運動量の部分はますます正に大きくなり, 全体の振幅が増加しているといえる. これにより二つの中立波の共鳴により不安定を考えることができる.

波型の解を仮定した場合,

$$-ik(c - U)q' + \frac{dQ}{dy}v' = 0 \quad (6.8)$$

となり, この両辺に  $q^*$  をかけて

$$-ik(c - U)|q'|^2 + \frac{dQ}{dy}v'q'^* = 0 \quad (6.9)$$

となる. この両辺を  $dQ/dy$  で割って整理すると,

$$-ik(c - U)\frac{|q'|^2}{dQ/dy} = -v' \left( -ikv' - \frac{du'^*}{dy} \right) \quad (6.10)$$

$$= ik|v'|^2 + \frac{d}{dy}(v'u'^*) - u'^*\frac{dv'}{dy} \quad (6.11)$$

$$= ik|v'|^2 + ik|u'|^2 + \frac{d}{dy}(v'u'^*) \quad (6.12)$$

となる. これと複素共役との和をとると

$$-2ikc_i \frac{|q'|^2}{dQ/dy} dy = \frac{d}{dy} (v'u'^* - u'v'^*) \quad (6.13)$$

である. これを領域全体で積分すると,

$$2ikc_i \int -\frac{|q'|^2}{dQ/dy} dy = 0 \quad (6.14)$$

となり, 擬運動量の保存の式となる.

### 6.3 共鳴を起こすモードの特定

前節より, 不安定モードが2つの中立波動の共鳴で理解できる場合があるだろうことがわかった. ここでは具体的共鳴する中立モードを特定する手順を追う.

二つの中立波のうち片方のみが存在する「部分系」をつくり, その分散曲線・固有モードの構造を比較する. 2つの部分系の中立波の分散曲線が交わったところに不安定モードが存在すればこの不安定モードがこれらの中立波の共鳴として理解することができる.

二点折れ線モデルに対して, 二つの部分系を作り, それらの分散曲線を二点折れ線モデルの分散曲線と比較する. 以下にその基本場の流れを示す.

$$U = \begin{cases} U_0 & (y > a) \\ U_0 y & (y < a) \end{cases} \quad (6.15)$$

$$U = \begin{cases} U_0 y & (y > -a) \\ -U_0 & (y < -a) \end{cases} \quad (6.16)$$

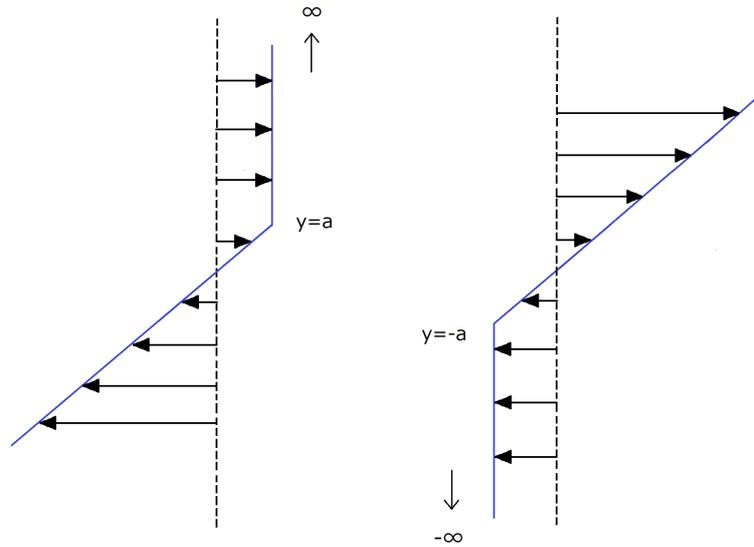


図 6.4: 二点折れ線モデルの二つの部分系. 左: (6.15) の基本場の流れ. この系では波が  $y = 1$  にトラップされる. 右: (6.16) の基本場の流れ. この系では波は  $y = -1$  にトラップされる.

図 6.4 の左側の系について, 境界条件より,

$$\begin{pmatrix} 1 & -e^{2ka} \\ -k(U_0 - c) & \{-(U_0 - c)k + U_0/a\}e^{2ka} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (6.17)$$

同様に, 図 6.4 の右側の系については,

$$\begin{pmatrix} e^{2ka} & -1 \\ \{k(U_0 + c) - U_0/a\}e^{2ka} & k(U_0 + c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (6.18)$$

である. これらより, 部分系の分散関係が得られ, それを図 6.6 に示した. 部分系の分散曲線は交差し, 不安定モードの分散曲線に接続する. 不安定が起こる場所は中立波の分散曲線の交点である. この場合は低波数側に不安定領域に存在しているため, 波数が小さいほうが相互作用を起こしやすい.

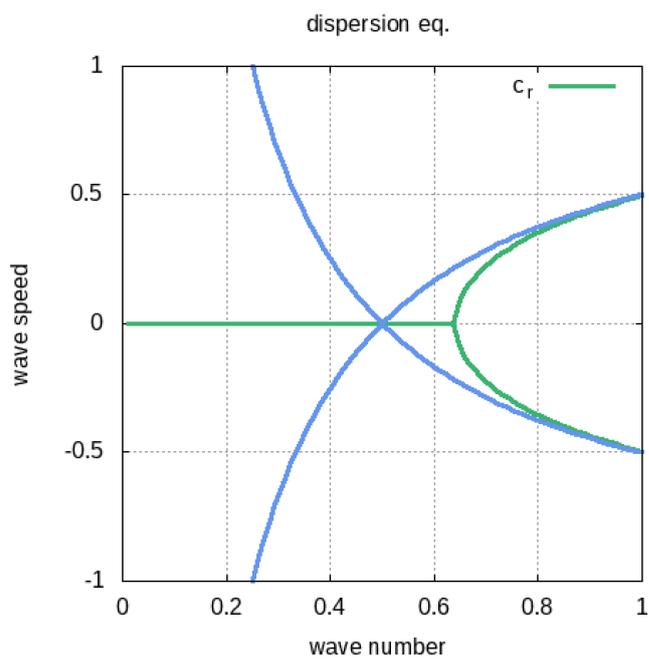


図 6.5: 青線は二つの部分系の中立波の分散曲線を示す. ここでは  $U_0 = a = 1$  とした.

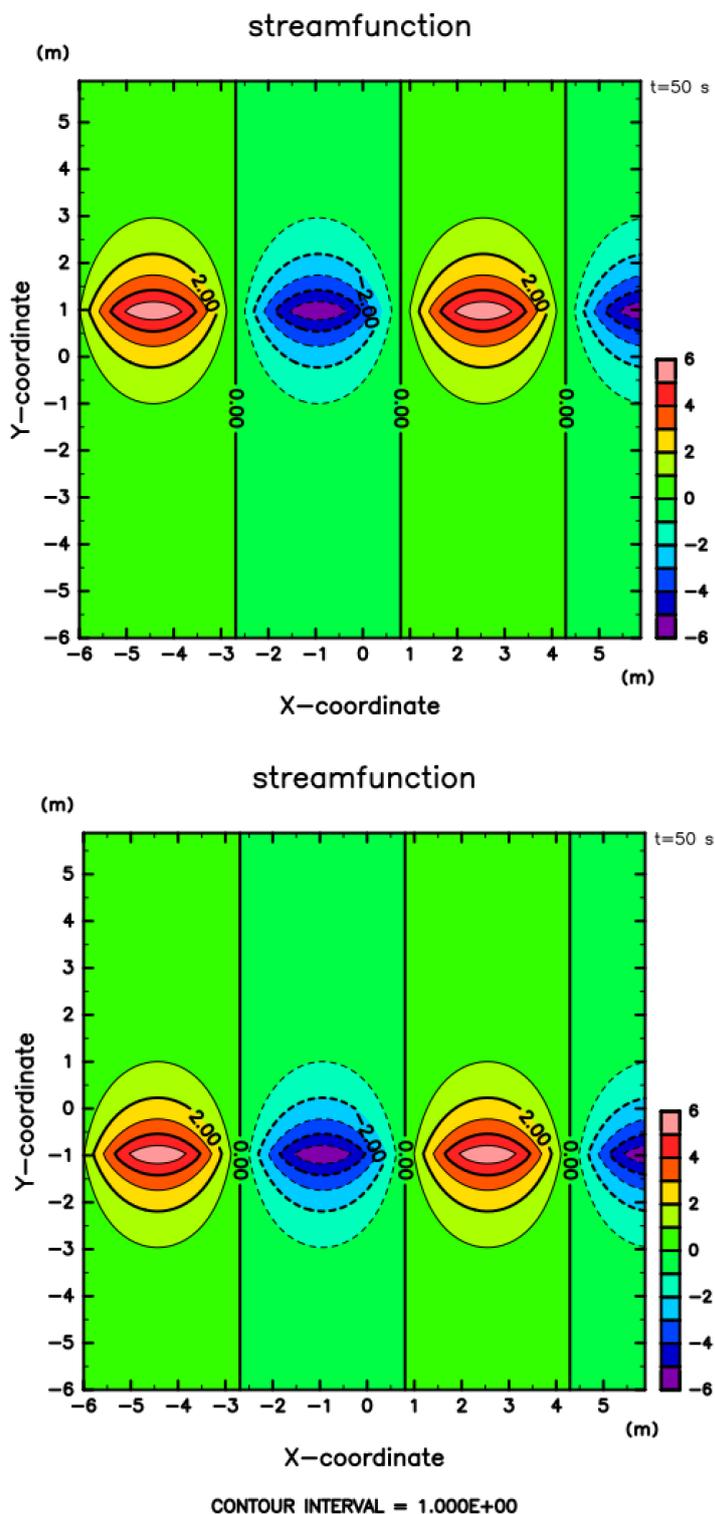


図 6.6: 上図: (6.15) の部分系の  $k = 0.6(c=-0.1667)$  における中立モード. 下図: (6.16) の部分系の  $k = 0.6(c=0.1667)$  における中立モード. 部分系における中立モードはそれぞれ  $y = 1$  と  $y = -1$  で振幅の極大値をとる.

不安定モードの構造は部分系における中立波を  $x$  方向に平行移動し, 重ね合わせた構造に似ている. すなわち, 不安定モードはその部分系における中立波間の共鳴 (相互作用) によって説明されうる. また, 部分系が作りにくい場合は, 分散曲線を描いたときに不安定モードにつながる中立波の対の分散曲線を探すことで, 共鳴を起こす中立モードを見つけられ, 不安定波はそれに接続する 2 つの中立波の共鳴による解釈が可能となる.

## 第7章 結論

本論文では、最も簡単で理想的な流れである区分的線形流れにおけるシア不安定について考察した。

まず平行シア流れにおける線形安定性解析を行った。波型の解を仮定することで、擾乱の指数関数的成長率は、

$$\sigma = kc_i$$

であり、不安定が起こる場合の基本場の条件を確認した。渦度方程式に運動学的境界条件と力学的境界条件を考慮することで、擾乱の分散関係式を求め、不安定モードが起こる臨界波数を求めた。また、解析的に固有値問題を解くことで不安定モードと安定モードの擾乱の空間構造を確認した。

また、不安定モードの位相の傾きから、擾乱の運動量フラックスの符号が決定されることを確かめた。基本場の流れの尖り付近で運動量フラックスの収束と発散が起こり、不安定モードは基本場のシアを弱めるような構造を持つ。それにより、基本場の流れの尖り付近に存在し、不安定にはちょうどよい位相速度を持つ二つの中立波の共鳴が必要であることがわかった。

二次元平行シア流れの不安定は、その部分系における中立波の共鳴により説明できる。部分系における中立波の空間構造を可視化し、分散曲線を描くことで、中立波の共鳴により不安定が起こることが確かめられた。

順圧不安定の簡単な場合について、中立波の共鳴として理解できることを示したが、この考えをより一般的な流れに適用するためには連続モードについての理解が必要である。また、線形化した方程式について擾乱の空間構造を確認したが、非線形の場合の擾乱の空間構造を求めるプログラムを作ることが課題として残っている。

## 付録 A 流体の連続の式, 運動方程式の導出

### 連続の式

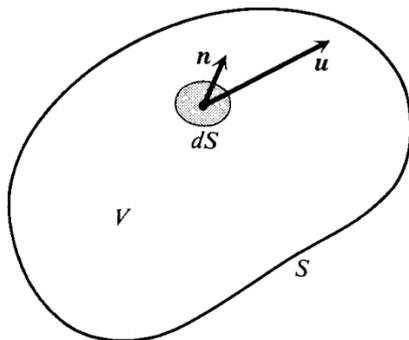


図 7.1: 閉曲面  $S$ , その面要素の面積を  $dS$ ,  $S$  の表面に立てられた外向き法線ベクトル  $n$ , 面  $S$  で囲まれた空間の体積  $V$ , 流体粒子速度  $u$  を表す図

流体内に空間に固定された閉曲面  $S$  をとり, その面要素の面積を  $dS$ ,  $S$  の表面に立てられた外向き法線ベクトルを  $n$  とし, 流体粒子の速度を  $u$ , 密度を  $\rho$  とする. また, 面  $S$  で囲まれた空間の体積を  $V$ , その体積要素を  $dV$  で表す.(図 7.1 参照) 面  $S$  で囲まれた流体に対して質量保存則を適用する. 単位時間当たりの  $V$  の質量は,

$$\int_V \rho dV$$

と表せる. これは単位時間に面  $S$  を通って  $V$  内に流入する流体の質量

$$- \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

と等しいはずであるので, ここで  $n$  は外向きベクトルであるため, 流れ込む流体に対しては負符号がついている. よって,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

である。ここで Gauss の発散定理により,

$$\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV$$

と書き換えられる。したがって上の方程式は,

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right\} dV = 0$$

と書ける。閉曲面  $S$  は任意にとることができるので、上式の被積分関数はゼロにならなければならない。したがって、流れのいたるところで

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

が必要かつ十分である。(A.1) は Lagrange 微分によって

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.2})$$

とも書ける。(A.1) または (A.2) を連続の式という。

非圧縮流体では、密度  $\rho$  は運動によって変化せず、

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

である。よって非圧縮流体において連続の式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.3})$$

のように簡単化される。

## 運動方程式

### 移流

$m$  を流体粒子の運動量密度 (単位体積当たりの運動量) とする。したがって、 $m = \rho v$  であり、ある体積の流体の全運動量は体積積分  $\int_v m dV$  で与えられる。ここで  $v = ui + vj + wk$  は三次元速度である。Newton の第二法則より、流体粒子の運動量の変化率は流体粒子に働く力に等しい。よって、

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho v dV = \int_v \mathbf{F} dV \quad (\text{A.4})$$

である。ここで  $F$  は単位体積あたりに働く力である。(A.4) を変形すると、

$$\int_v \left( \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{F} \right) dV = 0$$

を得る。体積は任意なので、被積分関数はゼロにならなければならない、

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F} \quad (\text{A.5})$$

または、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{\rho} \quad (\text{A.6})$$

### 圧力による力

ある体積の流体への圧力による力は流体の境界にわたる圧力の積分であり、

$$\hat{\mathbf{F}}_p = - \int_s p d\mathbf{S}$$

である。マイナスの符号は圧力による力が内向きであるために生じ、一方で  $S$  は表面に垂直で外向きのベクトルである。Gauss の発散定理を用いると、

$$\hat{\mathbf{F}}_p = - \int_v \nabla p dV$$

を得る。ここで  $V$  は面積  $S$  によって囲まれた体積である。したがって、単位体積当たりの圧力による力  $F_p$  は  $-\nabla p$  である。

流体の粘性がゼロである理想的な流体は、非粘性流体もしくは理想流体と呼ばれる。非粘性流体の運動方程式は Euler の方程式と呼ばれる。流体に対して、外力  $F$  が働いている場合、Euler の方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} \quad (\text{A.7})$$

である。

## 付録 B 渦に関する定理

### Kelvin の循環定理

流体の中に任意の閉曲線  $C$  をとり,  $C$  の接線方向の速度成分を  $u_t$  で表すとき,  $C$  を一周する線積分

$$\Gamma = \int_C u_t ds = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{B.1})$$

を閉曲線  $C$  に沿う循環という.

順圧完全流体の保存力場での運動を考える. 流体とともに動く任意の閉曲線  $C$  をとり,  $C$  にともなう循環

$$\Gamma = \int_C u_t ds = \int_C (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s})$$

の時間変化を調べる.  $C$  上の点の座標を  $\mathbf{x}$  で表すと,  $C$  の線要素  $d\mathbf{s} = |d\mathbf{x}|$  が流体とともに運ばれることを考慮して,

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \int_C (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}) = \int_C \frac{D}{Dt} (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}) \\ &= \int_C \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} \right) + \int_C \left( \mathbf{u} \cdot \frac{D}{Dt} d\mathbf{x} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

である. (B.2) の右辺第一項は, 運動方程式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F}$$

(ここで  $\mathbf{F}$  は流体に働く任意の体積力であり,  $\mathbf{F} = -\nabla\Omega$  を満たす保存力とする.) を用いると,

$$\begin{aligned} \int_C \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} \right) &= \int_C \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} \right) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_C (-\nabla P - \nabla\Omega) \cdot d\mathbf{x} \\ &= -[P + \Omega]_C = 0 \end{aligned}$$

となる. ここで  $[\ ]_C$  は閉曲線  $C$  を一周した時の  $[\ ]$  内の値の差を表す. また, (B.2) の右辺第二項は,

$$\int_C \left( \mathbf{u} \cdot \frac{D}{Dt} d\mathbf{x} \right) = \int_C \left( \mathbf{u} \cdot d \frac{D\mathbf{x}}{Dt} \right) = \int_C (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_C dq^2 = \left[ \frac{1}{2} q^2 \right]_C$$

となる. 以上より,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \left[ \frac{1}{2} q^2 - P - \Omega \right]_C$$

であり, 右辺はゼロとなり,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \tag{B.3}$$

したがって, 保存力場の下での完全流体の運動においては, 流体とともに動く任意の閉曲線にともなう循環は時間的に不変である. このことを Kelvin の循環定理という.

# 付録 C Iga (2012) の訳文

## 要旨

二つの中立波間の共鳴による不安定モードを説明する考えは、ポテンシャル渦度分布が一様でないシア一流中の不安定に適用される。シア不安定が起こる基本場の流れにおいて、共鳴して不安定モードを形成する中立波の組は、基本場のシアのため、基本場のポテンシャル渦度分布が一様でない限り数学的には存在しない。しかしながら、もし基本場のポテンシャル渦度が一様な場所に小さな窓の領域が作られたなら、基準中立モードは存在できる。窓の領域の中央に位置する中立波は、窓の領域の一端でその一回微分の不連続がもう一端で打ち消されるモードに一致し、それは隠れた中立波と考えられる。それは、臨界点でその一回微分が不連続でないが、窓の領域が限りなく狭い極限で  $(y - y_c) \log |y - y_c|$  の特異点をもつ連続モードと等しい。したがって、基本場のシア一流に隠された中立波を取り戻すための方法はここで提案される。基本場の流れの領域の上でポテンシャル渦度が一様な窓を動かすことにより、隠された中立波のすべての特性が現れる。この方法を適用することで、中立波の共鳴により  $\tanh$  型の速度分布を持つシア一流中の不安定が詳しく説明される。

キーワード: 臨界層, シア層, シア波

## 1 はじめに

気象力学と海洋物理学を含む流体力学において、平行シア一流の不安定は重要な問題であり、様々な状況について研究がなされてきた。線形不安定問題は数学的に固有値問題として成立し、その解を求めることは難しくはない。しかし、得られた解は複雑で物理的に理解することができない。

中立波間の共鳴により不安定モードを説明することは、そのような複雑な不安

定モードを物理的に理解するためにしばしば有用である (Cairns 1979). この考えをもっとも直接的に適用するには, 系全体の「部分系」を調べる. まず, それぞれの部分系の中立波を調べる. 部分系中の特定の波の位相速度が他の部分系中の波の位相速度と一致するとき, 部分系中で中立波として存在する波が共鳴し, 系全体では不安定モードをもたらす. 不安定モードを部分系中の中立波に分解することで, 不安定モードの特性を理解することが簡単になる. この考えを用いた例として, Sakai (1989) および Iga (1993, 1997), Iga & Ikazaki (2000) は二層問題において現れる複雑な不安定モードを明確に分類した.

しかしながら, いくつかの不安定問題では部分系を構築することが簡単ではない. そのような状況においてさえ, Hayashi & Young (1987) に示されるように, 不安定モードをもたらす中立モードの分散曲線を見つけることで, 系全体において共鳴し, 不安定を引き起こす中立波を確認できる.

上記の例はすべて通常の基準モードの共鳴で説明される. しかしながら基本場の流れのシアーは中立波の存在に確実に影響を及ぼす. Lin の定理 (Lin 1945) によると, 位相速度  $c$  が基本場の流れ ( $U(y_c) = c$ ) と一致する臨界点 ( $y = y_c$ ) での基準モードはポテンシャル渦度勾配がそこでゼロになるときのみ存在する. 実際は, 上記の例はすべて速度またはポテンシャル渦度が一様な特別な場合に分類される. 一般的には中立モードを見つけることは不可能である.

臨界層の不安定 (Bretherton 1966) は中立波の組が簡単に見つからないような不安定の例であるが, 中立波間の共鳴による臨界層の不安定の説明が Iga (1999a) に示されている. この場合, 基本場の流れがシアーを持つ場合 (Case 1960) に存在する臨界点において特異点を伴う連続モードが重要な役割を果たす. (連続的なスペクトルからなる特異モードを「連続モード」と呼ぶ.) Iga (1999a) は, 通常の基準モードをもう一方の特異点を伴う連続モードの束と共鳴するペアの片割れとして考えるときに, 一つの臨界層の不安定が中立波の共鳴により理解できることを示した.

しかしながら, 共鳴する中立波の候補として連続スペクトル (連続モードの束) を含めてもいくつかの不安定はまだ説明できない. この解析方法を上記に述べられ, 簡単な不安定問題の一つであり次章で議論される  $\tanh$  型の基本場の流れにおけるシアー不安定に適用できない. いくつかの状況におけるシアー不安定は中立波の共鳴により理解できる. その考えは Baines & Mitsudera (1994) によって, より一般的な場合に拡張された. しかしながら, その計算は臨界点の周りでポテンシャル渦度が一様である場合にのみ適用できる. 中立波を確認することは, ポテンシャル渦度が一様である領域内でより簡単に成し遂げられるが, ポテンシャル渦度勾配がゼロでない場合, 簡単ではない. 本論文では, この方法をそのようなシアー流中の不安定にも適応させることにより, 中立波間の共鳴による不安定のためのより一般的

な解析を確立することを目的とする。

$\tanh$  型の流れのような、滑らかな速度分布の基本場の流れにおいて、波数の増加に伴い不安定モードの成長率が減少し、ある波数でゼロになるとき、数学的に臨界点が存在する。そのため簡単な方法では大きな波数の連続モードを調べることはできない。これはここで考えている本質的な問題の根源である。連続モードの特性を考えることで、この問題の議論が続けられる。しかしながら、どのようにして大きな波数領域に不安定モードを拡張するかを調べるほかの方法がある：小さいがゼロでない粘性を考えることで、非粘性極限の流れとしてそのモードを議論できる。実際は似たような問題がこの取りかかりにしたがって 1960 年代に研究され、(例えば Tatsumi, Gotoh & Ayukawa 1964; Gotoh 1965) 教科書としてまとめられている。(例えば Drazin & Reid 1981) 一般的には非粘性流体のモードは、位相速度に正の虚数値をもつ成長モードでない限り、非粘性極限の流れにおけるモードと同じではない。非粘性流体の極限を考えると、大きな波数領域のモードは粘性がゼロの極限では、有限の減衰率を伴う減衰モードである；この極限においてそのモードは特異点を持ち、粘性係数が限りなく小さいときでさえ粘性に影響される。粘性の異なった影響により、それら二つの方法は大きな波数領域において、不安定モードと接続する異なったモードを導く。これはその二つの取り掛かりが、主に大きな波数のモードを構成する小さなスケールの擾乱を分解することの二つの異なった手段を提供することを意味する。なぜなら、モードを考えることは擾乱を分解する手段であるからである。

二つの異なった取り掛かりがあるため、現象を説明するのにより適切な方法を選ぶ必要がある。流体現象の一般的な説明において、現実の流体はゼロでない粘性を持つので、非粘性極限を考えると古典的な方法はその結果を直接現象と比べられるという利点を持っている。しかしながら、この研究で扱われる問題は、不安定モードを、1970 年代から適応されてきた非粘性流体における擬運動量 (または擬エネルギー) の保存に基づくこの概念と中立波間の共鳴によって理解することである。したがって、非粘性の極限を考えるとという方法は、そのモードが直接粘性に影響され、非粘性極限でさえ有限の減少率をもつ場合、少なくとも現在の問題に対しては簡単には適用できない。我々はこの連続モードを用いる方法をこの研究に採用し、より簡単な方法で擬運動量の保存に基づくこの考えを適用する。

Tatsumi *et al* (1964) もまたポテンシャル渦度が区分的に一樣な折れ線の速度分布の場合の分散関係を計算した。彼らの結果との一貫性をこの論文中の議論で確かめなければならない。

本論文は以下のような構成である。第 2 節ではシアー不安定に対して中立波の共鳴の考えを適用した時に現れる問題を示す。第 3 節で難しさを取り除く‘基本場の

流れに窓を開ける'方法を説明する. この方法の本質は第4節において固有関数の連続性の文脈で, 第5節において連続モードに関連して説明される. この確立された方法を tanh 型の分布のシア一流に適用し, 第6節で数値計算の結果を示す. 第7節では折れ線の速度分布の場合を解き, 現在の場合との関係を説明する. 最後に第8節で結論を述べる.

## 2 シアー不安定モードをもたらす中立波

コリオリパラメータ  $f = f_0 + \beta$  で回転する系における, 密度  $\rho_0$  で無限に広がる二次元流体の平行シア一流中の擾乱について考える:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} - f v' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + f u' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (7.3)$$

ここで,  $u'$  と  $v'$  は  $x$  方向と  $y$  方向の擾乱の速度,  $p'$  は擾乱の圧力,  $U$  は基本場の流れの  $x$  成分であり  $y$  の関数である.  $u' = -\partial\phi/\partial y, v' = \partial\phi/\partial x$  で定義される流線関数  $\phi$  を導入し,  $\exp[ik(x - ct)]$  の正弦波型の擾乱を考えると, 基礎方程式は,

$$(U - c) \left( \frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi \right) + \frac{dQ}{dy}\phi = 0 \quad (7.4)$$

となる. ここで,  $Q \equiv f - dU/dy$  であり, したがって  $dQ/dy = \beta - d^2U/dy^2$  である. 本論文では,  $\beta = 0$  の場合のみを考える. ある状況下では  $Q$  が不連続の場合がある. この場合, 不連続境界  $y_d$  において境界条件:  $(U - c)d\phi/dy + Q\phi$  が  $y_d$  をまたいで連続であることを適用する.

ここで, 図1に示す似通った基本場の流れの分布  $U(y)$  をした二つの場合を考える. 一つは  $U(y)$  の分布が区分的線形流れ:  $y < -1$  のとき  $U(y) = -1$ ,  $-1 < y < 1$  のとき  $U(y) = y$ ,  $1 < y$  のとき  $U(y) = 1$  である. もう一つは滑らかな tanh 型の流れ:  $U(y) = \tanh y$  である. それぞれは速度の差とシアーの領域の幅が一様なシア一流の単純なモデルの代表的なものである.

一つ目の場合 (図 1a) については, この問題は解析的に簡単に解ける (Vallis 2006). 基準モードの位相速度  $c$  は波数  $k$  の関数として導かれ,

$$c = \pm \frac{\sqrt{(1 - 2k)^2 + e^{-4k}}}{2k} \quad (7.5)$$

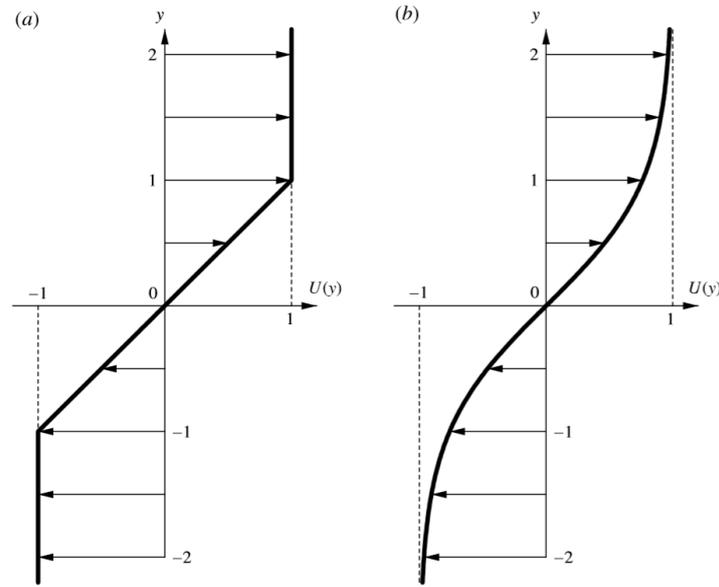


図 7.2: この論文で考察する二つの基本場の流れ. (a)  $U(y)$  の分布が区分的に線形な場合:  $y < -1$  で  $U(y) = -1$ ,  $-1 < y < 1$  で  $U(y) = y$ ,  $y > 1$  で  $U(y) = 1$  である. (b)  $\tanh$  型の流れの場合:  $U(y) = \tanh y$

となる. これは不安定モードと減衰モードが  $k < k_c$  に存在し, 二つの中立モードは  $k > k_c$  に存在することを示している. ここで  $k_c$  は臨界波数であり  $k_c \sim 0.6392$  である. 図 2 には  $k < k_c$  で  $c_r = 0$  のときに存在する不安定モードの分散曲線が描かれており, 中立モードの二つの分散曲線に接続されている. この場合, 簡単に部分系を構築することができる. したがって, それらの部分系における中立波を調べることで, この不安定を中立波間の共鳴として理解することができる. 部分系として一つの尖りだけをもつ基本場の流れの分布を二つ考える: (i)  $y < 1$  において  $U(y) = y$ ,  $y > 1$  において  $U(y) = 1$  (図 3a 参照), (ii)  $y < -1$  において  $U(y) = 1$ ,  $y > -1$  において  $U(y) = y$  (図 3b 参照). この場合の波の分散曲線と固有関数を調べ, もとの不安定モードのそれらと比較する. 図 2 においてそれらは破線で描かれている: 不安定モードが部分系の中立波の分散曲線の交差する点のまわりに存在することがわかる. さらに, 図 4(a-c) に描かれるように, 中立モードの固有関数を  $x$  方向に平行移動し重ね合わせることで不安定モードの構造を再構築できる: これはこの不安定が中立波間の‘相互作用’あるいは‘共鳴’によって認識されることを示唆している.

この場合, その分散曲線が不安定モードと接続する中立波の組を調べるためこの方法を適用できる: この方法はサブシステムを簡単には構築できない場合にも適用できる. 不安定モードの固有関数の構造と接続する中立波の固有関数を比較することで (図 4a,d,e), 中立波の固有関数を  $x$  方向に平行移動したり引き延ばしたりして重ね合わせることで不安定モードの構造を再構築できる. 一方で,  $U(y) = \tanh y$  (図

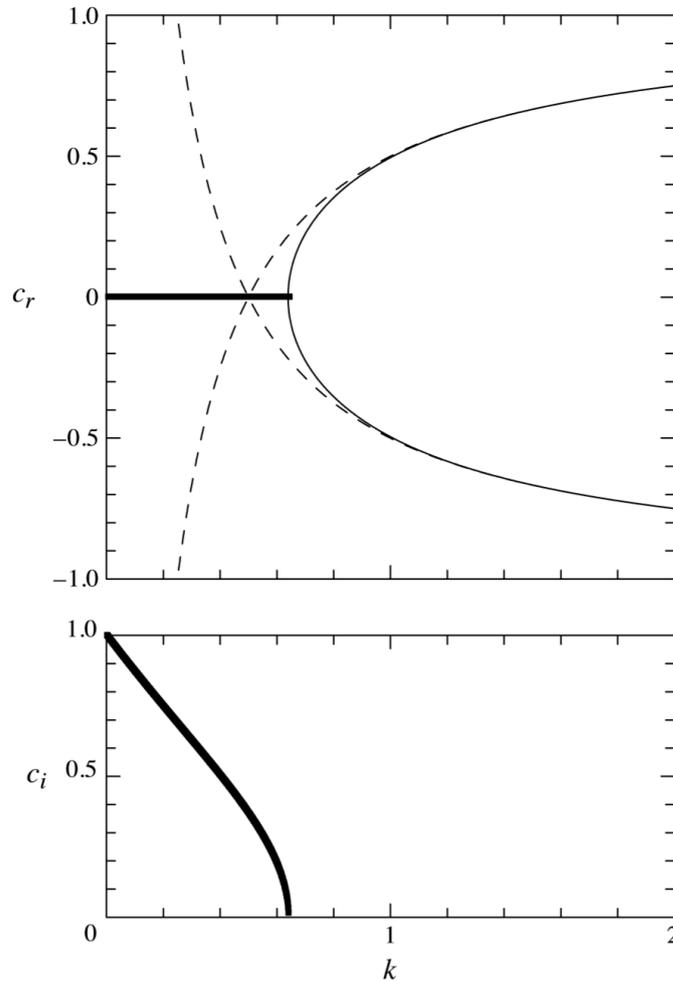


図 7.3: 区分的に線形な基本場の流れ (図 1a) の分散曲線. 不安定モードが  $k < k_c$  に存在し, 二つの中立波が  $k > k_c$  に存在する. ここで臨界波数の値は, 大体  $k_c \sim 0.6392$  である. 二つの中立波の分散曲線は  $k = k_c$  で合体し, 不安定モードの分散曲線に接続される. 破線は (図 3 の) 部分系中の中立波の分散曲線を示す.

1b) の基本場の流れの分布に対するシア不安定問題において, 波数域  $k < 1$  において不安定モードが存在することが知られている (Michalke 1964). しかしながら, 基本場の流れの分布は  $y < 0$  において  $Q'(y) < 0$ ,  $y > 0$  において  $Q'(y) > 0$  を満たすので, Lin の定理 (Lin 1945) よりゼロでない位相速度の中立波は存在しない: この問題において  $k < 1$  における不安定モードと  $k = 1$  における中立モードは基準モードだけである. したがって, 不安定モードをもたらす中立モードを見つけられない (図 5a). 基本場の流れにはシアがあるが, 臨界点において特異点をもつ連続モードは基本場の流れの範囲に渡って存在する (Case 1960)(図 5b).

図 6 は有限差分法によって数値計算で得られたこの問題の分散関係である:  $k < 1$

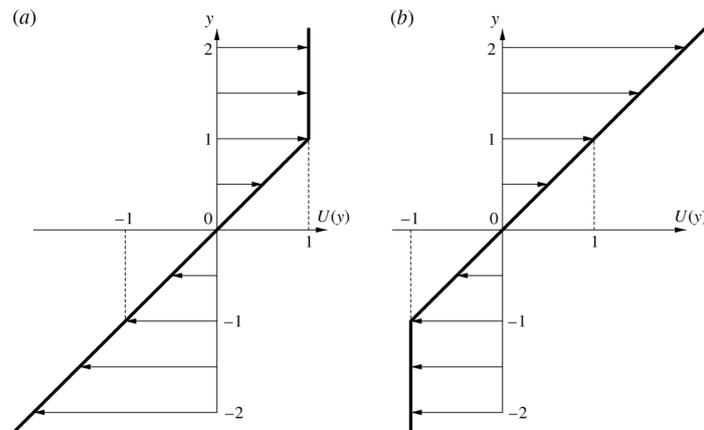


図 7.4: 区分的に線形な流れ (図 1) の二つの部分系. (a)  $y < 1$  で  $U(y) = y$  であり,  $y > 1$  で  $U(y) = 1$  の基本場の流れ: この系で波は  $y = 1$  にトラップされる. (b)  $y < -1$  で  $U(y) = -1$  であり,  $y > -1$  で  $U(y) = y$  の基本場の流れ: この系で波は  $y = -1$  にトラップされる.

の不安定モードのそばに,  $-1 < c < 1$  の範囲の中に離散化された連続モードを示す. この不安定モードをもたらす中立モードが一つだけの臨界層の不安定の場合, 連続モードの束を共鳴するペアの片割れとして考えることで (Iga 1999a), 不安定を中立波間の共鳴として理解できる. 類推により, その分散曲線が中立でないモードに接続するシア不安定は, 二つの連続モードの束間の共鳴によって考えるというアイデアが出てくる. 実際, 離散化された計算によって得られた分散曲線は, 二つまたは三つの離散化された分散曲線が不安定モードをつくるために合体するようであることを示す (図 6). しかしながらこの解釈は非常に難しいところがある. 離散化したときに不安定なモードにつながる連続モードは, 隣接している連続モードである. そしてそれらは  $c = 0$  において, 有限差分間隔が限りなく小さい極限をとることで, 同じモードに収束する. 我々は共鳴するペアを見つけようとするが, それらのモードはまったく同じになってしまう. 我々は共鳴するペアとしてそれらの連続モード以外のモードを考えざるを得ない.

連続モード以外の共鳴する中立波のペアを見つけるのに最も深刻な問題は, 数値計算で基準モードを得られないことである. この問題を詳しく考えよう. もし不安定モードに接続する中立波のペアが存在したとき, 一つは  $k = 1, c = 0$  から始まり,  $k > 1, c > 0$  の領域に入るモードであり, もう一つは同じ点から始まり,  $k > 1, c < 0$  に入るモードである (図 5c). 前者は  $k - c$  平面において分散曲線は正の勾配であり ( $dc/dk > 0$ ), Iga (1999b) は  $dc/dk > 0$  のモードは負の擬運動量を持つことを示している. さらに,  $c > 0$  の領域内では, 基本場の流れ  $U$  と位相速度が一致する臨界点  $y_c$  が存在し, そこでは  $Q'(y_c) > 0$  が満たされる. 波のモードが負の擬運動量を伴って基本場の流れの領域に入るとき, 波の振る舞いは臨界点でのポテンシャル勾度勾配  $Q'(y_c)$  の符号に依存する:  $Q'(y_c) < 0$  のとき波のモードは不安定モード

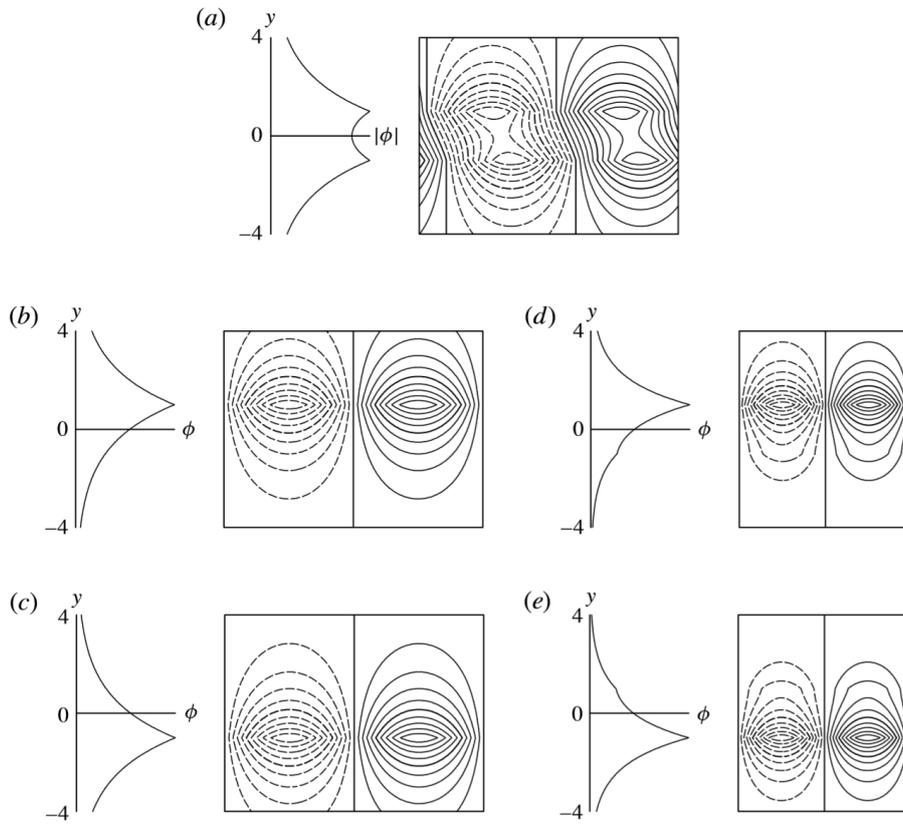


図 7.5: (a) 図 1(a) に示される基本場の流れの  $k = 0.6(c = 0.1877i)$  における不安定モード. (b) 図 3(a) に示される部分系の  $k = 0.6(c = -0.1667)$  における中立モード. (c) 図 3(b) に示される部分系の  $k = 0.6(c = 0.1667)$  における中立モード. (d) 図 1(a) に示される基本場の流れの  $k = 0.9$  において正の位相速度  $c = 0.4349 > 0$  の中立モード. (e) 図 1(a) に示される基本場の流れの  $k = 0.9$  において負の位相速度  $c = -0.4349 < 0$  の中立モード. (b) と (c) の中立モードは、それぞれ  $y = 1, y = -1$  で振幅のピークをもつ. 不安定モードの構造は、中立波を  $x$  方向に平行移動させ重ね合わせた構造に似ている: すなわち不安定モードはそれらの中立波間の共鳴で説明できる. 不安定モードの構造は二つの中立波 (d) と (e) を引き延ばして  $x$  方向に平行移動させて重ね合わせた構造にも似ている.

になり、一方で  $Q'(y_c) > 0$  のとき基準モードはなくなる (Iga 1999a). したがって、 $k > 1, c > 0$  を伴うモードは物理的に存在したとしても、基本場の流れの中ではなくなくなってしまふ. 同様に  $c < 0$  のモードもなくなり、実際はこの問題の中で不安定モードをもたらす中立波は存在しない.

上の考察から、以下のような考えに至る. 共鳴する中立波は物理的には存在するが、基本場の流れの中に隠れて数値的な解としては現れない. シアー不安定はそのような基本場の流れに隠された中立波間の共鳴として説明されるだろう. しかしながらこの考えを正当化するため、我々はほかの方法で隠された中立波を取り戻さなければならない.

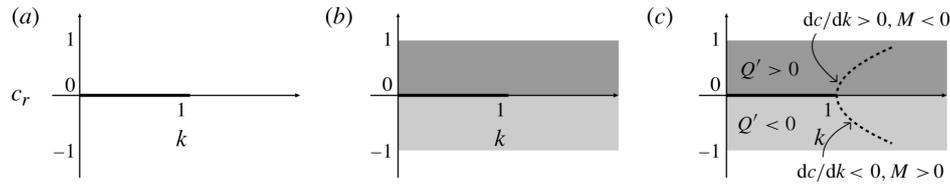


図 7.6: (a)  $U = \tanh y$  の基本場の流れにおける基準モードの分散関係の図. 波数  $0 < k < 1$  においてのみ  $c_r = 0$  の不安定モードが存在し,  $k > 1$  に基準モードはない. (b) 基準モードのそばの連続モードが示される.  $-1 < c_r < 1$  の領域に渡って連続モードは存在する. (c) 不安定モードをもたらす  $k > 1$  の分散曲線.  $c_r > 0$  の分かれ目は  $dc/dk > 0$  を満たすので, 負の擬運動量を持つ. この位相速度の領域では, 基本場の流れの速度が位相速度と一致する点において基本場の流れは  $dQ/dy > 0$  であり,  $c_r < 0$  の分かれ目では擬運動量は正であり, 基本場の流れは  $dQ/dy < 0$  である.

### 3 隠された中立波を取り戻す方法

中立波が存在すると考えるのは, 物理的にはもっともらしいが, 数学的にはそうではない. ではどうやってそれを理解すればよいのだろうか. Lin の定理は基本場の流れの中には, (ポテンシャル渦度がそこにおいてゼロになる場合を除いて) それに一致する位相速度の中立波は存在しないと主張している. それは, 基本場の流れの中に中立波が存在するように見えても, 基本場が中立波の存在を妨げる障壁のようにふるまうとして理解できる. すなわち, その障壁を取り除くことにより, 中立波を取り戻すことができるだろう.

次の問題は, どうやって障壁を取り除くかである. Lin の定理で示されるように中立波が存在するための条件を考えると, それには二つのアプローチがある. 一つは基本場の流れの分布がいくつかの値に制限されるように, 基本場の流れの分布を区分的に一樣な速度分布に変えることである. もう一つは, 臨界点における中立波が存在しうる場合を除くことに注意して, ポテンシャル渦度の分布が区分的に一樣になるように基本場の流れの形を変えることである. Taniguchi & Ishiwatari (2006) は一つ目の方法を赤道付近の  $\beta$  平面における浅水系のシアー流に対して適用した. しかしながら, 一般的にはこのように構築された基本場の流れの速度分布にはたくさんの不連続があり, それは意図しない不安定を生み出す. 二つ目の方法の場合, それ自身の速度分布に不連続はないので, そのような不安定が起きる可能性は低いが, ポテンシャル渦度は不連続である. したがって, ここでは二つ目の方法を用いて進めていく.

たとえば基本場の流れを区分的に一樣なポテンシャル渦度をもつように形を変えて障壁を取り除くことができても, まだ問題は残っている. 多くの波が伝播するメカニズムはポテンシャル渦度分布に依存している. したがって, ポテンシャル渦度

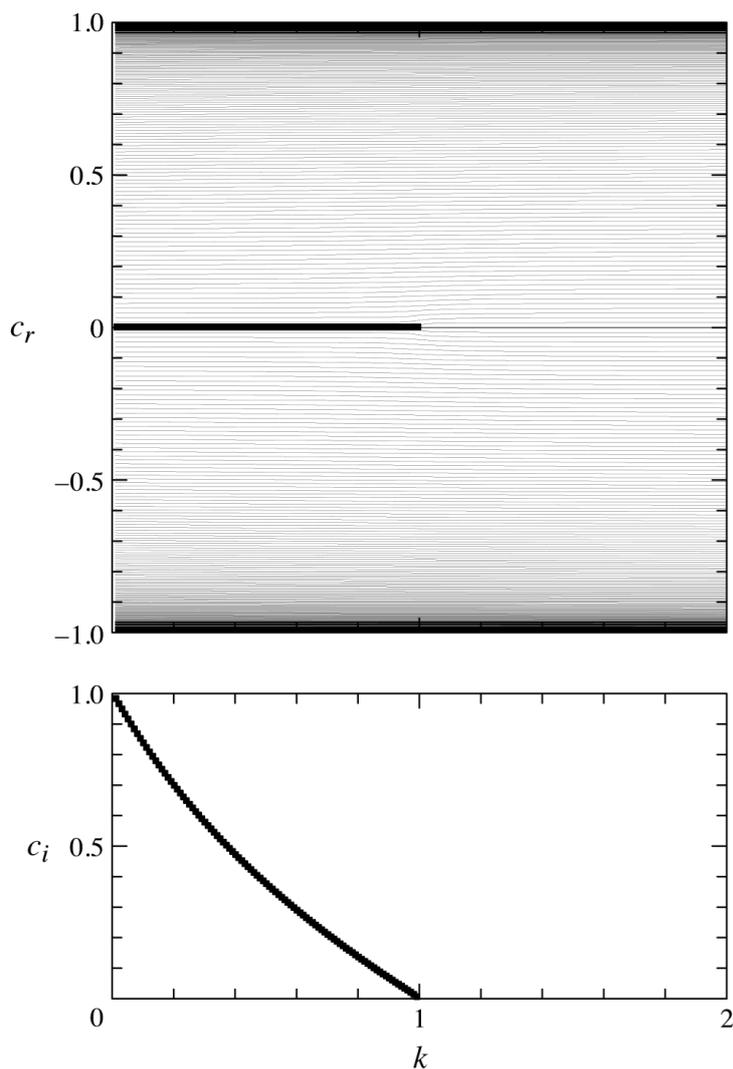


図 7.7: (a) 数値計算で得られた  $\tanh$  型の基本場の速度分布の分散関係.  $-8 < y < 8$  の領域で 1000 個の格子点の有限差分法を行った. 太線で示される不安定モードは  $k < 1$  に位置している. 薄い線で示される中立モードはすべて離散化された連続モードである.

分布を大胆に変えることは対象とする中立波の伝播の特徴を変えてしまうだろう. 例えば基本場の流れが  $\tanh$  型の分布のシアー流中では, もしポテンシャル渦度を完全に一様にしたら中立波は現れないだろう. 障壁で隠された波を見るためにはその障壁を取り除かなければならないが, この作業自体が中立波の存在に影響する: 取り戻された波は本来の波と異なっているかもしれないし, 消えてしまう場合もある.

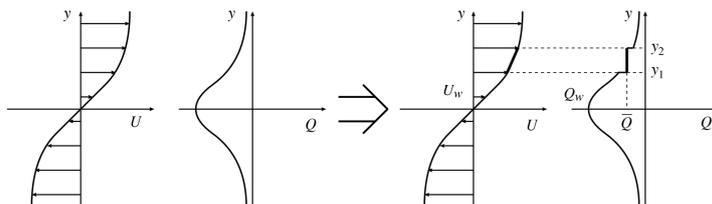


図 7.8: 基本場中に小さな窓の領域を開ける方法.  $y_1 < y < y_2$  の小さな領域のみで基本場の速度分布を線形に, またはポテンシャル渦度の分布を一様にする: つまりこの変形により, この窓領域内に中立波が存在できる.

この問題を解決するため, 以下の方法を適用する. なぜなら, 我々はその背後に波の性質があるすべての障壁を取り除くことで一度に完璧な見通しを得ようとするため, 障壁が実質的に変更されるからである. それゆえに, すべての障壁を取り除く代わりに, 障壁に隠された波に影響しないくらいに小さな‘観察窓’あるいは‘スリット’を開ける (図 7). 開ける窓を十分に狭くすることで, 影響が十分小さいと考える. 状況が変わることを最小限にするため, 窓の領域  $y_1 < y < y_2$  以外で, 本来の基本場の流れの分布  $U$  を保つ.  $\beta = 0$  の場合,  $y_1 < y < y_2$  の範囲で, 速度分布を  $y_1$  において速度  $U(y_1)$ ,  $y_2$  において速度  $U(y_2)$  に接続するような線形な速度分布に変更することで, 一様なポテンシャル渦度分布が得られ,

$$U_w(y) = U(y_1) + \frac{U(y_2) - U(y_1)}{y_2 - y_1}(y - y_1) \quad (3.1)$$

となる. ここで添え字  $w$  は変更された基本場の流れ, そして一致する解を表す. この小さな窓の領域内のポテンシャル渦度  $Q_w(y)$  は定数  $Q$  であり, それは (3.1) より

$$Q = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} Q(y) dy \quad (3.2)$$

を満たす. 当然このような方法で得られた隠された中立波はとても小さな領域のものだけである. しかしながらこの手順を繰り返し, 障壁のすべての部分について行い, 得られた結果を足し合わせることで隠された中立波の全体像が明らかになる. 障壁に小さな窓を開けることで中立波を取り戻すことを実際にやってみると, 一つの問題が浮かび上がる. 窓の領域における中立波の分散関係 (図 8) はあらゆる波数に対して中立波が存在することを示す. この現象は小さな窓が開けられたどこの場所でも起こる. 波の固有関数を示した図 9 は, 波のモードの位相速度が窓の領域の一端に近い場合, その固有関数は大きく変形させられることを示している. 窓の領域の端に影響されていない波のモードを取り出すため, その位相速度が窓の領域の中心に位置する中立波について調べよう.

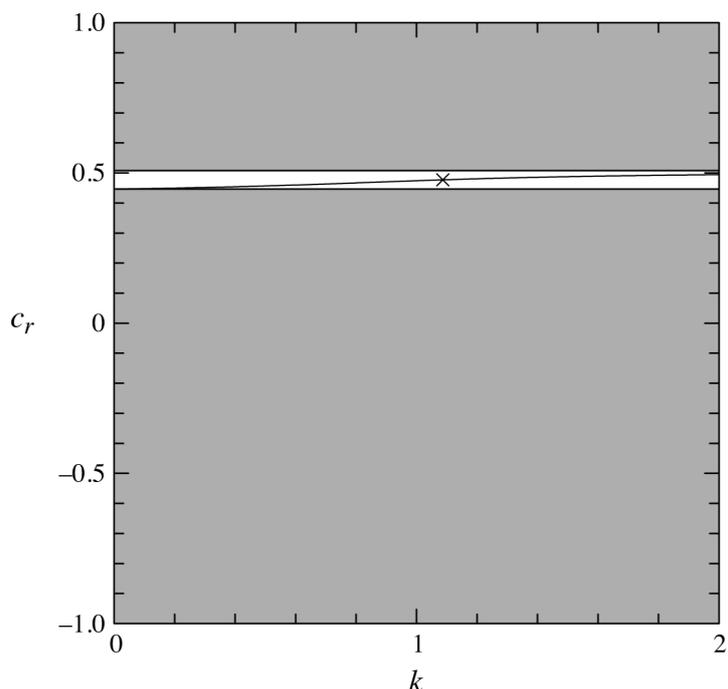


図 7.9: 数値計算で得られた窓の領域に現れる基準モードの分散関係.  $-8 < y < 8$  の領域で 1000 個の格子点があり, 窓の領域は 5 つの格子点を含む. 上に示されるのは窓の領域が  $0.48 < y < 0.56$  に位置している場合で, それに一致する基本場の流れは  $0.4462 < c_r < 0.5080$  である. この領域においてあらゆる波数に対して中立波が見つけれられる. 位相速度が窓の領域の中心に位置している点は  $\times$  の記号で示される.

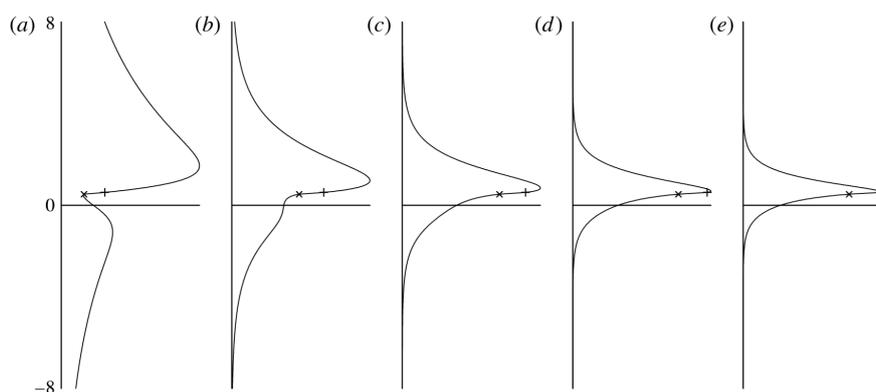


図 7.10: (a) $k = 0.2(c = 0.4496)$ , (b) $k = 0.6(c = 0.4599)$ , (c) $k = 1.09(c = 0.4772)$ , (d) $k = 1.6(c = 0.4894)$ , (e) $k = 2.0(c = 0.4945)$  における窓の領域内に現れる基準モードの構造.  $\times$  で示される  $y = 0.48$  と  $+$  で示される  $y = 0.56$  間の範囲が窓の領域と一致する. 位相速度が  $U = 0.4462$  または窓の領域の下端  $y = 0.48$  の基本場の流れに近づく  $k = 0.2$  と  $k = 0.6$  に対して,  $y = 0.48$  において速度の勾配は大きな不連続を持ち, 一方で位相速度が  $U = 0.5080$  または窓の領域の上端  $y = 0.56$  の基本場の流れに近づく  $k = 1.6$  と  $k = 2.0$  に対して,  $y = 0.56$  において大きな不連続を持つ.

## 4 定数ポテンシャル渦度の窓をまたぐ導出における不連続

前の節で構築された解の特性を細かく調べよう.  $\phi_w$  をその位相速度が窓の領域にある解とし, すなわち位相速度  $c$  は  $U(y_1) < c < U(y_2)$  を満たすとする. ここで  $y_1 < y < y_2$  は  $dQ_w/dy = 0$  である小さな窓の領域であり:

$$(U_w - c) \left( \frac{d^2 \phi_w}{dy^2} - k^2 \phi_w \right) + \frac{dQ_w}{dy} \psi_w = 0 \quad (4.1)$$

である. (4.1) の解  $\phi_w$  は臨界点の周りで極値をとらないが, その一回微分は大きくなる. 臨界点の両側での一回微分  $d\psi_w/dy$  に不連続があると推定する.

窓の領域を含む  $y_a < y < y_b$  の小さな領域を考えよう. すなわち  $y_a$  と  $y_b$  は  $y_a < y_1 < y_2 < y_b$  である. 限りなく小さい窓または  $y_1, y_2 \rightarrow y_c$  の極限における  $y = y_a$  と  $y = y_b$  での  $d\phi_w/dy$  の違いを推定する. (4.1) を  $U_w - c$  で割って  $y_1 - 0$  から  $y_1 + 0$  まで積分したとき,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\phi_w}{dy} \right]_{y_1-0}^{y_1+0} &= \int_{y_1-0}^{y_1+0} \left( k^2 \phi_w - \frac{1}{U_w - c} \frac{dQ_w}{dy} \phi_w \right) dy \\ &= -\frac{1}{U_w(y_1) - c} [Q_w]_{y_1-0}^{y_1+0} \phi_w(y_1) = -\frac{Q - Q(y_1)}{U_w(y_1) - U_w(y_c)} \phi_w(y_1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

を得る.  $y_1, y_2 \rightarrow y_c$  の極限を考えると, 限りなく小さな領域で  $Q = (Q(y_1) + Q(y_2))/2$  と見積もると,

$$\left[ \frac{d\psi_w}{dy} \right]_{y_1-0}^{y_1+0} \rightarrow \frac{Q'(y_c)(y_2 - y_1)}{2U'(y_c)(y_c - y_1)} \phi_w(y_c) \text{ as } y_1, y_2 \rightarrow y_c \quad (4.3)$$

のように計算できる. 一方で  $y_a$  から  $y_1 - 0$  の積分はどうなるかというと  $y \sim y_1$  の周りの寄与は重要であるので, この積分の大部分を

$$\left[ \frac{d\psi_w}{dy} \right]_{y_a}^{y_1-0} \rightarrow -\frac{Q'(y_c)}{U'(y_c)} \phi_w(y_c) \log(y_c - y_1) \text{ as } y_1 \rightarrow y_c \quad (4.4)$$

のように見積もることができる. 同じ方法で  $y = y_2$  の周りでの  $d\phi_w/dy$  の変化を

$$\left[ \frac{d\psi_w}{dy} \right]_{y_2-0}^{y_2+0} \rightarrow -\frac{Q'(y_c)(y_2 - y_1)}{2U'(y_c)(y_2 - y_c)} \phi_w(y_c) \text{ as } y_1, y_2 \rightarrow y_c \quad (4.5)$$

$$\left[ \frac{d\psi_w}{dy} \right]_{y_2+0}^{y_b} \rightarrow -\frac{Q'(y_c)}{U'(y_c)} \phi_w(y_c) \log(y_2 - y_c) \text{ as } y_2 \rightarrow y_c \quad (4.6)$$

のように見積もることができる.

$y_1, y_2 \rightarrow y_c$  の極限における窓の領域を超える不連続はこれらの合計で計算され,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\phi_w}{dy} \right]_{y_a}^{y_b} &= \left[ \frac{d\phi_w}{dy} \right]_{y_a}^{y_1-0} + \left[ \frac{d\phi_w}{dy} \right]_{y_1-0}^{y_1+0} + \left[ \frac{d\phi_w}{dy} \right]_{y_2-0}^{y_2+0} + \left[ \frac{d\phi_w}{dy} \right]_{y_2+0}^{y_b} \\ &= \frac{Q'(y_c)}{U'(y_c)} \phi_w(y_c) \left[ \frac{1-2r}{2r(1-r)} + \log \left( \frac{1-r}{r} \right) \right], \quad \text{where } r \equiv \frac{y_c - y_1}{y_2 - y_1} \quad (4.7) \end{aligned}$$

である.

(4.7) を用いて最後の節で表現されている特性を, 基準モードがあらゆる波数に対する小さな窓の領域内に存在するとして説明することができる. 我々は  $y < y_1, y_1 < y < y_2, y > y_2$  のそれぞれの領域に対してそれぞれ (4.1) を解くことができる. これら 3 つの領域の解が  $\phi_w$  の連続性と  $d\phi/dy$  の接続条件 (4.3) と (4.5) を満足するならば, これらはもとの問題に対する固有関数を構成する. ここで (4.7) の右辺は  $r$  の値を 0 と 1 の間で変化させることでどんな値も取りうる. したがって  $U(y_1)$  と  $U(y_2)$  の間の適当な  $c$  の値を選ぶ, すなわちそこで解が存在するときのみ, 3 つの領域で得られた解を接続できる.

しかしながら  $r$  が 0 もしくは 1 に近いとき, すなわち位相速度が窓の領域の両端に近い場合, 一回微分の不連続の合計はとても大きくなり, それは窓の周りで解が大きく形を変えさせられるということを示唆する. 不連続の合計がゼロになる条件は  $r = 1/2$  のときに見つえられる. 窓の領域の中心に位置する中立波を取り出すという前の節での選択は, その窓の領域の両端での一回微分の不連続が打ち消しあうようなモードを選ぶことに一致する. そのため  $r = 1/2$  は単に臨界点が窓の領域の中心に位置する場合である.

## 5 連続モードとの関係

窓の領域の無いもとの基本場の流れの分布に対して, 基本場の流れ中に, 位相速度のモード同様に連続モードが存在する. したがって窓の領域を開けることで取り戻された中立波は, 窓が限りなく小さい場合ある連続モードに近づく. その位相速度  $c$  が  $c = U(y_c)$  を満たす連続モードは 3 つの基本的な解の線形な組み合わせで表

現される (Lin 1961):

$$\phi_I = (y - y_c) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (y - y_c)^n \right] \quad (5.1)$$

$$\phi_{IIr} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (y - y_c) - \frac{Q'(y_c)}{U'(y_c)} \phi_I \log |y - y_c| \quad (5.2)$$

$$\phi_{IIi} = \begin{cases} \pi \frac{Q'(y_c)}{U'(y_c)} \phi_I & (y < y_c) \\ 0 & (y > y_c) \end{cases} \quad (5.3)$$

または

$$\phi_c = C_I \phi_I(y) + C_{IIr} \phi_{IIr}(y) + C_{IIi} \phi_{IIi}(y). \quad (5.4)$$

ここで  $\phi_I$  は通常モード,  $\phi_{IIr}$  は  $y = y_c$  で  $(y - y_c) \log |y - y_c|$  の特異点を持ち,  $\phi_{IIi}$  は  $y = y_c$  のその一回微分が不連続なところで特異点をもつ (図 10).

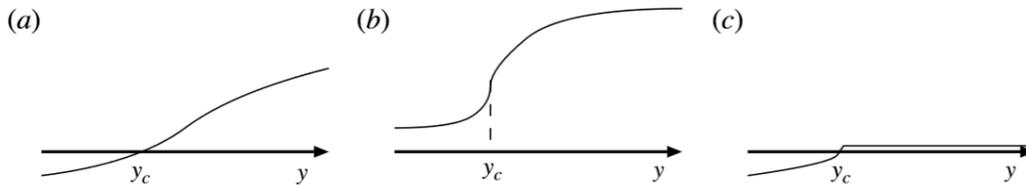


図 7.11: 連続モードを形成する 3 つの独立な解: (a)  $\phi_I$ ; (b)  $\phi_{IIr}$ ; (c)  $\phi_{IIi}$ .  $\phi_I$  が基準モードである一方で,  $\phi_{IIr}$  は  $y = y_c$  において  $(y - y_c) \log |y - y_c|$  の特異点を持ち,  $\phi_{IIi}$  は  $y = y_c$  においてその一回微分は特異点を持つ.

3 節で得られた解  $\phi_w$  に対して, 4 節で説明されるように窓の領域を超えての  $d\phi_w/dy$  の差は  $y_2 \rightarrow y_1$  の極限でゼロになる. したがって, この極限での一致する連続モードの一回微分は臨界点  $y_c$  を超えて不連続を持たない.  $\phi_I(y)$  は通常の答えなので, 不連続を持たない.  $\phi_{IIr}(y)$  に対して不連続の合計は

$$\left[ \frac{d\phi_{IIi}}{dy} \right]_{y_1-0}^{y_2+0} = -\frac{Q'(y_c)}{U'(y_c)} \log \left( \frac{y_2 - y_c}{y_c - y_1} \right) \quad (5.5)$$

を用いて計算され,  $(y_2 - y_c)/(y_c - y_1) = 1$  を選択するので, これもまたゼロになる.  $\phi_{IIi}(y)$  のみがゼロでない不連続をもち, それは:

$$\left[ \frac{d\phi_{IIi}}{dy} \right]_{y_1-0}^{y_2+0} = -\pi \frac{Q'(y_c)}{U'(y_c)} \phi_I(y_c) \quad (5.6)$$

である. したがって不連続性のない条件を満たす連続モードはゼロでない係数  $C_{II}$  を持たない, またはそれは

$$\phi_q(y) = C_I \phi_I(y) + C_{IIr} \phi_{IIr}(y) \quad (5.7)$$

のように表現される. 3節の方法で導出された中立波は,  $\phi_{IIi}$  のような微分においてその不連続な特異点を持たないが,  $\phi_{IIr}$  のような  $(y - y_c) \log |y - y_c|$  の形の特異点を持ちうる変更されていないもとの基本場の流れにおける連続モードに一致することがわかる.

## 6 数値計算

我々は第3節で提案された方法を  $\tanh$  型のシア一流 (図 1b) の不安定問題に適用することで, 隠された中立波の分散曲線を得た. 図 11 は, 基本場の流れの上を一樣なポテンシャル渦度の窓を動かして得られた隠された中立波の分散関係を点線で示す. 期待されるように,  $k > 1$  で  $c > 0$  と  $c < 0$  を伴い,  $0 < k < 1$  で不安定モードをもたらす分散曲線の組を見ることができる; つまりシア不安定が中立波間の共鳴により理解されることを示唆する.

図 11 において, その  $\phi_{IIi}$  成分がゼロである連続モードの位相速度は破線で示されている. 第 5 節では, 窓の領域の中央に位置するモードを取り出す方法は,  $\phi_{IIi}$  の特異点を持たない連続モードを選ぶことと等しいことを示した; つまり二つの異なる方法は, 確かにほぼ同様な分散曲線を導く.

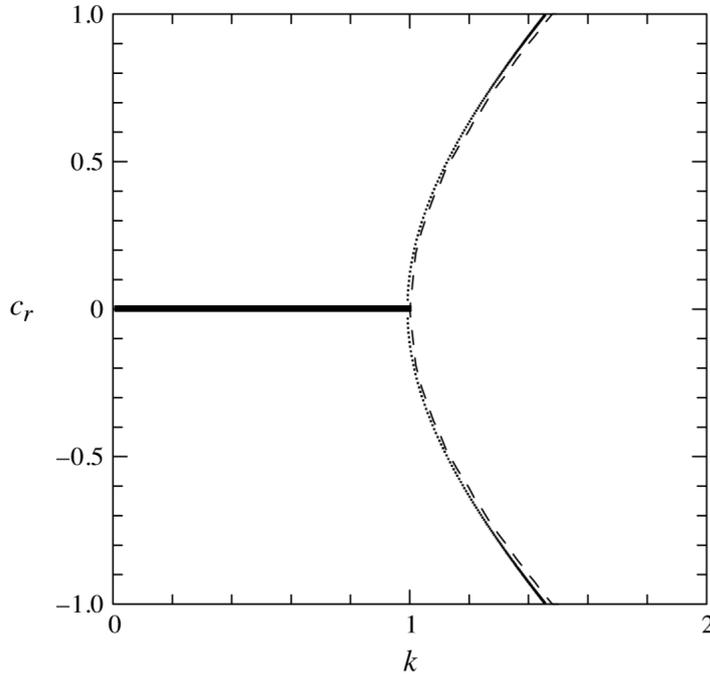


図 7.12: この論文で提案される方法で取り戻された隠された中立波の分散曲線. 数値計算について 1000 の格子点を  $-8 < y < 8$  の領域に設けている. 点線は一様なポテンシャル渦度の窓 (格子点 5 つを含む, または  $\delta y = 0.08$  の幅) を作り, 基本場の流れの上を動かすことで得られ,  $1 < k \lesssim 1.47$  の波数領域において現れ,  $0 < k < 1$  の不安定モード (太線で示す) に接続する二つの中立波モードを示す. 波線は  $\phi_{IIi}$  において特異点を持たない連続モードを示し, それは  $d\phi/dy|_{y=y_c}$  の違いの基準によって得られ,  $y = y_c$  の両側において計算さ外挿法によりゼロになる.

シア不安定が中立波間の共鳴により理解できることをより明白に説明するため, 図 12 は不安定モードと取り戻された中立波の固有関数を示す. 取り戻された中立波はそれぞれ  $y = 1$  と  $y = -1$  で大きな振幅を持つ. 不安定モードの構造は引き延ばして  $x$  方向に平行移動させた中立波の重ね合わせにととても似ており, この一致は不安定モードが中立波の共鳴によって説明できることを示している.

取り戻された中立波の分散曲線 (図 11) と不安定モードと中立モードの固有関数の構造 (図 12) の特徴は, 不安定モードに接続する中立波の分散曲線を容易に見つけられる区分的に線形な基本場の流れのそれら (図 2 と図 4) ととても似ている.

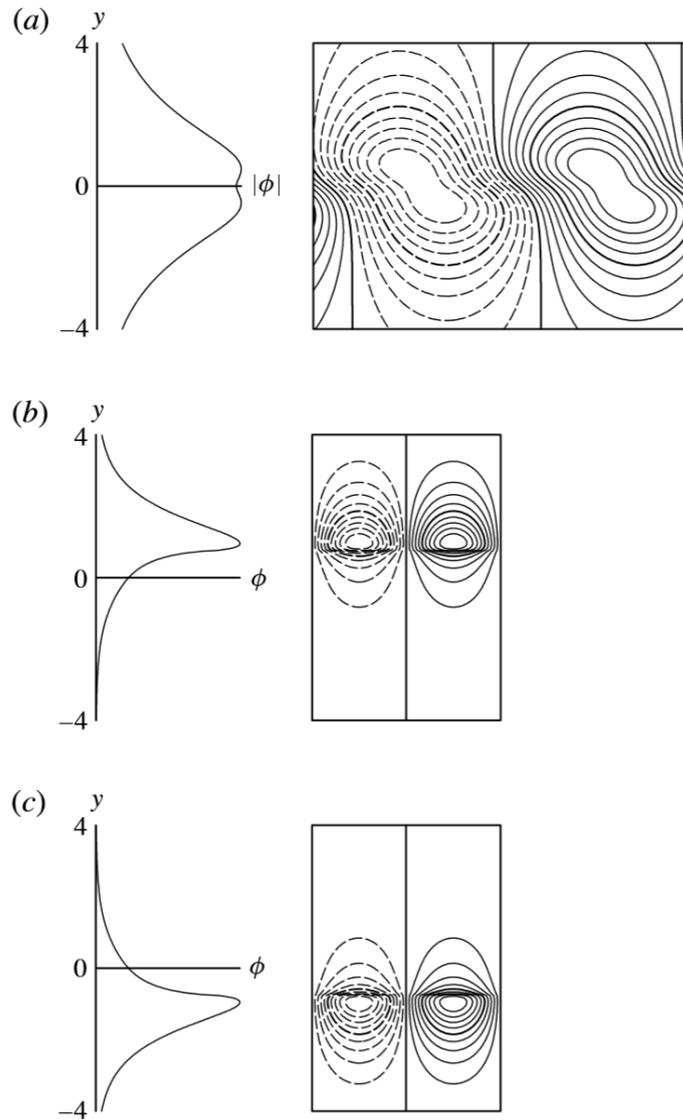


図 7.13: (a)  $k = 0.6$  ( $c = 0.2883i$ ) における不安定モード. (b)  $k = 1.2$  で正の位相速度  $c = 0.6315$  を伴う取り戻された中立波. (c)  $k = 1.2$  で負の位相速度  $c = -0.6315$  を伴う取り戻された中立波. それぞれのモードの固有関数  $\phi$  が示されている. 取り戻された中立波は振幅の最大値をそれぞれ  $y = 1$  と  $y = -1$  の周りに持つ. 不安定モードの構造は, 二つの中立波を引き延ばし,  $x$  方向に平行移動して重ね合わせた構造に似ている; これは不安定モードが中立波間の共鳴により説明されることも示す.

区分的に線形な基本場の流れにおけるシア不安定は, 1 つは  $y > 0$  の正のポテンシャル渦度勾配, もう一つは  $y < 0$  の負のポテンシャル渦度勾配による渦度波の組の間の共鳴により妨げられる. したがって, 取り戻された中立波は類推により似かよった物理的特性をもつと仮定することは最もらしい. 図 12(b) に見るように,

正の位相速度を持つ取り戻された中立波の振幅が最大となる点 ( $y_m$ ) は臨界点よりわずかに正の方向にずれている ( $y_m > y_c$ ).  $y_m$  を含む広い領域でポテンシャル渦度勾配は正であり, 渦度波をもたらす. この状況では  $U(y)$  は単調増加なので,  $y_m > y_c$  の関係は,  $c < U(y_m)$  であることを意味する. 最大振幅の点においてこの波の位相速度は基本場の流れの速度より小さいので, この波は本質的に負の方向へ伝播し, それは正のポテンシャル渦度勾配を持つ基本場の流れにおける渦度波の特性と一貫している.

区分的に線形な基本場の速度分布の場合と異なる特性もいくつかある: 最も明白な違いは, 取り戻された中立波の分散曲線が  $k \rightarrow \infty$  に広がらず, 有限の  $k$  の範囲で基本場の流れの範囲  $c \pm 1$  の極限に至る. 図 11 はその波数は  $k \sim 1.47$  ほどであることを示す. 以下では, この取り戻された分散曲線の振る舞いを考える.  $c \rightarrow \pm 1$  につれて  $y_c \rightarrow \pm\infty$  なので, この極限は臨界点がシアー域から離れている場合と一致する. 中立波が本質的な振幅を持つ領域は, 臨界点の周りに集中していることが考えられる. したがって,  $y = y_c$  の周りで  $U - c$  の項を線形的に近似し,  $dQ/dy$  の  $y = y_c$  における値を代表値とすることで, (2.4) を

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi + \frac{Q'(y_c)}{U'(y_c)(y - y_c)}\phi = 0 \quad (6.1)$$

と近似できる. これはこの問題が簡単な状況に変更されたことを意味する: つまり一様なポテンシャル渦度勾配をもつ一様なシアー流中の中立波を取り戻す問題となる. この場合, 波数は  $k = 1.0000 \times [Q'(y_c)/U'(y_c)]$  のように得られる. (付録を見よ.)  $U = \tanh y$  を考えるので,  $dU/dy = \text{sech}^2 y$  であり,  $dQ/dy = -d^2U/dy^2 = 2\text{sech}^2 \tanh y$  であり,  $Q'$  と  $U'$  の比率は,

$$\frac{Q'(y_c)}{U'(y_c)} = \frac{2\text{sech}^2 y_c \tanh y_c}{\text{sech}^2 y_c} = 2 \tanh y_c \rightarrow 2 \text{ as } y_c \rightarrow +\infty \quad (6.2)$$

となり, 波数を  $k \sim 2.0000$  のように見積もることができる.

$\tanh$  型のシアー流の場合, 無限遠で  $Q'/U'$  は有限の値に収束し, 波数  $k$  が  $c \rightarrow \pm 1$  の極限または基本流が存在する領域の境界において有限のままであることを説明できるが, 求められた波数の値は分散曲線で見えるものより大きくなる. 一様なシアーやポテンシャル渦度勾配の流れの場合, 得られた中立波の振幅は臨界点から離れるにつれて  $\phi \sim \exp(\mp ky)$  のように減衰する. しかしながら,  $\tanh$  型のシアー流の場合, その臨界点がシアーの領域が離れている ( $y_c \gg 1$ ) 中立波の振幅は,  $y \gg y_c$  (正の方向に遠い側) において  $\phi \sim \exp(-ky)$  のように減衰し,  $y_c \gg y \gg 1$  (シアーの領域から正の方向に遠いが, 臨界点からは負の方向に遠い側) において  $\phi \sim \exp(\sqrt{k^2 + 4y})$  のように減衰する. これは  $k$  の値の推定に影響を及ぼしうる. より良い推定のため, 基本場に対してより正確な近似をすることが必要である.  $y$  と  $y_c$  の大きな値に

対して

$$\begin{aligned} \frac{dQ/dy}{U-c} &= \frac{2\operatorname{sech}^2 y \tanh y}{\tanh y - \tanh y_c} \\ &\sim \frac{8e^{-2y}}{(1-2e^{-2y}) - (1-2e^{-2y_c})} = \frac{4}{e^{2(y-y_c)} - 1} = 2[\operatorname{coth}(y-y_c) - 1] \quad (6.3) \end{aligned}$$

であるので, (2.4) は

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi + 2[\operatorname{coth}(y-y_c) - 1]\phi = 0 \quad (6.4)$$

によって近似される. この近似から,  $k \sim 1.4996$  という値を得られ, (付録を見よ.) この値は分散曲線に示される値に近い.

## 7 折れ線速度分布の場合との比較

前の節では基本場の流れが  $\tanh$  型の速度分布に対してどうやって不安定モードに接続する中立波を取り戻すかを議論してきた. そのような流れにおける不安定を調べる場合, 一般的にはしばしば速度分布を代表的な点において分散型で接続する折れ線によって近似する. 一度折れ線からなる速度分布を考えると, そのポテンシャル渦度が区分的に一樣なので, 通常 of 基準モードが存在しないという数学的難題から逃れられる. Tatsumi *et al.* (1964) は  $\tanh$  型の速度分布の  $U(y_i)$  または分散的な点  $y_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) における渦度に接続する直線でできた基本場の速度分布を考え, その分散曲線を得た. 彼らは不安定モードに接続する分散曲線は  $k \rightarrow \infty$  の極限において, 中立波の分散曲線は  $U(y_i)$  から  $U(y_{i+1})$  に平行移動するだけなので,  $c_r \sim 0$  のように振る舞うことを示した; 表面上はこの特性はこの論文における我々の結果とは矛盾しているようである. この節では, 折れ線の速度分布の場合と, 前の節で示した結果の中立波の振る舞いの一貫性を調べる. まず, 折れ線の速度分布の基本場に対して分散曲線を求める: 我々は

$$U(y) = \begin{cases} -1 & (y < y_1) \\ \frac{U_{j+1}-U_j}{y_{j+1}-y_j}(y-y_j) + U_j & (y_j < y < y_{j+1}, j = 1, \dots, N-1) \\ 1 & (y > y_N) \end{cases} \quad (7.1)$$

の基本場の速度分布を考え (図 13), ここで,

$$\begin{cases} U_1 = 1 & y_1 = -\frac{N}{2} \\ U_j = -1 + \frac{2(j-1)}{N-1} & y_j = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+U_j}{1-U_j} \right), (j = 2, \dots, N-1) \\ U_N = 1 & y_N = \frac{N}{2} \end{cases} \quad (7.2)$$

である. 図 14 はいくつかの  $N$  の値について得られた分散曲線を示す.  $k = 1$  の周りの不安定モードに接続する分散曲線は,  $k \rightarrow \infty$  の極限で本当に  $c \rightarrow U_{(N/2)}, U_{(N/2)+1}$  のように振る舞う; つまり  $N$  が大きくなるとそれらは 0 に近づく. しかしながら, 以下で議論されるように似た特性を持った波が一つの分散曲線で表現される必要はないことを考慮すると, 不安定モードをもたらす二つの共鳴する中立波が  $c \sim 0$  を伴う二つのモードであることは示さない.

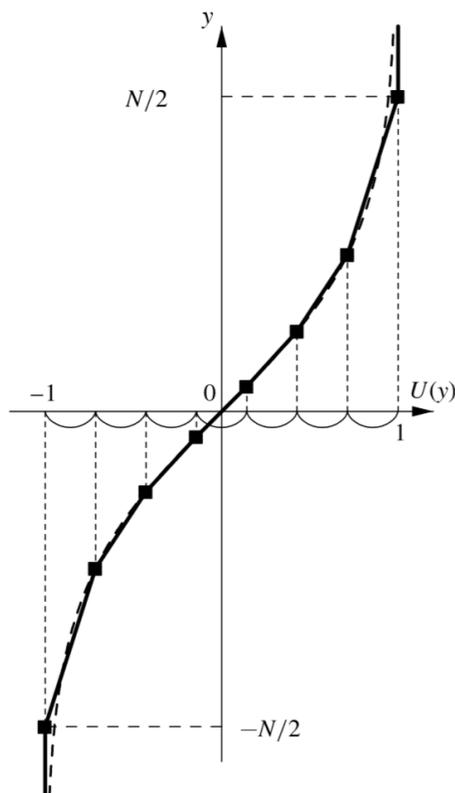


図 7.14: 折れ線で近似された基本場の流れの速度分布

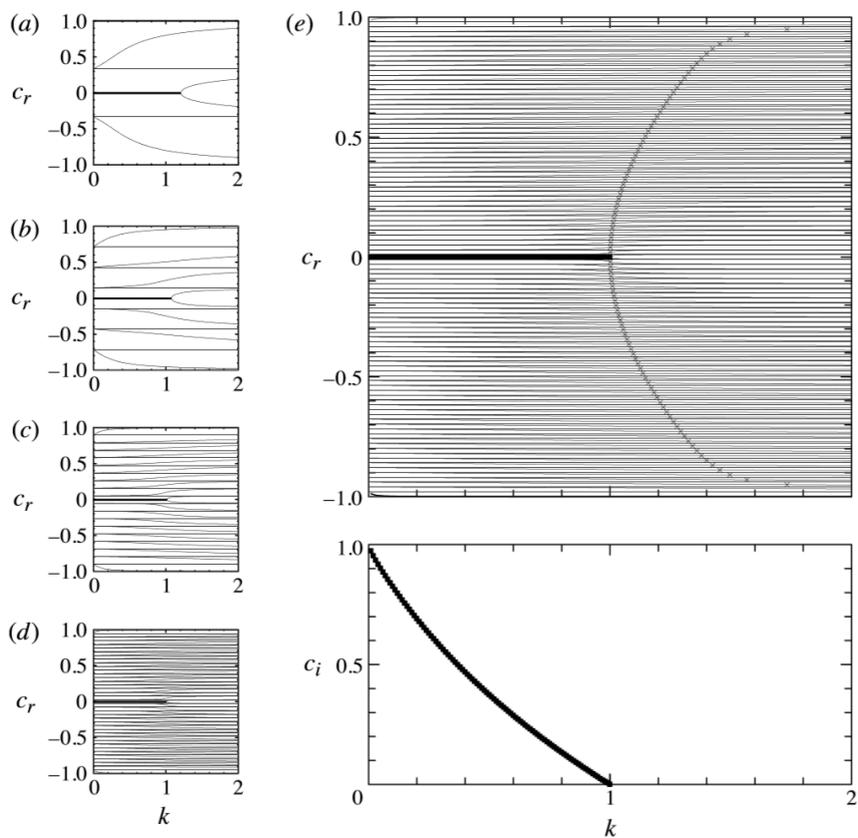


図 7.15:  $N + 1$  本の折れ線により速度分布が近似された基本場の流れの分散曲線:(a)  $N = 4$ ; (b)  $N = 8$ ; (c)  $N = 20$ ; (d)  $N = 40$ ; (e)  $N = 100$  のとき. 不安定モードは太線で示されている. それぞれの分散曲線は  $k \rightarrow 0$  と  $k \rightarrow \infty$  の極限で速度分布の一端における速度に近づく.  $N = 100$  の場合の図 (e) において,  $\times$  印は, 分散曲線が二つの隣接するモード間の位相速度の差の半分の距離平行移動した点を示す.

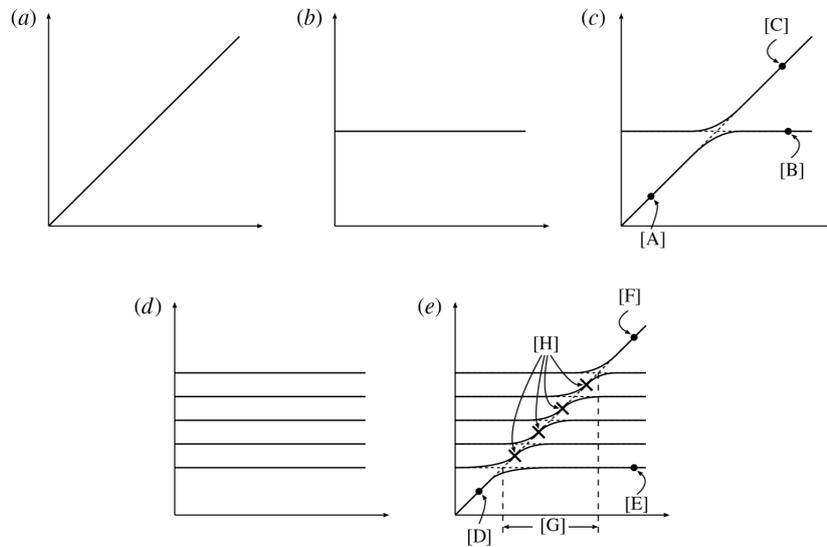


図 7.16: (a) 他のモードと相互作用しないとある中立波の分散曲線. (b) 他のモードと相互作用しないとあるほかの中立波の分散曲線. (c)(a) と (b) のモードがともに存在し、弱い相互作用をする場合の分散曲線. (d) 他のモードと相互作用しない、(a) 以外の中立モードの束の分散曲線. (e)(a) と (d) のモードがともに存在し、弱い相互作用をする場合の分散曲線.

その位相速度が一緒に近くに位置するふたつの分散曲線を考えよう. その擬運動量は同符号をとる. それらは相互作用しない場合は独立に存在する (図 15a, b). 同時に存在し、お互いに作用するときは、それらの擬運動量が同符号であるため不安定をもたらさないが、その分散曲線は‘入れ替わる’(図 15c). 図 15(c) において、小さな波数のモード [A] は同じ分散曲線のモード [B] のようにでなくモード [C] のように確認される; つまり、分散曲線ではモード [B] はモード [A] に接続しているが、その物理的原因を考えるとそれはモード [A] とは異なっている. さらに、一つのモードではなく位相速度が近いたくさんの中立波の束の相互作用するペアの片割れを考えよう (図 15d). この場合、入れ替わりは連続的に起こり、束の中のそれぞれの分散曲線はあるモードの位相速度からその隣の位相速度へと平行移動する (図 15e). 図 15(e) の場合もまた、小さな波数におけるモード [D] は、同じ分散曲線上にあるモード [E] ではなく、モード [F] のように確認される.

不安定モードをもたらす中立モードの組は折れ線の速度分布の場合の分散曲線より  $c \sim 0$  を伴う近いモードの組であると結論付けることは、モード [D] 同様に [E] モードを確認することに等しい. しかしながら、大きな波数においてはモード [F] をモード [D] と一致するように考えるので、入れ替わりが連続的に起こる波数領域においてモード [D] が一致することを確認することは単純ではない. (モード [G] を図 15e に示す.) しかしながらこの場合においてもそれを、図 15(e) でモード [H] に

よって示されるように、分散曲線が二つの近接するモード間の位相速度の差の距離の半分平行移動する場所を取り出すことで示すことができる。

この観点から図 14 を見直してみよう。  $N = 100$  の場合 (図 14e) の  $\times$  印は分散曲線がその半分の距離平行移動した点、または位相速度が  $c = (U_j + U_{j+1})/2$  となる点を示す。  $\times$  印で示された点は折れ線の端がまばらに分布する領域と一致する  $c \sim \pm 1$  を除いて図 11 とほぼ同じ曲線である。この結果は前の節の議論により得られたものと一致する二つの中立波が、折れ線の速度分布の場合もはじめに存在すると考えうることを確認するが、それらは近似された基本場の速度分布の端によってもたらされるたくさんの中立波と連続的に入れ替わる。相互作用する片割れがたくさんの通常の基準モードの代わりに連続モードの束である場合については Iga (1999a) に示されている。(論文の図 6b を見よ。) 我々は、この論文の前の節で議論されたシアー中に隠された中立波を取り戻す方法は、連続モードと入れ替わる中立モードを取り戻す簡単な方法であるという見方をする。

## 8 まとめ

$\tanh$  型のような一様でないポテンシャル渦度をもつ平均流中のシアー不安定に対して、中立波間の共鳴による不安定の理解を適用するため、シアー流中に隠された中立波を取り戻す方法を提案した。基本場の流れにシアーがあるとき、ポテンシャル渦度がゼロになるという特別な場合を除いて、臨界点を持つ中立波は存在しない。波が物理的な考察から存在すると期待される場合でさえ、この文脈のため、一般的にそのモードは数学的に存在しない。しかしながら、我々は中立波がシアーに隠されているという考えのため、それを取り戻すための方法を示した: それはポテンシャル渦度を一様にするため、基本場の流れの一部分を変え、他の大部分はそのままにして中立波が存在しうる窓の領域に現れる中立波を調査し、基本場の流れの領域にわたって同様に行うことで全体の分散曲線を取り戻す。

窓の領域に現れる中立波は位相速度がその領域の端に近い場合は大きく形を変えられている。そのため窓の領域の中心に位置する中立波を選んだ。これは窓の一端でのその一回微分の不連続がもう一端で打ち消しあうような解を選択することに一致する。それは、窓の領域の幅が極めて小さいときに特異点  $(y - y_c) \log |y - y_c|$  を持つが、一回微分が臨界点で不連続を持たない連続モードを選ぶことに一致する。

$\tanh$  型のシアー流における不安定モードの構造は、この方法で得られたポテンシャル渦度勾配がゼロでないシアー中に隠された中立波を引き延ばしたり  $x$  方向平行移動した重ね合わせに似ていることが示された。この方法を適用することは、

不安定モードを導く中立波が見つからないので, 中立波の共鳴の物理的概念による説明を適用できないポテンシャル渦度が一様でないシア一流の不安定を理解することを可能にする.

この論文では背景場に隠された中立波間の共鳴によって不安定が理解できることを示した. この方法は平行シア一流中の中立モードの分析にも使うことができる.

## 謝辞

本研究を行うにあたって、指導教官である林祥介教授には研究内容の指針を示していただき、高橋芳幸准教授には研究全体について細やかなご指導をして頂きました。

また地球および惑星大気科学研究室の皆さまには本研究に関して、様々な相談をさせて頂き、助言して頂きました。ここに深く感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] Geoffrey, K. Vallis, 2017: Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-scale Circulation, 2nd edn. Cambridge University Press.
- [2] Keita Iga, 2012: Shear instability as a resonance between neutral waves hidden in a shear flow. Cambridge University Press.
- [3] 新野 宏, 1981: 順圧不安定の力学. 天気 1981年2月 vol.28, No.2.
- [4] 伊賀 啓太, 2003: シアー不安定の基礎,  
URL: [https://www.gfd-dennou.org/arch/gfdsemi/2003-09-08/iga\\_keita/](https://www.gfd-dennou.org/arch/gfdsemi/2003-09-08/iga_keita/)
- [5] 余田 成男, 2002: 第13章 順圧不安定,  
URL: [www.gfd-dennou.org/arch/gfdsemi//2002-03-25/yoden/note/dyn-met-C13/pub/dyn-met-C13.pdf](http://www.gfd-dennou.org/arch/gfdsemi//2002-03-25/yoden/note/dyn-met-C13/pub/dyn-met-C13.pdf)
- [6] 河合 佑太, 2011: 大気の波動運動パート2,  
URL: [http://itpass.scitec.kobe-u.ac.jp/~ykawai/project/wave\\_motion\\_2\\_0.1.pdf](http://itpass.scitec.kobe-u.ac.jp/~ykawai/project/wave_motion_2_0.1.pdf)