

平行シアー流における順圧不安定の考察

流体地球物理学教育研究分野 1593414S 白濱 理花

1. 研究対象

◆ シアー流とは

- 速度に差がある流れのこと
- 条件によって不安定となり、大気中の擾乱の起源となる



引用: <https://weathernews.jp/s/topics/201803/020135/>

◆ シアー不安定とは

- シアー流によって生じる不安定
- 流体力学において重要な素過程のひとつ

2. 研究動機と目的

* 簡単化のため 2次元順圧平行シアー流における順圧不安定を扱う (順圧流体: 密度が圧力のみに依存する流体)

順圧不安定の線形不安定解析は数学的には固有値問題に帰着

不安定は物理的にどのように理解できるのか?

先行研究: Cairns 1979, 中立波の共鳴による理解

順圧不安定が中立波の共鳴によりもたらされることを確かめる

3. 研究内容

◆ 取り扱う系

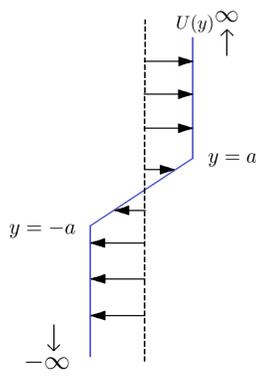
- 2次元
- 順圧流体
- 非粘性

◆ 二点折れ線モデルにおける線形不安定性解析

- 不安定波の成長率を調べる
- 不安定波の空間構造を可視化する

◆ 中立波の共鳴による不安定の物理的理解

- 部分系を構築し中立波の空間構造を可視化する
- 中立波の構造から、共鳴によって不安定を解釈する



二点折れ線モデルにおける基本流

4. 方程式系

二次元順圧流体における基礎方程式

運動方程式
 $\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p$
 連続の式
 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

二次元順圧渦度方程式

$$\partial_t \zeta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \zeta = 0$$

線形化: 変数を定常部分と擾乱に分離

$$(u, v) = (U + u', v') \quad \zeta = \bar{\zeta} + \zeta'$$

$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$: 二次元速度,
 $\zeta \equiv \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}$: 渦度,
 p : 圧力/密度,
 $U(y)$: 基本流の x 成分,
 $\Psi(y)$: 擾乱の振幅, k : 波数の x 成分, t : 時間,
 $c = c_r + ic_i$: 位相速度

擾乱についての渦度方程式

$$\partial_t \zeta' + U \partial_x \zeta' - v' \partial_{yy} U = 0$$

流線関数 ψ' の導入

$$u' = -\partial_y \psi', \quad v' = \partial_x \psi', \quad \zeta' = \nabla^2 \psi'$$

線形化された渦度方程式

$$\partial_t \nabla^2 \psi' + U \partial_x \nabla^2 \psi' - U_{yy} \partial_x \psi' = 0$$

波動解を仮定

$$\psi' = \text{Re} \Psi(y) e^{ik(x-ct)} \quad \begin{cases} c_i < 0 & \text{安定} \\ c_i = 0 & \text{中立} \\ c_i > 0 & \text{不安定} \end{cases}$$

Rayleigh 方程式

$$(U - c)(\Psi_{yy} - k^2 \Psi) - U_{yy} \Psi = 0$$

5. 分散関係

微分方程式の解の形を無限遠でゼロになるように仮定

$$y > a: \Psi_1 = Ae^{-k(y-a)}$$

$$-a < y < a: \Psi_2 = Be^{k(y-a)} + Ce^{-k(y+a)}$$

$$y < -a: \Psi_3 = De^{k(y+a)}$$

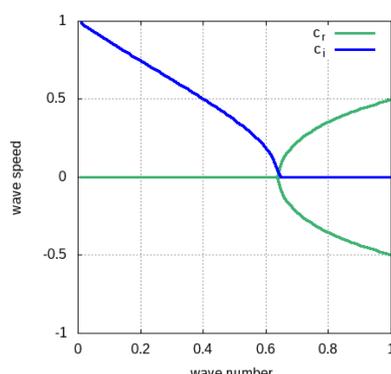
境界条件を適用

運動学的境界条件: 境界の変位と速度の関係

$$\frac{\Psi}{U - c} \text{ が境界で連続}$$

力学的境界条件: 圧力の連続性

$$(U - c)\Psi_y - U_y \Psi \text{ が境界で連続}$$



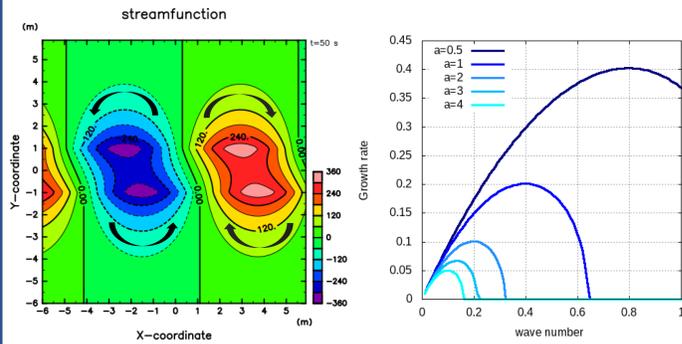
$a = 1, U = 1$ のときの分散曲線

緑線: 位相速度の実部 青線: 位相速度の虚部
 上図より, $k = 0.63$ を境にそれより小さい波数の波は不安定であることがわかる

二点折れ線モデルの分散関係式

$$c^2 = \left(\frac{U_0}{2ka} \right)^2 [(1 - 2ka)^2 - e^{-4ka}]$$

6. 不安定波の空間構造と擾乱の成長率



左: $x - y$ 平面の不安定波の空間構造 $k = 0.63$ のとき

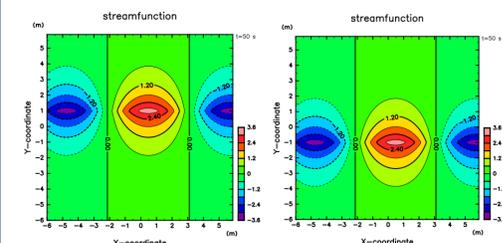
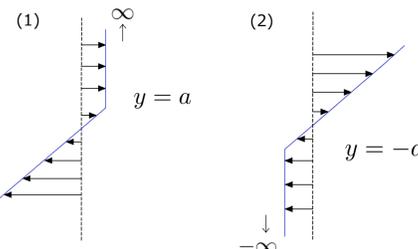
右: 成長率の a 依存性

$$\sigma = kc_i: \text{擾乱の成長率}$$

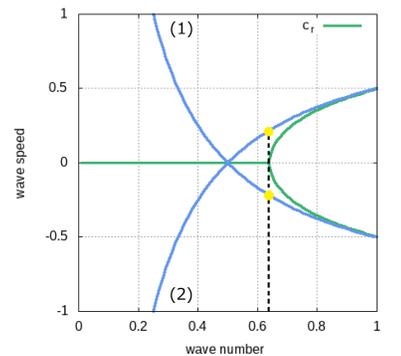
- 不安定波の位相は傾いている
- ある波数より小さな波が成長する
- 流速の変化する幅 $2a$ が大きくなると、成長する波数領域が狭くなり、より小さな波数のみが成長する

7. 部分系と中立波の空間構造

不安定が中立波の共鳴によることを確かめるため、部分系を構築する



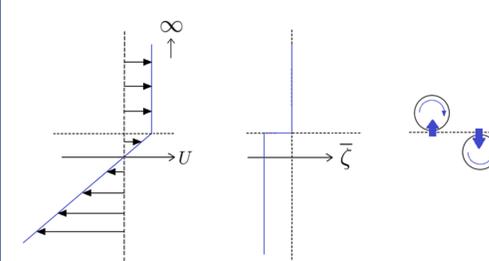
$a = 1, U = 1$ のときの部分系の中立波の空間構造 $k = 0.63$ のとき



部分系の中立波と全体系の中立波と不安定波の分散曲線
 緑線: 全体系の位相速度 青線: 部分系の位相速度

- 部分系における中立波を x 方向に平行移動し、重ね合わせると不安定波の構造に似ている
- ある波数ではそれぞれの中立波の位相速度は逆向きで等しい

～中立波の構造について～

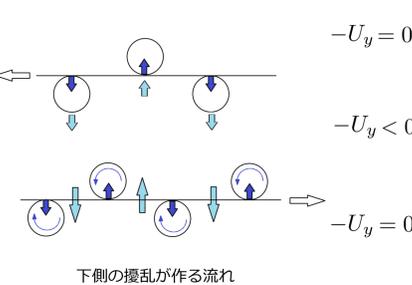


$$\text{渦度 } \zeta = \bar{\zeta} + \zeta' \text{ が保存する}$$

- 境界においてパーセルの変位があると、擾乱の渦度が生じる
- 境界以外では基本流の渦度 $\bar{\zeta}$ は一定のため、擾乱の渦度は生じない

境界にトラップされた波が存在し、それぞれの境界における波は逆向きに伝播する

8. 中立波の共鳴による不安定



- 左図より、下側の擾乱が作る流れは上側の擾乱に影響を及ぼす
- 逆も成立するので、上下の擾乱が互いに影響を及ぼし、強め合う
- 上下の擾乱の位相がずれており、位相速度が等しいとき、擾乱は互いに持続的に強め合って成長し、不安定となる

不安定が中立波の共鳴 (相互作用) として解釈できる

9. まとめと今後の課題

- 不安定波の成長率を求め、流速の変化する幅に対する依存性を確認した
- 部分系を構築し、その中立波の流れの空間構造を確かめた
- 渦度保存則を考えることで、境界にトラップされた波が存在することがわかった
- 位相の傾きより、位相がずれており位相速度が等しい場合、中立波の共鳴により不安定が生じることがわかった

今回取り上げたのは解析的に解くことができる単純な流れだが、より一般的な連続的な流れに対しては $U(y_c) = c$ の特異点が存在する可能性があるため簡単に解くことができない
 その場合、共鳴する波として連続モードを考える必要がある

参考文献

- Geoffrey, K. Vallis, 2017: Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-scale Circulation, 2nd edn. Cambridge University Press.
- Keita Iga, 2012: Shear instability as a resonance between neutral waves hidden in a shear flow. Cambridge University Press.
- 新野 宏, 1981: 順圧不安定の力学. 天気 1981年2月 vol.28, No.2.