連続体力学: 構成方程式

地球流体電脳倶楽部

2000 年 5 月 24 日

目 次

要旨

応力を連続体を記述する座標 (変形) および熱力学量などと関係づける法則である 構成方程式(constitution equation) を導出する.

良く行われる定式化は, 応力を 歪み (strain) で与えるものである. 歪みは連続体の変形を定式化したものである. 連続体内の 2 点間の距離の偏差で定式化される. 類似のものに歪み速度がある. これは連続体内の 2 点での速度の勾配で定式化される.

応力と歪み速度とを比例関係であたえる連続体を ニュートン流体 という. 応力と歪みそのものを比例関係 (フックの法則) であたえる連続体を 線形弾性体 という.

1　流体

1.1　流体の定義

流体力学では, ‘変型しやすい’ 物質の巨視的な振舞いを扱う. 物質は ‘変型しやすい’ 連続体として扱われ, 流体と呼ばれる.

1.2　流体の定義

- 定義
  流体とは, ‘変型しやすい’ 連続体 である. 物質を流体として扱うとは, その振舞いを ‘変型しやすい’ 連続体として近似することである.

  ‘変型しやすい’ とは, わずかに力を加えても変型する, ということであり, 次のように言い換えられる.

- 定理
  流体には, 静止状態において応力が面の法線方向にしか現われず, しかもその力は面を押す向きに働く[1].

- 定理の証明
  静止状態において接線方向の応力が存在すると仮定する. このとき, 考えている面をはさんで隣りあった部分には, 同じ大きさで逆向きの力が働く (作用反作用の法則). 流体は定義により, ‘変型しやすい’ ので, 運動が生じる (図 2). これは静止状態であることに反する. したがって, 静止状態では, 流体中に接線方向の応力は存在しない.

  また, 法線方向の力が面を引っ張る向きに働けば, その部分は裂けて, 真空状態が生じる (図 3). したがって, 法線方向の応力は, 面を押す向きに働かなければならない.

図 2

[1] この力を圧力という.

図 3

1.3 ニュートン流体の構成方程式

流体中に働く応力は, 流体を構成する物質の性質と流体の運動状態に依存する. 静止流体中では応力は面に垂直な方向しか現われず, しかも面を押す向きに働く. 流体が静止していないときは, 一般に速度の空間勾配 $\dfrac{\partial v_k}{\partial x_l}$ が存在し, 流体同士の引きずりあいによる応力が働く.
$u_{kl} \equiv \dfrac{\partial v_k}{\partial x_l}$ を速度勾配テンソルという. 応力は速度勾配テンソル u_{kl} の関数と考えるのが自然である. ここでは, この関数形を求める.

1.3.1 仮定

表式の決定に当たり, ここでは次の 2 つの仮定をする.

- 速度勾配が十分小さい.
- 流体が等方的である.

1.3.2 σ_{ij} の速度勾配テンソル u_{kl} による展開

速度勾配が小さいので, σ_{ij} を u_{kl} で展開し, 2 次以上の項を微小として無視する[1].

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_0 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} u_{kl} + O(u_{kl}^2).$$

1.3.3 速度勾配テンソル u_{kl} の分解

速度勾配テンソル u_{kl} は対称部分と反対称部分に分けることができる.

$$u_{kl} = \frac{1}{2} \cdot e_{kl} + \frac{1}{2} \cdot \Omega_{kl},$$

ただし

$$\begin{aligned} e_{kl} &\equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k}, \\ \Omega_{kl} &\equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} = -\varepsilon_{klm} \cdot \omega_m. \end{aligned}$$

e_{kl} は変型速度テンソル, ω_m は渦度の m 方向の成分である[1]. したがって σ_{ij} はつぎのように表わされる.

[1]応力が変型速度の 1 次式で表される流体を Newton 流体 (Newtonian Fluid), そうでないものを非 Newton 流体 (Non-Newtonian Fluid) という. ここでは Newton 流体を考えている.

[1]$\omega_m \equiv \epsilon_{ijm} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= (\sigma_{ij})_0 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}}(\frac{1}{2}e_{kl} - \frac{1}{2}\epsilon_{klm}\omega_m) \qquad (1)\\
&= (\sigma_{ij})_0 + a_{ijkl}e_{kl} + b_{ijm}\omega_m + O(u_{kl}^2).
\end{aligned}
$$

ただし, $a_{ijkl} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}}, b_{ijm} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}}\epsilon_{klm}$ である.

1.3.4　$(\sigma_{ij})_0$ の表式

流体が静止しているときは流体中に働く応力は, 面に垂直な方向に押す向きに働く圧力 p だけである. したがって, 応力テンソルは $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ と表される.
一方, $e_{kl} = 0, \omega_m = 0$ であるから (5) 式に代入, 移項することにより,

$$(\sigma_{ij})_0 = -p\delta_{ij}.$$

1.3.5　b_{ijm} の表式

流体が剛体回転しているときも速度のずれによる応力は存在せず, 圧力だけである. 今, 流体が x 軸を回転軸として角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で剛体回転しているとする. 速度は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (0, \Omega z, -\Omega y),\\
\Omega &= \mid \boldsymbol{\Omega} \mid .
\end{aligned}
$$

このとき $e_{kl} = 0,\ \omega_1 = 2\Omega,\ \omega_2 = \omega_3 = 0$ である. したがって, 応力テンソルは

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + b_{ij1} \cdot 2\Omega.$$

応力は圧力だけであるから $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ となる. したがって, $b_{ij1} = 0$ である. 同様に, y 軸, z 軸回転について考えると, ω_m の係数 b_{ijm} はすべて 0 となる.

$$b_{ijm} = 0.$$

1.3.6　a_{ijkl} の表式

流体が等方的であるという仮定により, e_{kl} の係数 a_{ijkl} は 4 階の等方性テンソルでなければならない[2].

$$a_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk}.$$

[2] 4 階の等方テンソルが次の表式であることについては, 別シリーズ‘テンソルの基礎’参照 .

1.3.7　応力テンソルの表式

以上より, 応力テンソルは次のように書ける.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + Be_{ij} + Ce_{ji} \\ &= -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + (B+C)e_{ij}.\end{aligned}$$

ここであらためて $A = \dfrac{\lambda}{2}, B + C = \mu$ とおく. また, $e_{kk} = 2\dfrac{\partial v_k}{\partial x_k} = 2\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ と変型することにより応力テンソルの表現が得られる.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{ij}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{v}. \tag{2}$$

μ を粘性係数（率）, λ を第 2 粘性係数（率）という.

応力テンソルの表式は, さらに次の様に変形されることも多い.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\delta_{ij}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{v}.$$

すなわち,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{v_j}{x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ij}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{v}. \tag{3}$$

$\eta \equiv \mu$ は粘性係数（率）である. $\zeta \equiv \lambda + \dfrac{2}{3}\mu$ も第 2 粘性係数（率）といわれる[1].

2　弾性体

2.1　弾性体の定義

2.2　線形弾性体の構成方程式

3　参考文献

Batchelor,G.K., 橋本英典 他 訳 : 入門流体力学, 東京電機大学出版局, 614pp.

[1] λ と ζ を区別するために, 一方を第 2 粘性係数（率）, もう一方を体積粘性係数（率）とすることもある. しかし, どちらをどう呼ぶかは, 好みの問題らしい. また, μ と λ , η と ζ はそれぞれペアとして使われる. 以後, ここでは, η と ζ の組合せの方を用いる.

Landau,L.D., Lifshitz,E.M., 竹内 均 訳, 1970 : 流体力学 1, 東京図書, 280pp.

今井　功, 1973 : 流体力学 (前編), 裳華房, 428pp.

謝辞

本稿は 1989 年から 1993 年に東京大学地球惑星物理学科で行われていた, 流体理論セミナーでのセミナーノートがもとになっている. 原作版は竹広真一による「流体力学の基礎」 (89/04/21) であり, 保坂征宏による改定 (90/04/23) を経て, 林祥介によって地球流体電脳倶楽部版「連続体力学の基礎」として書き直された (96/04/23). さらに竹広真一によって「連続体力学 : 構成方程式」に分割・編集された (2000/05/24). 構成とデバッグに協力してくれたセミナー参加者のすべてに感謝するものである.