

数値計算の安定性 : Stability

以下では、1 階の常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$

について、各数値計算手法での安定性を記述する。ここで、 λ は複素数とする。

オイラー法

オイラー法の時間積分は、以下で計算される。

$$u_{n+1} = u_n + \lambda \Delta t u_n$$

よって、数値計算の安定性としては、

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |1 + \lambda \Delta t| < 1$$

という条件を満たす必要がある。これは実際、

$$1 + \lambda \Delta t = r e^{i\theta}$$

と極形式で複素数を記述し、先の条件に代入すると、 $e^{i\theta}$ の大きさが 1 であることから、

$$r < 1$$

という条件を満足すればよいことになる。つまり、 $\lambda \Delta t$ については、

$$\lambda \Delta t = r e^{i\theta} - 1$$

であるから、複素平面において、 $(-1, 0)$ を中心とする半径 1 の円の内部が安定な領域であることがわかる。

後退オイラー法 (陰的オイラー法)

オイラー法を陰的に計算する手法である。

$$u_{n+1} = u_n + \lambda \Delta t u_{n+1}$$

という過程で計算する。これより、安定性の条件は、

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{1}{1 - \lambda \Delta t} \right| < 1$$

である。これも先ほどと同様に、 $1 - \lambda \Delta t = r e^{i\theta}$ とおくと、先の条件は

$$\left| \frac{1}{r e^{i\theta}} \right| < 1$$

から、

$$\frac{1}{r} < 1$$

が安定の条件であることがわかる。つまり、 $\lambda \Delta t$ で安定な領域は、 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円の外側全域であることがわかる。

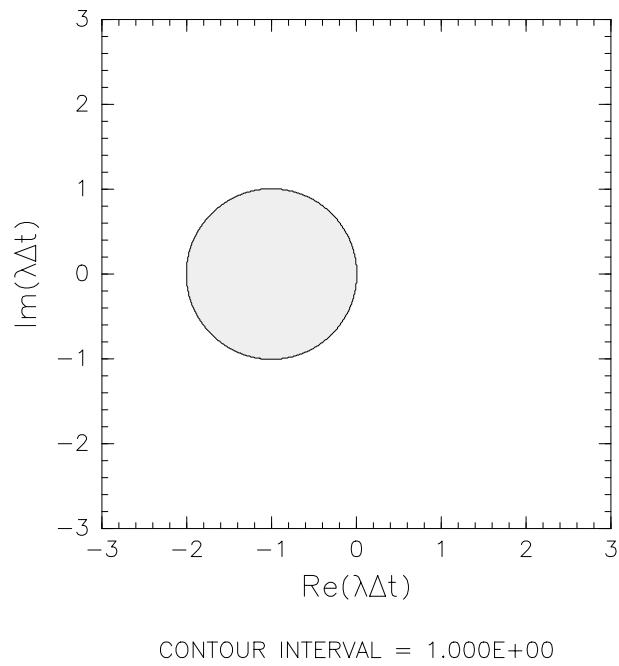


図 1: オイラー法の安定領域。斜線の領域が、計算の収束する安定な領域。

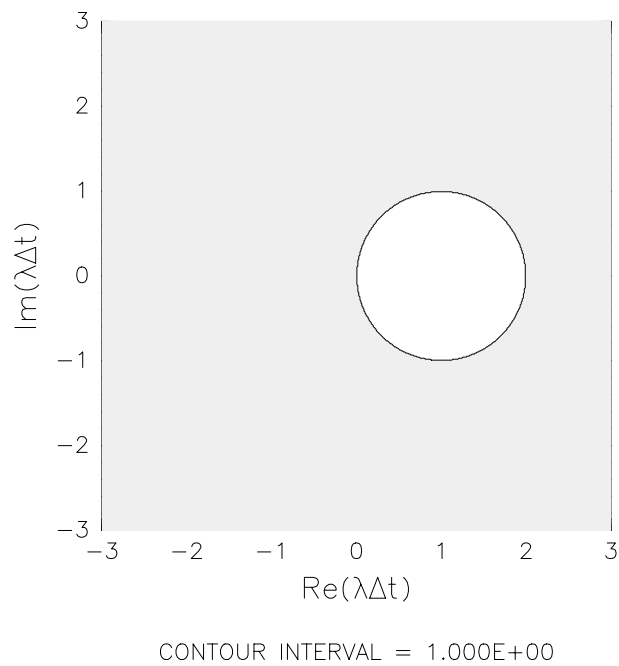


図 2: 後退オイラー法の安定領域。斜線の領域が、計算の収束する安定な領域。

クランクニコルソン法

オイラー法と後退オイラー法を合わせた手法である。

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2} \lambda (u_n + u_{n+1})$$

これを次のように変形する。

$$\left(1 - \frac{\Delta t \lambda}{2}\right) u_{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t \lambda}{2}\right) u_n$$

よって、安定性の条件は、

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{1 + \frac{\Delta t \lambda}{2}}{1 - \frac{\Delta t \lambda}{2}} \right| < 1$$

となる。複素数の絶対値は、自身とその共役の積の平方根であるため、

$$\left| \frac{1 + \frac{\Delta t \lambda}{2}}{1 - \frac{\Delta t \lambda}{2}} \right| < 1$$

を両辺二乗すると、

$$\left| \frac{1 + \frac{\Delta t \lambda}{2}}{1 - \frac{\Delta t \lambda}{2}} \right|^2 = \frac{1 + \frac{\Delta t \lambda}{2}}{1 - \frac{\Delta t \lambda}{2}} \frac{\overline{1 + \frac{\Delta t \lambda}{2}}}{\overline{1 - \frac{\Delta t \lambda}{2}}} < 1$$

となる。さらに、 $\Delta t \lambda = r e^{i\theta}$ とおくと、先の方程式は

$$\frac{2 + r e^{i\theta}}{2 - r e^{i\theta}} \frac{\overline{2 + r e^{i\theta}}}{\overline{2 - r e^{i\theta}}} < 1$$

となる。すると、共役部分は

$$\frac{2 + r e^{i\theta}}{2 - r e^{i\theta}} \frac{2 + r e^{-i\theta}}{2 - r e^{-i\theta}} < 1$$

となるので、分母を両辺にかけると、

$$(2 + r e^{i\theta})(2 + r e^{-i\theta}) < (2 - r e^{i\theta})(2 - r e^{-i\theta})$$

となる。実際にこれを計算して整理すると、

$$4r \cos \theta < -4r \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta < 0$$

という条件が得られる。よって、

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

であることがわかるので、 $\Delta t \lambda$ は実軸の負の領域全域が安定領域となることがわかる。

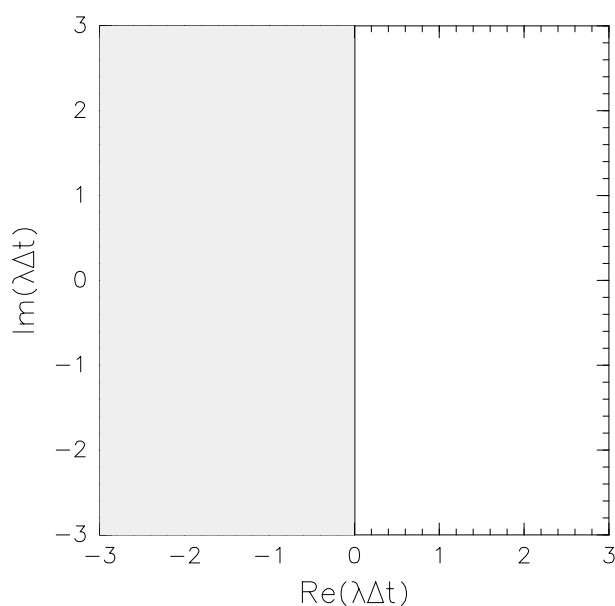


図 3: クランクニコルソン法の安定領域。斜線の領域が、計算の収束する安定な領域。

2 段 2 位の Runge=Kutta 法 (改良オイラー法・修正オイラー法)

修正オイラー法の計算方法は、

$$k_1 = \lambda u_n, \quad k_2 = \lambda(u_n + k_1 \Delta t) = \lambda(u_n + \lambda \Delta t u_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2} (k_1 + k_2) = \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{2} (\lambda + \lambda + \lambda^2 \Delta t) \right\} u_n$$

である。よって、安定となるためには、

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| 1 + \lambda \Delta t + \frac{1}{2} (\lambda \Delta t)^2 \right| < 1$$

という条件を満足すればよい。ここでは、結果だけ掲載する¹。

3 段 3 位の Runge=Kutta 法

ここでは、クッタの 3 次公式を用いて安定性を検証する。

$$k_1 = \lambda u_n, \quad k_2 = \lambda \left(u_n + \Delta t \frac{k_1}{2} \right), \quad k_3 = \lambda (u_n + (-k_1 + 2k_2) \Delta t)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3)$$

¹というより、計算できませんでした。

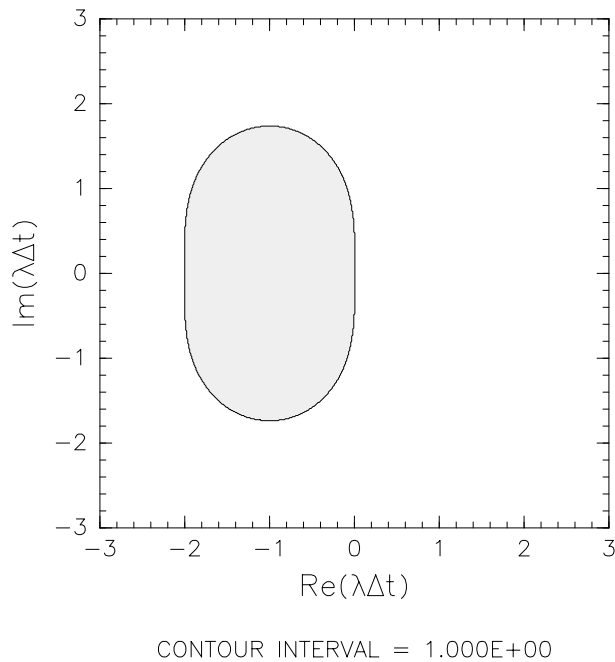


図 4: 修正オイラー法の安定領域。斜線の領域が、計算の収束する安定な領域。

が計算手法なので、これを用いると、

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= u_n + \frac{\Delta t}{6} \left\{ \lambda + 4\lambda \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{2} \right) + \lambda (1 + (-\lambda + \lambda(2 + \lambda \Delta t)) \Delta t) \right\} u_n \\
 &= \left[1 + \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2} + \frac{(\lambda \Delta t)^3}{6} \right] u_n
 \end{aligned}$$

であることがわかる。したがって、安定性は

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| 1 + \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2} + \frac{(\lambda \Delta t)^3}{6} \right| < 1$$

である。

4 段 4 位の Runge=Kutta 法

先の考えから、同様に Runge=Kutta 法の安定性は、

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| 1 + \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2} + \frac{(\lambda \Delta t)^3}{6} + \frac{(\lambda \Delta t)^4}{24} \right| < 1$$

であることがわかる。

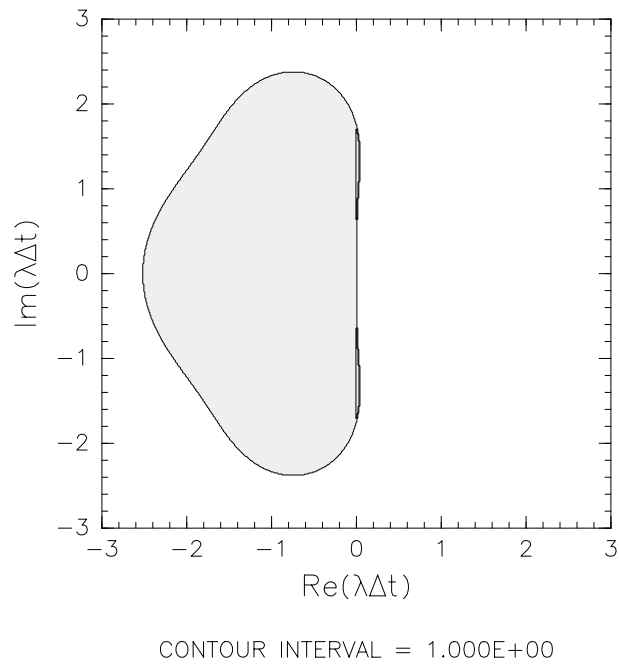


図 5: クッタの 3 次公式の安定領域。斜線の領域が、計算の収束する安定な領域。

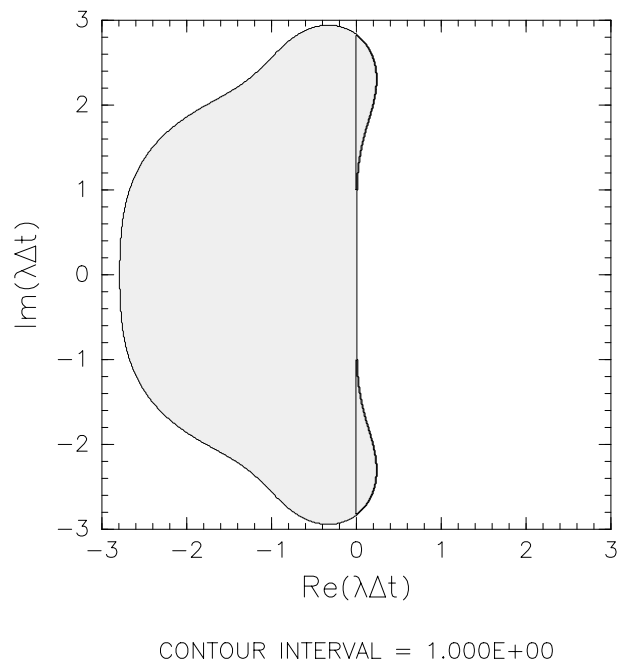


図 6: Runge=Kutta 法の安定領域。斜線の領域が、計算の収束する安定な領域。

リープフロッグ法

リープフロッグの計算手法は

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2\Delta t\lambda u_n$$

であるので、

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n-1}}{u_n} + 2\Delta t\lambda$$

となる。 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \xi$ とおくと、上の方程式は

$$\xi^2 - 2\Delta t\lambda\xi - 1 = 0$$

となる。この方程式の ξ についての解は、

$$\xi = \frac{2\Delta t\lambda \pm \sqrt{(2\Delta t\lambda)^2 + 4}}{2} = \Delta t\lambda \pm \sqrt{(\Delta t\lambda)^2 + 1}$$

となる。このとき、

$$\xi_1 = \Delta t\lambda + \sqrt{(\Delta t\lambda)^2 + 1}, \quad \xi_2 = \Delta t\lambda - \sqrt{(\Delta t\lambda)^2 + 1}$$

とする。こうすると、リープフロッグの安定領域は

$$|\xi_1| < 1, \text{ かつ } |\xi_2| < 1$$

となる領域である。

これを図示すると、図7となる。

2 位のアダムズ=バッシュフォース法

2 位のアダムズ=バッシュフォース法の計算手法は、

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\lambda\Delta t}{2} (3u_n - u_{n-1})$$

であるので、これを变形すると、以下のようになる。

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n-1}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \left(1 + \frac{3}{2}\lambda\Delta t\right) - \frac{\lambda\Delta t}{2}$$

ここで、 $\frac{u_{n+1}}{u_{n-1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{u_n}{u_{n-1}}$ とできるので、 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \xi$ とすると、上式は

$$\xi^2 - \xi \left(1 + \frac{3}{2}\lambda\Delta t\right) + \frac{\lambda\Delta t}{2} = 0$$

となる。これを ξ について計算すると、

$$\xi = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{2}\lambda\Delta t\right) \pm \sqrt{1 + \lambda\Delta t + \frac{9}{4}(\lambda\Delta t)^2} \right]$$

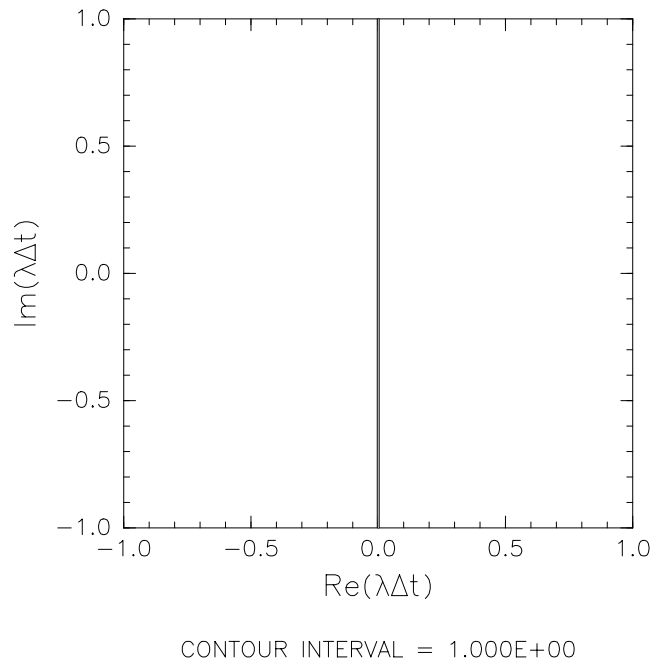


図 7: リープフロッグ法の安定領域。この計算手法は, 虚軸上の $(0, 1) \rightarrow (0, 1)$ の線上でしか安定でない。

となる。ここで、

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \lambda \Delta t \right) \pm \sqrt{1 + \lambda \Delta t + \frac{9}{4} (\lambda \Delta t)^2} \right], \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \lambda \Delta t \right) \pm \sqrt{1 + \lambda \Delta t + \frac{9}{4} (\lambda \Delta t)^2} \right]$$

と定義すると、アダムズ=バッシュフォース法の安定領域は

$$|\xi_1| < 1, \text{ かつ } |\xi_2| < 1$$

となる領域である。

これを図示すると、図 8 となる。

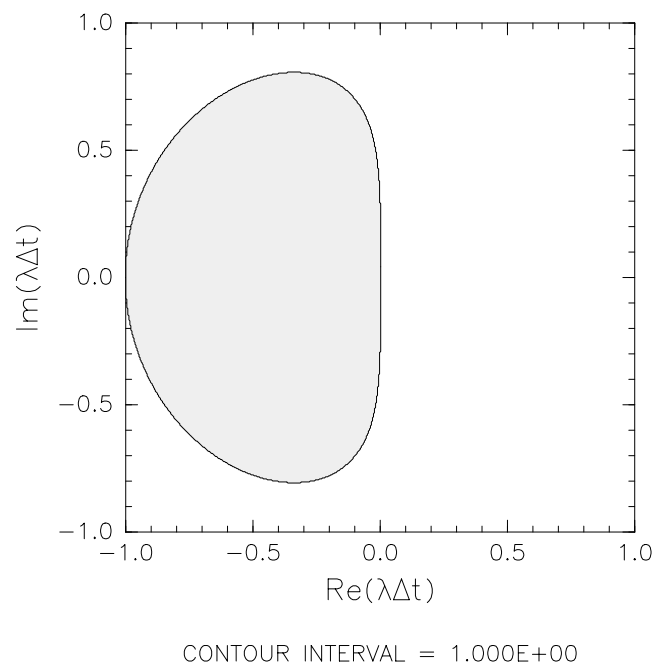


図 8: アダムズ=バッシュフォース法の安定領域。