

大気変動にみられるトレンドに関する  
確率統計理論および数値実験

西澤誠也



## 要旨

有限長のデータから線形トレンドを見積もる場合、内部変動により外部条件の変化による真のトレンドからのずれである見かけのトレンドが生じる。本研究では、大気変動にみられるトレンドを、確率統計理論および数値実験により調べた。

一般的な統計的仮定のもと、見かけのトレンドのいくつかのモーメントおよび分布関数を理論的に求めた。奇数次のモーメントは0であり、標準偏差や尖度はデータ長が大きくなるほど小さくなる。内部変動が正規分布に従う場合、見かけのトレンドの分布関数も正規分布に従う。一般的な分布の場合、見かけのトレンドの分布関数のエッジワース展開の式を求めた。エッジワース展開を利用して分布関数を求めるためには、内部変動のいくつかのモーメントが必要となる。4次の正確度をもつ分布関数を得るためには内部変動の標準偏差と尖度が必要となる。

非正規分布に従っている大気内部年々変動を調べるために、簡単化した3次元大気循環モデルを用いた数値実験により、15,200年間もの長期間データを取得した。ここで、トレンドが無い年周期をもつ外部強制を与えた。各モーメントを求めるのに必要なデータ長を見積もるために、このデータを用いて標本モーメントの見積もり誤差のデータ長依存性を調べた。またこの長期間データを用いて内部変動のモーメントの空間・季節分布を調べた。成層圏では歪度や尖度が大きな領域や季節が存在し、そこでの変動は非正規分布によって特徴づけられる。

大気変動におけるトレンドを議論するために、同じモデルを用いて、外部強制に線型トレンドを与えたアンサンブル実験を行った。見かけのトレンドの標準偏差の空間・季節分布は内部変動の標準偏差から理論的に推定される分布とほぼ一致していた。見積もられたトレンドの統計的有意性を調べるため、無帰仮説検定を行った。内部変動の標準偏差が小さな領域や季節では、見積もられたトレンドの統計的有意性が高い。従来から行われている $t$ -検定やブートストラップ検定の結果を、より正確なエッジワース展開により得られた分布関数を用いた検定の結果と比較した。内部変動の尖度が大きな領域や季節では、見かけのトレンドが正規分布に従うという仮定がなりたらず、 $t$ -検定の結果はエッジワース展開を利用した検定と差が見られた。

2種類の現実大気データを用いて気温トレンドを見積もり、その統計的有意性を調べた。数十年の現実大気データでは長さが十分でなく、内部変動のモーメントの見積もり誤差が大きい。そこで全球大気大循環モデルを用いた長期間積分実験によってモーメントを求め、現実大気データによって見積もられたトレンドを評価する方法を提案した。



---

# 目次

1	現実大気にみられるトレンド	7
1.1	近年の気温トレンド	7
1.2	極端な気象	8
1.3	トレンドの見積もりと見かけのトレンド	12
1.4	本研究の目的	13
2	見かけのトレンドの確率統計理論	15
2.1	内部変動による見かけのトレンド	15
2.2	見かけのトレンドのモーメント	16
2.3	見かけのトレンドの分布関数	18
2.3.1	内部変動が正規分布に従う場合	18
2.3.2	一般的な場合	19
2.4	トレンドの推定と検定	23
2.4.1	信頼区間の誤差	23
2.4.2	区間推定と統計的有意性検定	25
2.5	結論	26
3	大気内部変動のモーメントに関する数値実験	29

---

---

3.1	モデルと実験設定 . . . . .	29
3.2	モーメントの推定誤差 . . . . .	31
3.2.1	内部変動の分布関数 . . . . .	31
3.2.2	標本モーメントの誤差の分布関数 . . . . .	33
3.3	モーメントの空間・季節依存性 . . . . .	36
3.4	結論 . . . . .	40
4	トレンドに関する数値実験 . . . . .	43
4.1	実験設定 . . . . .	43
4.2	見積もられたトレンドの空間・季節依存性 . . . . .	44
4.3	見積もられたトレンドの統計的有意性検定 . . . . .	48
4.4	結論 . . . . .	49
5	現実大気にみられる気温トレンドの解析 . . . . .	51
5.1	データ . . . . .	51
5.2	内部変動の平均と標準偏差 . . . . .	51
5.3	見積もられた気温トレンド . . . . .	53
5.4	結論 . . . . .	55
6	議論 . . . . .	59
7	まとめ . . . . .	63
	基礎となった論文 . . . . .	65

---

---

謝辞	67
<b>A</b> 本研究に関係のある確率統計の基礎	<b>69</b>
A.1 確率分布	69
A.1.1 正規分布 (Normal distribution)	69
A.1.2 対数正規分布 (Lognormal distribution)	70
A.1.3 ガンマ分布 (Gamma distribution)	71
A.1.4 ワイブル分布 (Weibull distribution)	73
A.1.5 極値分布 (Extreme value distribution)	74
A.1.6 ベータ分布 (Beta distribution)	76
A.1.7 $\chi^2$ 分布 (Chi-squared distribution)	77
A.1.8 $t$ -分布 ( $t$ -distribution)	79
A.1.9 $F$ 分布 ( $F$ distribution)	80
A.2 モーメントの推定	81
A.2.1 平均・分散・歪度・尖度	81
A.2.2 標本平均の分布関数	83
A.3 ブートストラップ法	84
<b>B</b> 導出と証明	<b>87</b>
B.1 分布関数	87
B.1.1 正規分布の導出	87
B.1.2 ワイブル分布の導出	88

---

B.1.3	極値分布の導出 . . . . .	89
B.1.4	$\chi^2$ 分布の証明 . . . . .	90
B.1.5	$t$ -分布の導出 . . . . .	91
B.1.6	$F$ 分布の導出 . . . . .	92
B.2	見かけのトレンド . . . . .	93
B.2.1	最小二乗法による見かけのトレンドの導出 . . . . .	93
B.2.2	$a', a'^2, a'^3 a'^4$ の期待値の導出 . . . . .	94
B.2.3	見かけのトレンドのエッジワース展開とコーニッシュ・フィッシャー展開 の導出 . . . . .	99
B.2.4	スチューデント化統計量が $t$ -分布に従うことの証明 . . . . .	102
B.2.5	トレンドをもつデータにおける内部変動の標本分散の導出 . . . . .	103

---



# 第1章 現実大気にみられるトレンド

この章では、大気変動にみられるトレンドについてレビューし、本研究の目的を述べる。

## 1.1 近年の気温トレンド

近年、対流圏では温暖化、成層圏では寒冷化の気温トレンドが観測されている (図 1.1)。これら気温のトレンドは二酸化炭素など温室効果気体の増加が主な原因であるとされており、成層圏オゾンの減少も成層圏の寒冷化に寄与しているとされている。これらは人間活動と関係しているとの指摘がある。また、エアロゾルや太陽放射の変化の効果も重要であることが指摘されている (Hegerl et al., 1997; Hansen et al., 1997)。気温トレンドをはじめとする気候変動は人間社会に大きく関わっているため、多くの関心を集めている (Burroughs, 2001; Houghton, 1997)。

対流圏においては温暖化傾向が見られる。地球の地上平均気温は 1860 年代から上昇し、20 世紀中の気温の上昇量は約 0.6K であった (Houghton et al., 2001)。この 20 世紀における気温の上昇は、過去 1000 年のどの世紀よりも大きかった可能性が高い。衛星による観測が始まった 1979 年以降、高さ 8km までの大気平均気温は約 0.05K/decade で上昇し、平均地上気温はおよそ 0.15K/decade で上昇している。温暖化トレンドは特に都市部で大きく、北半球の都市部の地上気温でおよそ 0.27K/decade である。下部対流圏の平均気温は、全球平均では地上気温の上昇率よりも小さいのに対し、都市部では 0.28K/decade と地上気温の上昇率とほぼ同じである。この現象はヒートアイランド現象と呼ばれている。

一方、下部成層圏の全球平均気温には約  $-0.5\text{K/decade}$  の寒冷化傾向が見られる (図 1.1 b)。途中、大規模な火山噴火の影響による気温の上昇が見られるが、大規模な火山噴火は成層圏中のエアロゾルを増加させ、数年間気温を上昇させると考えられている (Brasseur and Granier, 1992; Robock, 2000)。図 1.2 は年平均した帯状平均気温のトレンドの子午面断面図である。中・低緯度の中部および上部成層圏で強い寒冷化トレンドがみられ、特に上部成層圏で  $-3\text{K/decade}$  以下と大きな値となっている。10hPa レベルより上では緯度による違いはあまり見られない。火山噴火の影響を除くと、下部成層圏の寒冷化トレンドはより強くなり、統計的に有意な領域が広がる。

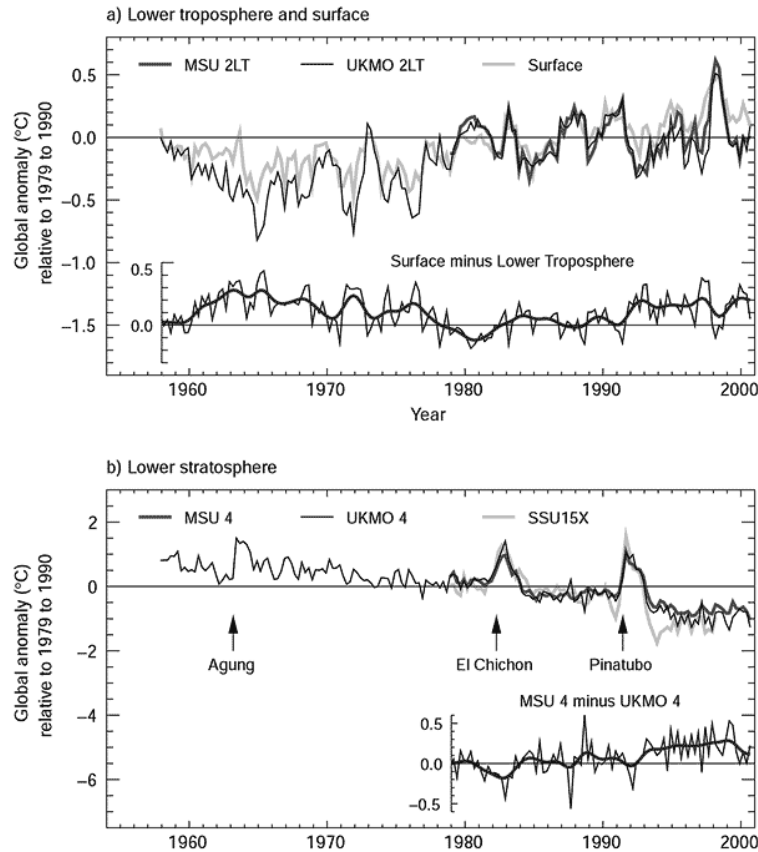


図 1.1: (a) 衛星観測 (MSU 2LT) および気球観測 (UKMO 2LT) による下部対流圏と地表の全球気温の 1979-1990 年に対する偏差。下に地表と下部対流圏の気温偏差の差をつけている。(b) 衛星観測 (MSU 4, SSU 15X) および気球観測 (UKMO 4) による下部成層圏における全球気温の偏差 (上)、および MSU4 と UKMO 4 による気温偏差との差 (下)。主な火山噴火の日時を矢印で示している。Houghton et al. (2001) より引用。

図 1.3 は南極大陸上での気温変化の月-高度断面図である。春季の下部成層圏でおよそ 15 年で  $-6\text{K}$  くらいの統計的に有意な寒冷化がみられ、その後夏まで有意な寒冷化がみられる。一方、冬季には有意な違いは見られず、季節による違いが大きい。

## 1.2 極端な気象

集中豪雨や突風などの極端な気象 (extreme weather) の頻度や程度がどのように変化しているのか、またこれからどのように変化するのか、ということを知ることは科学的興味だけでなく人間社会にとっても重要な問題である。極端な気象は異常気象や気候災害と密接に関係しており、人間社会に重大な影響を与える可能性がある。

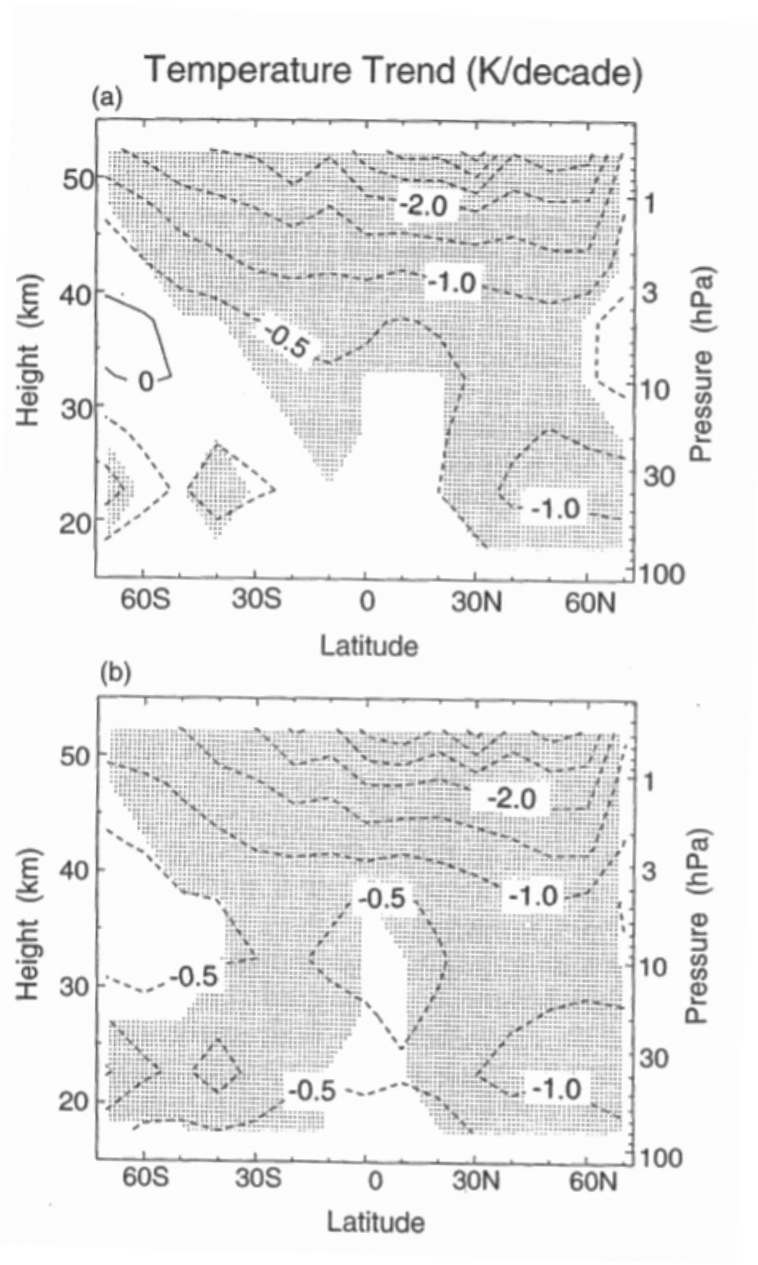


図 1.2: 衛星観測 (MSU および SSU) による 1979-1994 年の (a) 全期間と (b) 火山噴火期間を除いた期間での年平均した帯状平均気温のトレンド。等値線間隔は  $-0.5\text{K/decade}$ 。(b) ではエルチェヨンとピナツボ噴火以降のそれぞれ 2 年間を除いている。シェードは統計的に有意な領域を表している。Ramaswamy et al. (2001) より引用。

極端な気象現象は、起る頻度が少なく値が平均値から大きくはずれている現象であり、変動の頻度分布の裾の尾に相当する現象であるといえる。頻度分布の裾の尾が少し異なるだけで、極端な気象現象はその頻度や程度が大きく異なる。頻度分布の裾の尾の違いを表す基本的な統計

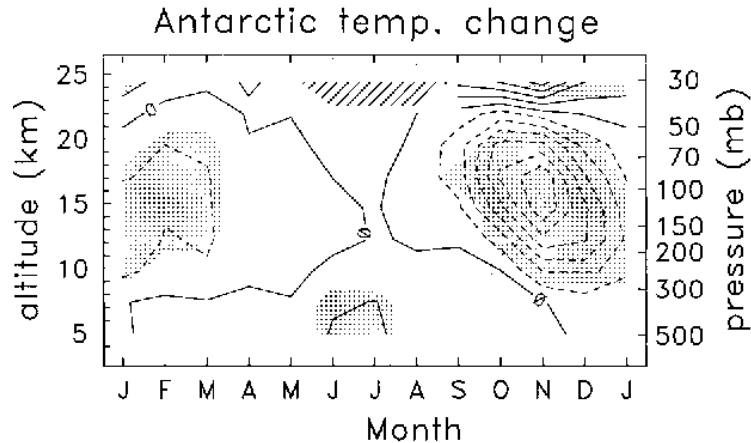


図 1.3: ラジオゾンデ観測による 1970-1979 年と 1987-1996 年の南極大陸上の気温差の月-高度断面図。破線は寒冷化を表している。等値線間隔は 1K である。シェードは気温差が統計的に有意な領域を表している。Randel and Wu (1999) より引用。

量の 1 つとして尖度や歪度がある。尖度は頻度分布の裾の尾の広がり具合を表す統計量で、尖度が正で大きいほど極端な現象の頻度が高く、また程度が大きくなる。歪度は頻度分布の左右の非対称性を表す統計量で、歪度が大きいと頻度分布の片側の極端な現象の頻度や程度が大きくなる。

極端な気象のトレンドは現在観測データの解析や数値実験などにより多くの研究がされている。強い降雨は近年増加傾向であることが観測されており (Frei and Schär, 2001; Osborn and Hulme, 2002)、またいくつかの数値モデルを用いた実験により、温暖化により強い降雨が増えるとの結果が得られている (Iwashima and Yamamoto, 1993; Palmer and Rälsänen, 2002)。北太平洋における冬季の極端に強い低気圧の強さと頻度は増加しており (Graham and Diaz, 2001)、大西洋における強いハリケーンの頻度は減少している (Landsea et al., 1996) ことがいくつかの観測データから示されている。気温においては、Karl et al. (1995) は極端な気象と関係がある短い周期の変動が減少傾向であることを観測データから示している。また、いくつかの極端な気象の発生に人間活動が影響を与えている可能性が指摘されている (e.g. Hegerl et al., 2004; Schär and Jendritzky, 2004)。ただし、これらの極端な気象のトレンドは、データの不足や、地域、季節による多様性などからまだ良く分かっていない点が多い。

Meehl et al. (2000) は内部変動の頻度分布の変化による極端な気象現象の変化を模式的に示した。彼らは気温の変動は正規分布に従うと仮定し、気候変化による気温の頻度分布の変化を考えている。図 1.4 (a) は気候変動により頻度分布の平均が大きくなる場合である。気候変化の後では、気候変化の前の閾値で考えた場合の極端に寒い天気は少なくなり、極端に暑い天気が多くなる。また、以前にはなかったようなより暑い天気が記録される。次に、頻度分布の平均

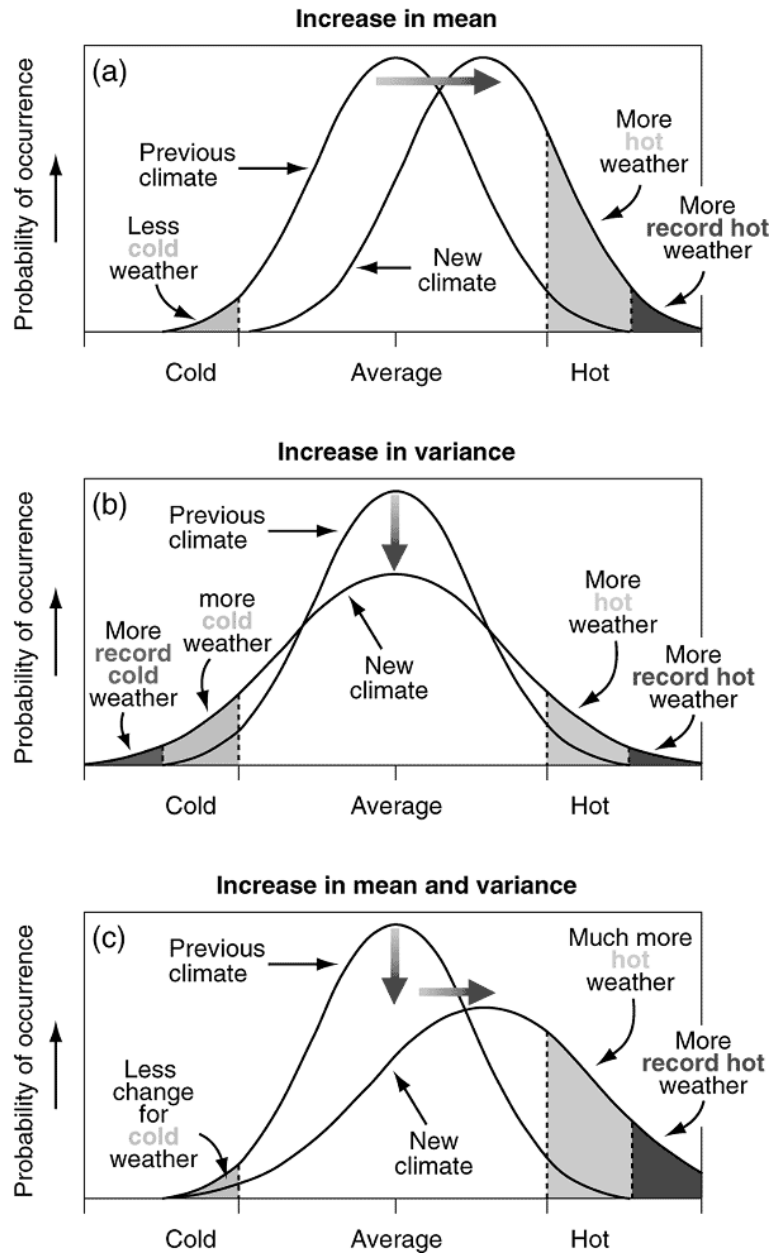


図 1.4: 気温の頻度分布 (正規分布) の (a) 平均が上昇したとき、および (b) 標準偏差が大きくなったとき、(c) 平均と標準偏差がともに大きくなったときの極端な気温の変化を示した概略図。Houghton et al. (2001) より引用。

は変わらないが標準偏差が大きくなる場合を考える (図 1.4 b)。この場合は、気候変化の後、極端に寒い天気も極端に暑い天気も両方増加する。そしてより寒い天気やより暑い天気が記録される。平均も標準偏差もともに大きくなる場合 (図 1.4 c) は、寒い天気はあまり変わらないが、暑い天気の頻度や程度は大きくかわる。極端に暑い天気が多くなり、またその程度がより大きくなる。このように気候変化により平均値や標準偏差が変わることによって極端な気象現象の

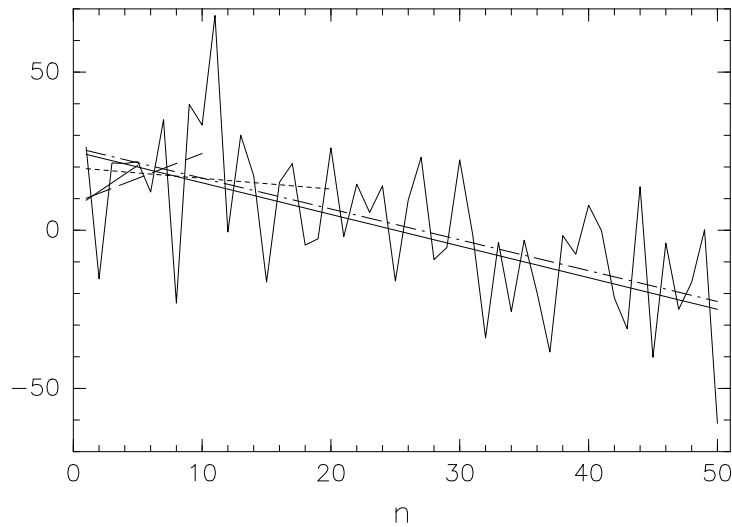


図 1.5: 見かけのトレンドの概念図。細実線の直線で表された線型トレンドとランダムな内部変動をあわせ持つ変動(データ)を折れ線で表している。太い実線、破線、点線、一点鎖線が、それぞれ最初の5年、10年、20年、50年のデータで見積もったトレンドを表す。

頻度や程度が変化する。変動の頻度分布が正規分布で無い場合や、気候変化によって頻度分布の形が変化する場合はより複雑になる。

### 1.3 トレンドの見積もりと見かけのトレンド

図 1.1 でもわかるように、成層圏に比べて、対流圏でのトレンドの大きさは変動のばらつきに比べて小さく、トレンドは成層圏に比べて分かりにくい。対流圏では内部変動が大きいいためトレンドの見積もりの際の誤差が大きくなり、トレンドの見積もりが難しい。

有限長のデータからトレンドを見積もると内部変動により誤差が生じる。例えば、真のトレンドが無くとも見かけ上トレンドがあるかのように見積もられることがある。このように、見積もられたトレンドは外部強制の変化により生じた真のトレンドからのずれをもっており、このずれを見かけのトレンド (spurious trend) と定義する。図 1.5 は見かけのトレンドについての簡単な例である。有限長のデータから見積もったトレンドは与えた真のトレンドからずれており、見かけのトレンドをもっている。例えば、真のトレンドは負であるにもかかわらず、最初の5年および10年のデータから見積もられたトレンドは正の値をもっている。

見積もられたトレンドには見かけのトレンドが含まれており、見かけのトレンドの性質を知っておかなければ見積もられたトレンドを正しく評価できず、トレンドを誤って解釈してしまう危険がある。見かけのトレンドを生じさせる原因として、内部変動の他に、太陽活動のように

長周期をもった強制や、火山噴火のような長い間隔をもつ間欠的な強制、観測機器の変化などのようにデータの質の階段関数型の変化を与える事象などがあげられる。

Tiao et al. (1990) は内部変動やデータの自己相関に因るトレンドの見積りの誤差を調べており、これらの原因による見かけのトレンドの頻度分布の標準偏差を求めている。Weatherhead et al. (1998) はその2つに加え観測機器の変化などによるデータの質の変化によるトレンドの見積りの誤差について考察している。見かけのトレンドの標準偏差は内部変動の標準偏差に比例し、およそデータ長の $-3/2$ 乗に比例する。また、データの自己相関が大きいかほど見かけのトレンドも大きくなる。見かけのトレンドの頻度分布が正規分布であると仮定すると、得られた見かけのトレンドの標準偏差を用いてトレンドの区間推定や見積もられたトレンドの統計的な有意性の議論などができる。

## 1.4 本研究の目的

データ長が十分でないと、見積もられたトレンドには見かけのトレンドが含まれている可能性がある。したがって、見積もられたトレンドを解釈するためには、見かけのトレンドを考慮し、見積もられたトレンドの統計的な有意性の検定を行ったり、点推定ではなく区間推定したりする。その際には見かけのトレンドに関する統計的な考察が不可欠である。一般的に、この有意性検定や区間推定には $t$ -分布が用いられている。 $t$ -分布を用いるためには、見かけのトレンドが正規分布に従うという仮定が必要となる。大気内部変動の頻度分布にはさまざまな分布がある(A.1)。例えば、月降水量や季節降水量の頻度分布はガンマ分布に近く(e.g. Wilks and Eggleston, 1992)、風速の頻度分布はワイブル分布に近い(e.g. Conradsen et al., 1984)。極域冬季成層圏気温の頻度分布は大きく歪んでいる(e.g. Yoden et al., 2002)。また、最大値や最小値などの極値の頻度分布は近似的に極値分布である。したがって、内部変動による見かけのトレンドはさまざまな頻度分布をもつと考えられ、その頻度分布が正規分布に近いとは限らない。見かけのトレンドの頻度分布が正規分布から大きくずれている場合、 $t$ -分布を用いた方法ではトレンドを正しく評価できていない可能性がある。しかし、一般的に見かけのトレンドの頻度分布は未知であり、正規分布を仮定せざるをえないのが現状である。

そこで本研究では、有限長データからトレンドを見積もった際の内部変動に起因する見かけのトレンドの性質を確率統計理論および数値実験により明らかにする。第2章では、見かけのトレンドについて確率統計理論により考察を行う。一般的な統計的仮定のもと、見かけのトレンドのいくつかのモーメントおよび分布関数の導出を試み、その性質を詳しく考察する。また、乱数を使用したモンテカルロシミュレーションを行い、理論の結果と合わせて考察する。さらに、求めた分布関数を用いた見積もられたトレンドの検定方法を提案し、既存の検定法と比較する。

第3、4章では、3次元大気循環モデルを用いた数値実験により大気変動におけるトレンドの考察を行う。大気変動におけるトレンドを調べるためには、大気の内変動の性質を知っておく必要がある。モーメントなど内変動の性質を調べるためには長期間のデータが必要となるが、現実大気データのデータ長は十分でないことが多い。Taguchi and Yoden (2002b) では1,000年積分実験を行い、大気内変動の頻度分布を調べており、冬季成層圏気温の頻度分布が大きく歪んでいることを指摘した。しかし、そのヒストグラムは粗く、1,000年のデータでもまだ十分であるとはいえない。そこで第3章では、3次元大気循環モデルを用いて長期間積分実験を行い、得られた15,200年という長期間のデータを用いてこのモデルにおける大気内変動を調べる。有限長のデータから見積もったモーメントは誤差をもつが、その誤差はデータ長に依存する。これらのデータを用いて標本モーメントの見積もり誤差のデータ長依存性を調べ、各モーメントの見積もりに必要なデータ長を推定できるようにする。また、この長期間データを用いて内変動のいくつかのモーメントの空間・季節分布を調べ、このモデル内大気の内変動の性質を押さえる。

第4章では、同じモデルを用いてトレンドを持つ外部強制を与えたアンサンブル実験を行い、有限長データから見積もられたトレンドを考察する。第3章で得られた内変動と見かけのトレンドの関係を調べ、理論で得られた結果と合わせて考察する。また、見積もられたトレンドの統計的有意性検定も行う。一般的に用いられている  $t$ -検定やブートストラップ検定に加えて、理論により求めた分布関数を用いたより正確な検定を行い、これらの結果を比較し前二者の検定の妥当性についての考察も行う。

第5章では、2種類の現実大気データを用いて内変動およびトレンドの解析を行い、現実大気にみられるトレンドの考察を行う。

第6章では現実大気にみられるトレンドを考える際の問題などについて議論を行う。第7章は全体のまとめであり、本研究の成果や意義を述べる。



## 第2章 見かけのトレンドの確率統計理論

この章では、見かけのトレンドの性質について確率統計理論により調べる。見かけのトレンドのモーメントや分布関数を求める。また、その分布関数を使い区間推定や有意検定について考える。

### 2.1 内部変動による見かけのトレンド

有限の長さのデータからトレンドを見積もる際、見積られたトレンドには、図 1.5 に見られたように、内部変動による見かけのトレンドが含まれている。トレンドの議論をする際にはこの見かけのトレンドの性質を知っておく必要がある。

線型トレンドと内部変動を含む簡単な線型トレンドモデルを考える;

$$X(n) = an + b + \epsilon(n). \quad (2.1)$$

ここで  $X(n), a, b, \epsilon(n)$  はそれぞれ時刻  $n$  におけるデータの値、トレンド、定数項、時刻  $n$  における内部変動の値を表している。 $a, b$  の見積もりをそれぞれ  $\hat{a}, \hat{b}$  とすると、 $X(n)$  の推定量である  $\hat{X}(n)$  は、

$$\hat{X}(n) = \hat{a}n + \hat{b} \quad (2.2)$$

となる。回帰残差は

$$e(n) = X(n) - \hat{X}(n) \quad (2.3)$$

である。

見かけのトレンド、 $a'$ 、は最小二乗法により見積もられたトレンドの真のトレンド  $a$  からのずれであり、

$$a' = \hat{a} - a = S_{nn}^{-1} \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{N+1}{2} \right) \epsilon(n). \quad (2.4)$$

となる (導出は B.2.1 節参照のこと)。ここで

$$S_{nn} = \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N n \right)^2 = \frac{1}{12} N(N+1)(N-1) \quad (2.5)$$

である。見かけのトレンドは真のトレンドには依存せず、内部変動とデータ長に依存していることが分かる。

## 2.2 見かけのトレンドのモーメント

内部変動の各時刻における値  $\epsilon(1), \dots, \epsilon(N)$  が互いに独立で同一の分布に従う確率変数であるとする。このとき見かけのトレンド  $a'$  も確率変数であり、試行毎に異なった値をとる。見かけのトレンドのモーメントを導出するために  $a', a'^2, a'^3, a'^4$  の期待値を求めた (導出は B.2.2 節参照のこと);

$$E(a') = 0, \quad (2.6)$$

$$E(a'^2) = S_{nn}^{-1} \sigma_\epsilon^2, \quad (2.7)$$

$$E(a'^3) = 0, \quad (2.8)$$

$$E(a'^4) = S_{nn}^{-2} \sigma_\epsilon^4 \left\{ \frac{3}{5} \frac{3N^2 - 7}{N(N+1)(N-1)} \beta_{2\epsilon} + 3 \right\}. \quad (2.9)$$

ここで  $\sigma_\epsilon, \beta_{2\epsilon}$  はそれぞれ  $\epsilon(n)$  の標準偏差と尖度である。したがって  $a'$  の平均および歪度は 0、標準偏差  $\sigma_{a'}$  および尖度  $\beta_{2a'}$  はそれぞれ

$$\sigma_{a'} = \sqrt{E(\{a' - E(a')\}^2)} = \sqrt{\frac{12}{N(N+1)(N-1)}} \sigma_\epsilon \approx \sqrt{12} N^{-\frac{3}{2}} \sigma_\epsilon, \quad (2.10)$$

$$\beta_{2a'} = \frac{E(\{a' - E(a')\}^4)}{\sigma_{a'}^4} - 3 = \frac{3}{5} \frac{3N^2 - 7}{N(N+1)(N-1)} \beta_{2\epsilon} \approx \frac{9}{5} N^{-1} \beta_{2\epsilon} \quad (2.11)$$

であることが求められた。同様に、より高次のモーメントも計算することができる。見かけのトレンドの標準偏差は、内部変動の標準偏差に比例し、かつ近似的にデータ長の  $-3/2$  乗に比例する。この標準偏差の  $N$  依存性は Tiao et al. (1990) や Weatherhead et al. (1998) でも他の導出法により同様の結果が得られている。ここでは新たに尖度も求めた。見かけのトレンドの尖度は、内部変動の尖度に比例し、かつ近似的にデータ長の  $-1$  乗に比例することが分かった。データ長の増加によって 0 に収束する速度は、標準偏差よりも尖度の方が遅い。

図 2.1 は見かけのトレンドの標準偏差  $\sigma_{a'}$  と尖度  $\beta_{2a'}$  のデータ長  $N$  依存性を表している。実線と点線はそれぞれ  $\sigma_\epsilon = 1$  の時の (2.10) 式と  $\beta_{2\epsilon} = 6$  の時の (2.11) 式の結果を表している。 $N$  が大きくなるにしたがって見かけのトレンドの標準偏差および尖度は 0 に近づいて行くが、標準偏差の方が速く収束する様子が分かる。

理論で求めた結果を乱数を使用したモンテカルロシミュレーション (Monte Carlo simulation; MCS) の結果と比較した。乱数の生成には GSL (Galassi et al.) を利用し、その際の疑似乱数

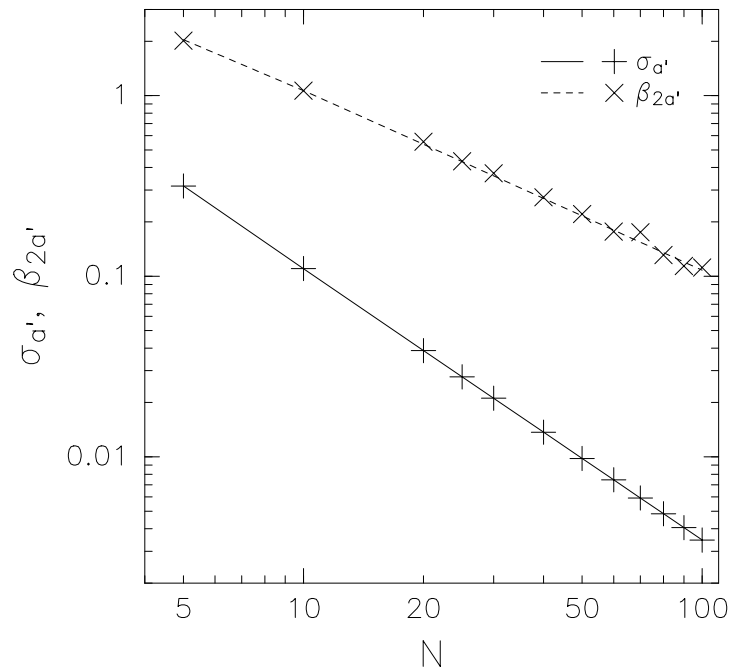


図 2.1: 見かけのトレンドの標準偏差  $\sigma_{a'}$  と尖度  $\beta_{2a'}$  のデータ長  $N$  依存性。実線と + マークが  $\sigma_{a'}$  を、点線と × マークが  $\beta_{2a'}$  を表す。直線が理論値、+ と × のマークがモンテカルロシミュレーションの結果である。内部偏差の標準偏差および尖度がそれぞれ 1 と 6 の場合の結果である。

生成には RANLUX389 と呼ばれるアルゴリズムを採用した (Lüscher, 1994; James, 1994)。この疑似乱数の周期はおよそ  $10^{171}$  である。尺度パラメーター、形状パラメーターともに 1 のワイブル分布  $We(1, 1)$  から取り出した  $N$  個の乱数列における見かけのトレンドの計算を 1,000,000 回繰り返し、得られた見かけのトレンドの標準偏差および尖度を求めた。 $We(1, 1)$  の標準偏差および尖度はそれぞれ 1 と 6 である。MCS の結果は理論の結果とほぼ一致しており (図 2.1)、理論で得られた結果が正しいことが確認できる。

より高次のモーメントの考察も行った。 $\epsilon(n)$  の時系列の順番を逆にすると  $a'$  は正負が逆の値となることから、ある  $a'$  の確率は正負が逆の値の確率と全く同じである。したがって、奇数次のモーメントはすべて 0 であることが分かった。

## 2.3 見かけのトレンドの分布関数

次に見かけのトレンドの分布関数について考える。見かけのトレンドの奇数次のモーメントが0であるのと同じ理由で、見かけのトレンドの確率密度関数 (probability density function; PDF) は偶関数であることが分かる。見かけのトレンドの分布関数は内部変動の分布関数に依存する。まず内部変動の頻度分布が正規分布である場合を考え、そのあと一般的な場合について考える。

### 2.3.1 内部変動が正規分布に従う場合

見かけのトレンド  $a'$  の PDF を  $f_{a'}(x)$  とする。 $f_{a'}(x)$  の特性関数  $\psi_{a'}(\omega)$  を考えることにより、見かけのトレンドの PDF を求めることができた。 $\psi_{a'}(\omega)$  は

$$\begin{aligned}
 \psi_{a'}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) f_{a'}(x) dx \\
 &= E(\exp(i\omega a')) \\
 &= E\left(\exp\left\{i\omega S_{nn}^{-1} \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \epsilon(n)\right\}\right) \\
 &= \prod_{n=1}^N E\left(\exp\left\{i\omega S_{nn}^{-1} \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \epsilon(n)\right\}\right) \\
 &= \prod_{n=1}^N \psi_{\epsilon}\left(S_{nn}^{-1} \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \omega\right)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。ここで  $\psi_{\epsilon}(\omega)$  は  $\epsilon(n)$  の分布の特性関数である。

次に、内部変動  $\epsilon(n)$  が平均  $\mu_{\epsilon}$ 、標準偏差  $\sigma_{\epsilon}$  をもつ正規分布  $N(\mu_{\epsilon}, \sigma_{\epsilon}^2)$  に従うとする。 $\alpha_n = S_{nn}^{-1} \left(n - \frac{N+1}{2}\right)$  としたとき、 $S_{nn}^{-1} \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \epsilon(n)$  は正規分布  $N(\alpha_n \mu_{\epsilon}, \alpha_n^2 \sigma_{\epsilon}^2)$  に従うので

$$\begin{aligned}
 \psi_{a'}(\omega) &= \prod_{n=1}^N \exp\left(i\omega \alpha_n \mu_{\epsilon} - \frac{1}{2} \omega^2 \alpha_n^2 \sigma_{\epsilon}^2\right) \\
 &= \exp\left(i\mu_{\epsilon} \omega \sum_{n=1}^N \alpha_n - \frac{1}{2} \omega^2 \sigma_{\epsilon}^2 \sum_{n=1}^N \alpha_n^2\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2} \omega^2 S_{nn}^{-1} \sigma_{\epsilon}^2\right)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

となる。したがって  $a'$  は平均0、標準偏差  $\sqrt{S_{nn}^{-1} \sigma_{\epsilon}^2}$  をもつ正規分布  $N(0, S_{nn}^{-1} \sigma_{\epsilon}^2)$  に従うことが分かった。ここで得られた正規分布の標準偏差は (2.10) 式と同じであり、また正規分布の PDF は偶関数であり、前に得られた結果と矛盾しない。

図 2.2 は標準正規分布から取り出した乱数による MCS (繰り返し回数 10,000,000 回) での見かけのトレンドのヒストグラムと、理論による PDF である。両者はよくあっており、見かけのト

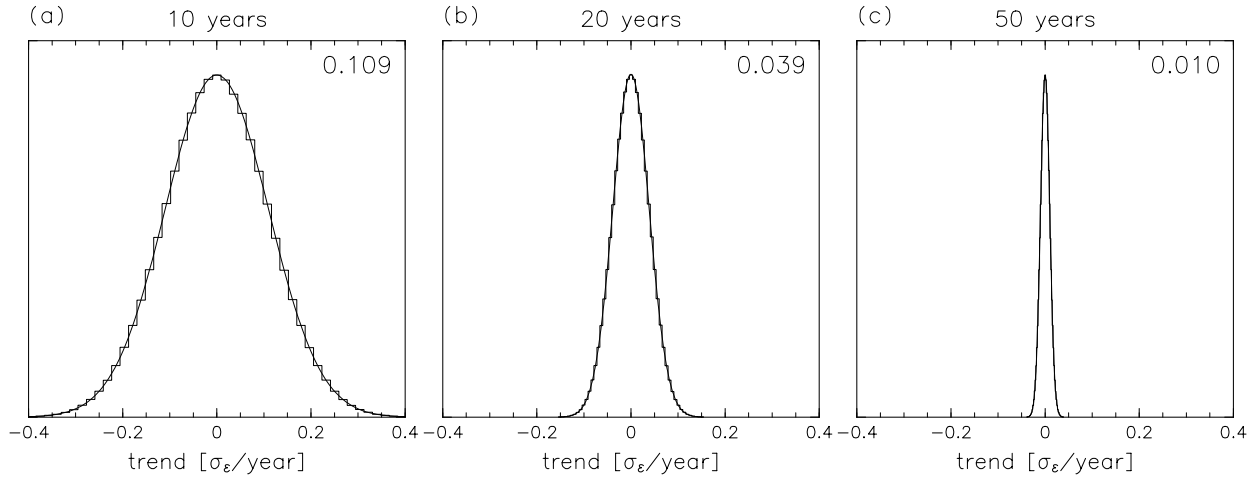


図 2.2: 内部変動が正規分布に従う場合の見かけのトレンドの理論による PDF と、モンテカルロシミュレーションによるヒストグラム。各グラフの右上の数字はモンテカルロシミュレーションで得られた見かけのトレンドの標準偏差である。縦軸はヒストグラムの最大値で規格化したものである。

トレンドが正規分布に従うことが MCS でも確認できる。またデータ長が長いほど 0 付近に集中する様子が分かる。

### 2.3.2 一般的な場合

次に一般的な場合を考える。見かけのトレンド  $a'$  をその標準偏差  $\sigma_{a'}$  で規格化したものを  $a'_s$  とする;

$$a'_s = \frac{a'}{\sigma_{a'}} = \frac{a'}{\sqrt{S_{nn}^{-1}}\sigma_\epsilon}. \quad (2.14)$$

標本平均についてのエッジワース展開の議論 (A.2.2 節参照) の類推で、 $a'_s$  の累積分布関数 (cumulative distribution function; CDF)  $F_{a'_s}(x)$  のエッジワース展開を考えた。 $F_{a'_s}(x)$  のエッジワース展開を求めると、

$$F_{a'_s}(x) = \Phi(x) + \sum_{l=1}^{\infty} Q_l(x)\phi(x)N^{-\frac{1}{2}l}, \quad (2.15)$$

$$Q_{2m-1}(x) = 0, \quad (2.16)$$

$$Q_2(x) = -\frac{3}{40} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} H_3(x) = -\frac{3}{40} \beta_{2\epsilon}(x^3 - 3x),$$

$$Q_4(x) = -\frac{3}{560} \frac{\kappa_6}{\kappa_2^3} H_5(x) - \frac{9}{3200} \frac{\kappa_4^2}{\kappa_2^4} H_7(x) \quad (2.17)$$

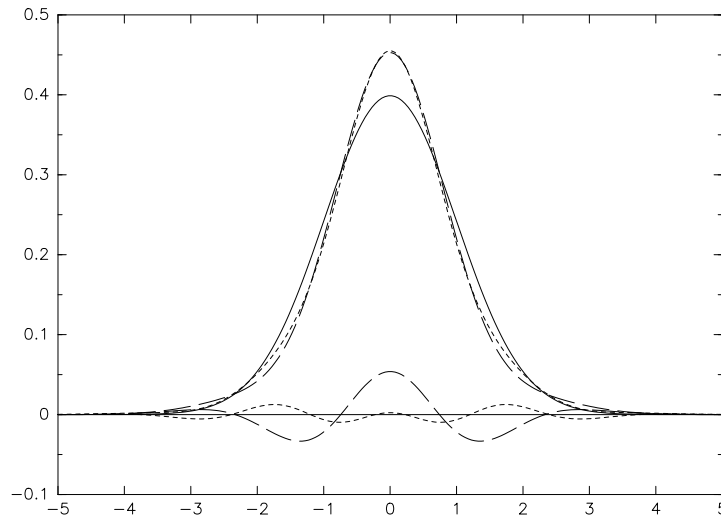


図 2.3:  $N = 10, \kappa_4/\kappa_2^2 = 6, \kappa_6/\kappa_2^3 = 125$  のときの (細破線)  $l = 2$  と (細点線)  $l = 4$  のエッジワース展開の各項と、(太実線) 正規分布、(太破線)  $l = 2$  までの和、(太点線)  $l = 4$  までの和で得られた  $a'_s$  の PDF。

となった (導出は B.2.3 節参照のこと)。ここで  $H_k(x)$  は  $k$  番目のエルミート多項式、 $\kappa_k$  は  $\epsilon(n)$  の  $k$  番目のキュムラント、 $m$  は正の整数である。 $Q_l(x)$  は  $2l - 1$  乗の多項式であり、その係数は  $\epsilon(n)$  の最初の  $l + 2$  個のキュムラントに依っている。CDF を微分することにより、 $a'_s$  の PDF  $f_{a'_s}(x)$  の同様の展開も求めた;

$$f_{a'_s}(x) = \phi(x) + \sum_{l=1}^{\infty} R_l(x) \phi(x) N^{-\frac{1}{2}l}, \quad (2.18)$$

$$R_{2m-1}(x) = 0, \quad (2.19)$$

$$R_2(x) = \frac{3}{40} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} H_4(x) = \frac{3}{40} \beta_{2\epsilon} (x^4 - 6x^2 + 3),$$

$$R_4(x) = \frac{3}{560} \frac{\kappa_6}{\kappa_2^3} H_6(x) + \frac{9}{3200} \frac{\kappa_4^2}{\kappa_2^4} H_8(x). \quad (2.20)$$

図 2.3 は PDF の展開の  $l = 2, 4$  の各項とその  $l$  までの和で得られた PDF の例である。 $l$  が大きくなると腹の数が多くなり、より複雑な分布を表すことができることが分かる。また  $l$  が大きいほどその項の振幅が小さく、分布への寄与が小さくなっている。

見かけのトレンドの分布はデータ長が大きくなるにつれて漸近的に正規分布に収束し、その収束の速度は  $O(N^{-1})$  である。(cf. 中心極限定理)。一般に、ある分布に  $N^{-l/2}$  のオーダーで収束する場合、その分布は  $l$  次の正確度をもつという。見かけのトレンドに関しては、正規分布は 2 次の正確度をもっていることが分かる。エッジワース展開により正規分布よりも正確度が大き

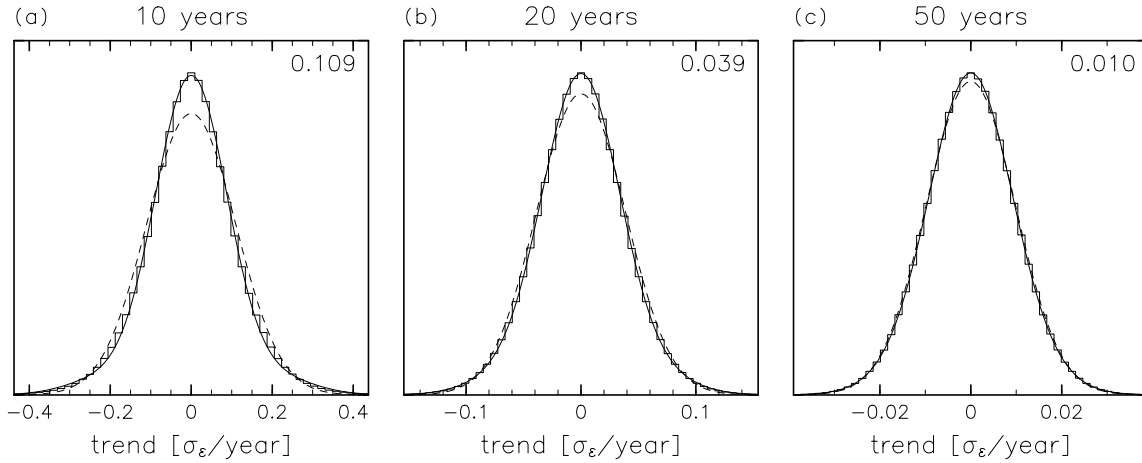


図 2.4: 内部変動が  $We(1,1)$  に従う場合の見かけのトレンドの 4 次の正確度をもつ PDF (実曲線) と、モンテカルロシミュレーションによるヒストグラム。標準偏差が同じ正規分布の PDF を破線で表している。各グラフの右上の数字はモンテカルロシミュレーションにおける見かけのトレンドの標準偏差である。

な分布関数を求めることができる。大きな  $l$  までの展開項の和で得られた分布関数ほど正確度が大きくなり収束の速度が大きくなる。 $l$  が偶数の場合、正確度は  $l+2$  次である。エッジワース展開により分布関数を求める場合には内部変動のいくつかのキュムラント、つまりモーメントが必要となる。内部変動の標準偏差と尖度が分かっている場合には、4 次の正確度をもつ分布関数を得ることができる。図 2.4 は  $We(1,1)$  から取り出した乱数による MCS (繰り返し回数 10,000,000 回) での見かけのトレンドのヒストグラムと、4 次の正確度をもつ PDF である。 $N = 10$  の場合に裾の尾の部分で少し違いがみられるものの、両者は良い一致をみせており、この  $l = 2$  までの近似、つまり  $O(N^{-1})$  までの近似で良いことが分かる。 $N$  が大きくなるにつれて、見かけのトレンドの分布が正規分布に近づいていく様子が見られる。 $N = 50$  でも分布の頂点付近では正規分布との差が見られるが、 $N = 100$  ではその差はほとんど見えなくなる (図は省略)。

$F_{a'_s}(x)$  と標準正規分布の CDF の差  $|\Delta F(x)|$  ( $= |F_{a'_s}(x) - \Phi(x)|$ ) の最大値  $|\Delta F(x)|_{\max}$  は (2.15), (2.16) 式から近似的に

$$|\Delta F(x)|_{\max} \approx \left| Q_2(x)\phi(x)N^{-1} \right|_{\max} = \frac{3}{40}N^{-1} \left| \beta_{2\epsilon}(x^3 - 3x)\phi(x) \right|_{x=\sqrt{3-\sqrt{6}}} \approx 0.04 |\beta_{2\epsilon}| N^{-1} \tag{2.21}$$

となる。図 2.5 は  $|\Delta F(x)|_{\max}$  のデータ長依存性を示している。実線は  $\beta_{2\epsilon} = 6$  の場合の近似的な理論値  $0.04|\beta_{2\epsilon}|N^{-1}$  を表している。× マークは  $We(1,1)$  から取り出した乱数による MCS (繰り返し回数 10,000,000 回) から得た経験分布関数と正規分布の CDF との差の最大値である。データ長が大きくなれば正規分布からのずれが小さくなるのが分かる。 $N = 10$  の場合、理論値と MCS の結果の差が比較的大きく、より多くの展開項を考える必要があることが分かる。

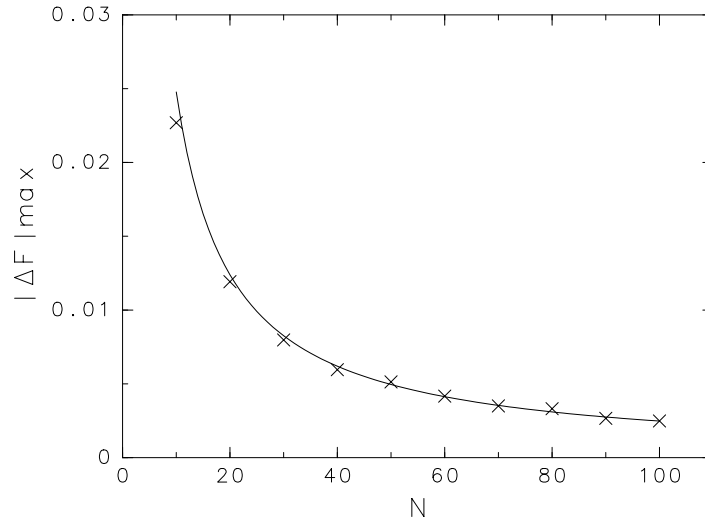


図 2.5:  $|\Delta F(x)|_{\max}$  の  $O(N^{-1})$  までのエッジワース展開による理論曲線 (実線) と、モンテカルロシミュレーションの結果 ( $\times$  マーク)。  $\beta_{2\epsilon} = 6$  の場合の結果である。

より大きな  $N$  では MCS の結果と理論的な近似値はほぼ一致している。(2.21) 式により、正規分布を仮定するために必要なデータ長を見積もることができる。例えば、データ長が  $4|\beta_{2\epsilon}|$  よりも大きい場合、正規分布と見かけのトレンドの CDF の差はおよそ 0.01 よりも小さくなる。1% の確率の誤差を無視すると、データ長が  $4|\beta_{2\epsilon}|$  よりも大きければ見かけのトレンドの分布は近似的に正規分布であると考えることができる。

$F_{a'_s}(x)$  の百分位点を  $w_\alpha (= F_{a'_s}^{-1}(\alpha))$  とする。標本平均の議論 (A.2.2 節) の類推により、 $w_\alpha$  のコーニッシュ・フィッシャー展開を求めた (導出は B.2.3 節参照のこと);

$$w_\alpha = z_\alpha + \sum_{l=1}^{\infty} q_l(z_\alpha) N^{-\frac{1}{2}l}, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} q_{2m-1}(x) &= 0, \\ q_2(x) &= -Q_2(x) = \frac{3}{40}\beta_{2\epsilon}(x^3 - 3x), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$q_4(x) = Q_2(x)Q_2'(x) - \frac{1}{2}x\{Q_2(x)\}^2 - Q_4(x). \quad (2.24)$$

ここで  $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$  である。 $z_\alpha = \pm\sqrt{3}$  のとき、 $q_2(x) = 0$  であり、 $\alpha_- = \Phi(-\sqrt{3}) \approx 0.04$ ,  $\alpha_+ = \Phi(\sqrt{3}) \approx 0.96$  である。このとき  $w_\alpha$  は近似的に  $z_\alpha$  と等しくなる。つまり正規分布の 92% 信頼区間  $[z_{0.04}, z_{0.96}]$  と  $a'_s$  の分布の 92% 信頼区間  $[w_{0.04}, w_{0.96}]$  との差は近似的に 0 である。92% よりも高い信頼係数に対しては、係数が 100% に近づくほど信頼区間の差は大きくなる。例えば、正規分布の 99% 信頼区間の幅は  $a'_s$  の分布関数の信頼区間の約  $1 + 0.27\beta_{2\epsilon}N^{-1}$  倍であり、99.9% 信頼区間は約  $1 + 0.59\beta_{2\epsilon}N^{-1}$  倍である。



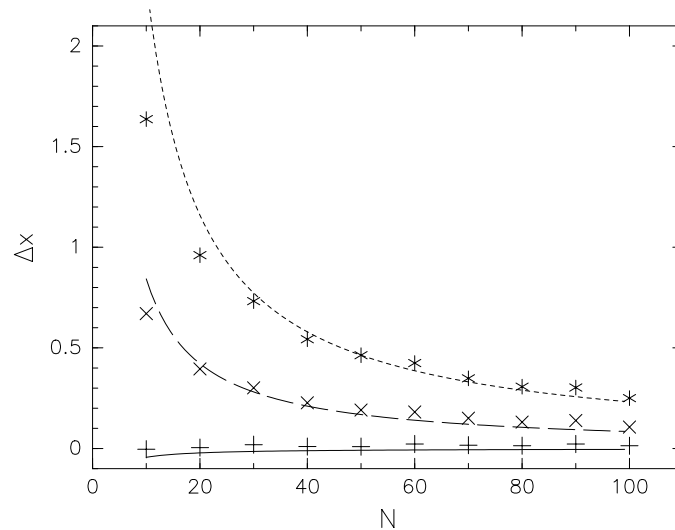


図 2.6:  $a'_s$  の分布と正規分布の信頼区間の差の  $O(N^{-1})$  までのコーニッシュ・フィッシャー展開による理論曲線と、モンテカルロシミュレーションの結果 (\*, ×, + マーク)。下から信頼係数 0.9, 0.99, 0.999 の場合の結果である。

$a'_s$  の分布関数と正規分布の信頼区間の差のデータ長依存性について  $O(N^{-1})$  までのコーニッシュ・フィッシャー展開と MCS による結果を比較した (図 2.6)。データ長が大きくなると信頼区間の差は小さくなる。信頼係数 0.9 の場合はその差はほぼ 0 であり、信頼係数が大きくなるにつれて信頼区間の差も大きくなる。データ長が小さな場合、 $O(N^{-1})$  の近似では誤差が見られ、その誤差は信頼係数が大きいほど大きい。

## 2.4 トレンドの推定と検定

分布関数分かると、誤差を考慮し統計量を範囲で推定する区間推定や、推定値の統計的有意性を検定することができる。区間推定や有意性の検定には分布関数の信頼区間を利用する。一般には、 $t$ -分布やブートストラップ法を用いて信頼区間を求める。エッジワース展開により求めた分布関数も利用できる。本節では、これらの信頼区間の誤差を考え、区間推定および統計的有意性検定の考察を行う。

### 2.4.1 信頼区間の誤差

内部変動が正規分布に従う場合、見かけのトレンド  $a'$  を見かけのトレンドの標準偏差の推定値  $s_{a'}$  で規格化した統計量  $t$  は自由度  $N - 2$  の  $t$ -分布  $t(N - 2)$  に従うことが知られている (証

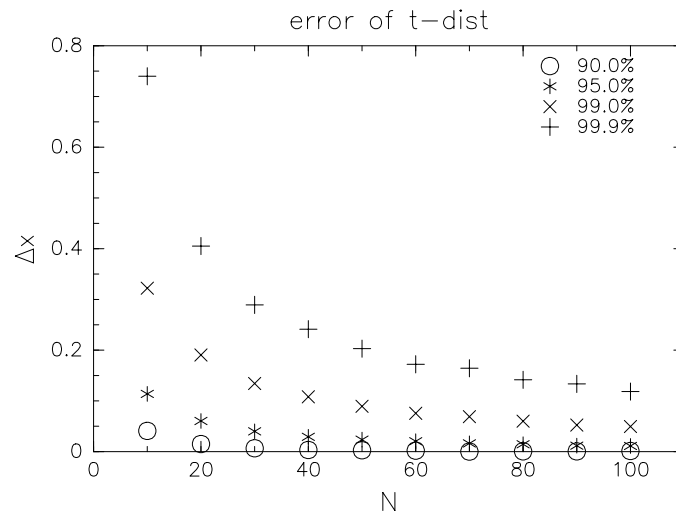


図 2.7: 内部変動が  $We(1,1)$  に従う場合の見かけのトレンドの学生化統計量  $t$  の  $t$ -分布による信頼区間とモンテカルロシミュレーションによる信頼区間との差。

明および  $s_{a'}$  については B.2.4 節参照のこと)。内部変動の頻度分布が正規分布でない場合、 $t$ -分布による信頼区間には誤差がある。図 2.7 は  $t$ -分布による信頼区間と  $We(1,1)$  から取り出した乱数による MCS (繰り返し回数 10,000,000 回) によって得られた経験分布関数による信頼区間との差である。この  $t$ -分布による信頼区間の誤差は正規分布を仮定したことによって生じている。データ長が大きくなると見かけのトレンドの分布は正規分布に近づくため、 $t$ -分布による信頼区間の誤差は小さくなる。90%信頼区間の誤差は小さく、信頼係数が大きくなるほどその誤差は大きくなっている。

見かけのトレンドの学生化統計量が  $t$ -分布に従うためには見かけのトレンドが正規分布に従っていないなければならない。つまり内部変動が正規分布に従っているか、もしくはデータ長が十分大きい必要がある。ブートストラップ法 (A.3 節参照) をつかうとこのような仮定がなくても見かけのトレンドや見かけのトレンドの学生化統計量の分布関数が推定できる。また、同時に推定値  $\hat{a}$  の修正も可能である。ブートストラップ法ではもとの標本の経験分布関数が母集団の分布関数に近いと仮定している。したがって標本が偏っていたりして母集団の分布をよく反映していない場合、ブートストラップ法による結果は大きな誤差をもつ。図 2.8 はブートストラップ法によって推定した信頼区間の誤差を示している。標本が変わると求まる分布関数も変わり、その誤差も変わるため、標本の違いによる誤差の頻度分布とその平均を求め、グラフ化している。平均をみると、 $t$ -分布による誤差 (図 2.7) と同じような傾向がみられる。データ長が小さく信頼係数が高い場合の誤差の平均値は、 $t$ -分布から求めた信頼区間の誤差よりも小さいが、データ長が大きな場合は  $t$ -分布から求めた方が誤差が小さい。また誤差の分布は大きな広がりをもっており、標本によっては誤差が小さな場合もあるが、とても小さくなる可能性もあることが分かる。

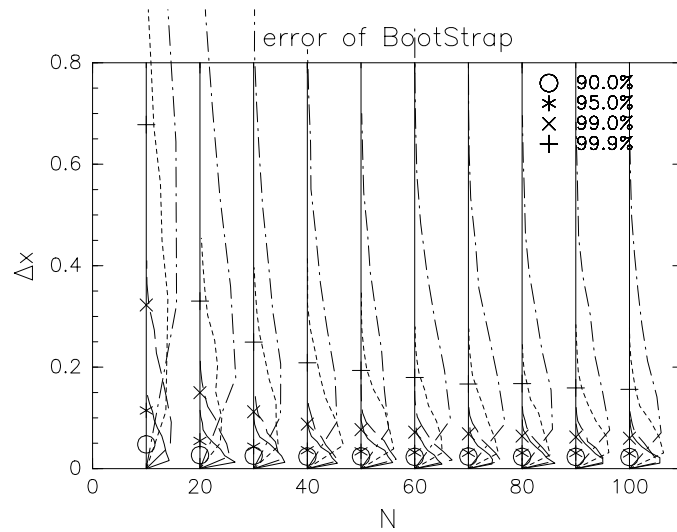


図 2.8: 内部変動が  $We(1,1)$  に従う場合の見かけのトレンドのシュート化統計量のブートストラップ法による信頼区間とモンテカルロシミュレーションによる信頼区間との差。90%、95%、99%、99.9%信頼区間の差の頻度分布をそれぞれ実線、破線、点線、一点鎖線で表し、それらの平均値をそれぞれ  $\circ$ 、 $*$ 、 $\times$ 、 $+$  で表している。

エッジワース展開により求めた近似的な分布関数を使用し、信頼区間を求めることもできる。図 2.9 は  $O(N^{-1})$  までの近似による分布関数から求めた信頼区間の誤差を表している。データ長が大きくなるにしたがって誤差は小さくなるが、 $t$ -分布やブートストラップ法の誤差よりも速く 0 に近づく様子を見ることができる。これはこの分布が 4 次の正確度をもっていることに因っている。エッジワース展開による  $O(N^{-1})$  までの分布関数による区間推定は  $t$ -分布やブートストラップ法を使ったものよりも正確であることが分かる。

### 2.4.2 区間推定と統計的有意性検定

$\hat{a}$  のように母集団の未知の母数  $a$  をある 1 つの値で推定する点推定ではなく、真の値がある確率以上で入る区間を求めることを区間推定という。区間推定はある信頼係数に対する信頼区間を求めることと等しい。よって、区間推定の誤差は信頼区間の誤差と等しく、エッジワース展開を用いた分布関数による区間推定は  $t$ -分布やブートストラップ法による区間推定よりも正確であることが分かる。

分布関数があると有意性の検定もできる。有意性の検定には無帰仮説検定が用いられる。真の値  $a$  が 0 であると仮定し、見積もられた値  $\hat{a}$  が  $100(1 - \alpha)\%$  信頼区間の中になければ元の仮定が危険率  $\alpha$  で棄却できる。つまりこのとき得られた値は統計的に有意であると考えることができる。一般に、正規分布を仮定し、 $t$ -分布を使用した  $t$ -検定がよく使われる。最近ではブート

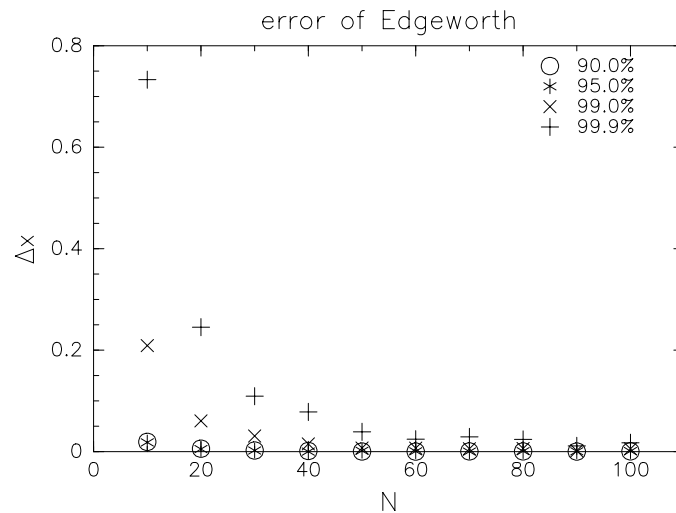


図 2.9: 内部変動が  $We(1,1)$  に従う場合のエッジワース展開の  $O(N^{-1})$  までの分布関数による信頼区間とモンテカルロシミュレーションによる信頼区間との差。

ストラップ法によって分布関数を得るブートストラップ検定もよく行われている。エッジワース展開により求めた近似的な分布関数を使用した検定も行うことができる。ここではこの検定をエッジワース検定と呼ぶことにする。信頼区間の誤差が小さいことにより、 $t$ -検定やブートストラップ検定よりもエッジワース検定の方が、より正確に有意性の検定をすることができる。

## 2.5 結論

本章では、確率統計理論により見かけのトレンドの性質を考察し、得られた結果をモンテカルロシミュレーションにより確認した。線型トレンドとランダムな内部変動を含むモデルを考え、最小二乗法を使ってトレンドを見積もった。

まず見かけのトレンドのモーメントを求めた。平均、歪度など奇数次のモーメントはすべて0である。見かけのトレンドの標準偏差、尖度はそれぞれ内部変動の標準偏差、尖度に比例し、かつ近似的にそれぞれデータ長の  $-3/2$  乗、 $-1$  乗に比例する。

次に見かけのトレンドの分布関数を求めた。内部変動が正規分布に従う場合は見かけのトレンドは正規分布に従うことが分かった。一般的な場合、見かけのトレンドの分布関数のエッジワース展開を求めた。見かけのトレンドの分布関数はデータ長の  $-1$  乗のオーダーで正規分布に収束する。エッジワース展開を使うと正規分布よりも正確度が高い分布関数を求めることができる。内部変動の標準偏差および尖度が分かっている場合、4次の正確度をもつ分布関数を求めることができる。

見かけのトレンドの累積分布関数と正規分布の累積分布関数の差の最大値はおよそ  $0.04|\beta_{2\epsilon}|N^{-1}$  であり、これにより正規分布の仮定に必要なデータ長を見積もることができる。例えば、1%の確率の誤差を無視すると、データ長が  $4|\beta_{2\epsilon}|$  よりも長い場合は見かけのトレンドの頻度分布を正規分布と見なすことができる。

見かけのトレンドの分布関数の百分位数をコーニッシュ・フィッシャー展開により得た。92%よりも高い信頼係数では、係数が100%に近づくとつれて、正規分布と見かけのトレンドの分布関数の信頼区間の差が大きくなる。高い信頼係数を用いる場合は、特に正規分布の仮定の妥当性に注意する必要がある。

一般的に見かけのトレンドの分布関数が正規分布であると仮定することが多い。この場合学生化した値は  $t$ -分布に従うため、 $t$ -分布を用いて区間推定や推定値の統計的有意性の検定を行うことができる。しかし、データ数が小さな場合や内部変動が大きな尖度をもっている場合は正規分布の仮定が成り立たず、 $t$ -分布を使うことはできない。特に信頼係数が高い場合の結果に大きな誤差が生じる。別の方法としてブートストラップ法があり、これは正規分布の仮定は必要なく区間推定や検定を行うことができる。しかし、経験分布関数を使用するためデータが偏っている場合など誤差が大きくなる。エッジワース展開を使えば正規分布よりも正確な分布関数を求めることができ、その分布関数を用いて区間推定や有意性の検定を行うことができる。 $O(N^{-1})$  までの展開から得た分布関数による信頼区間は  $t$ -分布やブートストラップ法を使ったものよりも誤差が小さく、より正確に区間推定や統計的有意性の検定を行うことができる。



# 第3章 大気内部変動のモーメントに関する 数値実験

見かけのトレンドは内部変動に依存しており、見かけのトレンドの性質を知るためには内部変動の性質を知ることが必要である。大気内部変動には非正規分布に従うものが多くあり、内部変動による見かけのトレンドの分布関数を得るためには、そのいくつかのモーメントを知る必要がある。また、大気内部変動の分布関数は経度や緯度、高度、季節などによって異なっており、内部変動の季節、空間分布を知る必要がある。現実大気データのデータ長は、内部変動を調べるためには十分でないことが多い。本章では、物理過程などを単純化した3次元大気循環モデルを用いて長期間積分実験を行い、得られた15,200年という長期間のデータを用いて、標本モーメントのデータ長依存性および内部変動のモーメントの空間・季節分布を調べ、モデル内大気内部変動の性質を押さえる。

## 3.1 モデルと実験設定

使用したモデルは Taguchi and Yoden (2002a) と同じものである。このモデルは3次元大気ブリミティブ方程式モデル AGCM5.3 (Swamp Project, 1998) の物理過程を単純化したものである。水平分解能は三角切断 T21 であり、鉛直方向は地表から中間圏まで42層である。

雨、放射、境界層等のいくつかの物理過程を単純化した。水を含まない乾燥大気を仮定し、放射過程はニュートン加熱・冷却で置き換えた。放射平衡温度場は高度  $z$  と緯度  $\phi$  の関数とし、赤道上での静的安定度  $N^2$  を

$$N^2(z) = \begin{cases} 1.3 \times 10^{-4} \text{s}^{-2} & (z < 12 \text{km}) \\ 5.0 \times 10^{-4} \text{s}^{-2} & (12 \text{km} \leq z < 50 \text{km}) \\ 2.5 \times 10^{-4} \text{s}^{-2} & (50 \text{km} \leq z) \end{cases} \quad (3.1)$$

として作成した。図3.1 (左) は北半球の冬至における放射平衡温度場  $T_w(\phi, z)$  である。

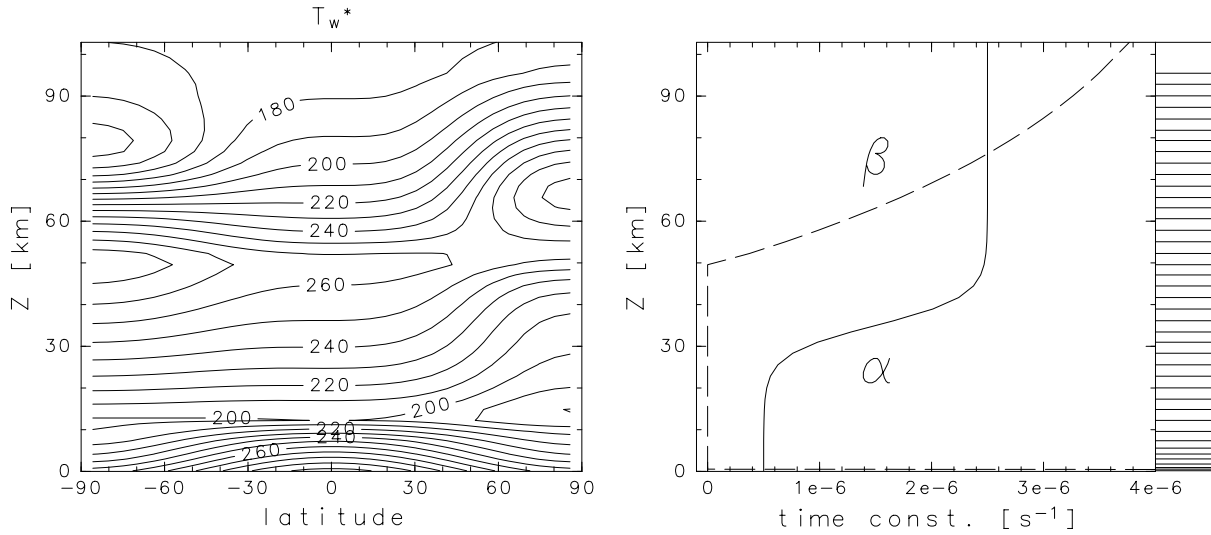


図 3.1: 標準実験の北半球の冬至における放射平衡温度場 (左) と気温 ( $\alpha$ ) とレーリー摩擦 ( $\beta$ ) の緩和時間定数 (右)。右図の右の線分は鉛直格子点の位置を表している。

各時刻  $t$  における放射平衡温度場  $T^*$  は

$$T^*(\phi, z, t) = \frac{1 + \cos(2\pi t/360\text{day})}{2} T_w^*(\phi, z) + \left\{ 1 - \frac{1 + \cos(2\pi t/360\text{day})}{2} \right\} T_s^*(\phi, z) \quad (3.2)$$

とした。ここで  $T_s^*(\phi, z)$  は北半球の夏至の放射平衡温度場  $T_s^*(\phi, z) (= T_w^*(-\phi, z))$  である。

ニュートン加熱・冷却の熱緩和時間定数  $\alpha$  は

$$\alpha = \left( 1.5 + \tanh \frac{z - 35\text{km}}{7\text{km}} \right) \times 10^{-6} s^{-1} \quad (3.3)$$

とした (図 3.1 右)。

下端境界層と上層のスポンジ層では、風速に対してレーリー摩擦を用いた。緩和時間定数  $\beta$  は、最下層で  $1/0.5 \text{ 日}^{-1}$ 、 $z > 50\text{km}$  では

$$\beta = \left\{ 1.02 - \exp \left( \frac{50\text{km} - z}{40\text{km}} \right) \right\} \times 5 \times 10^{-6} s^{-1} \quad (3.4)$$

とした。

渦度、発散、温度に対して水平粘性を  $\nabla^4$  の形でいれ、その緩和時間は最大波数 21 に対して 2 日とした。



モデルの地表には北半球のみに東西波数 1 のサイン関数型の地形

$$h(\lambda, \phi) = 4h_0 \sin^2 \phi (1 - \sin^2 \phi) \sin(\lambda) \quad (3.5)$$

を入れ、 $h_0 = 1000\text{m}$  とした。

標準実験では、擾乱を加えた 240K の静止等温大気を初期値とし、1 年間のスピナップの後 1,520 年積分した。初期擾乱を変え全部で 10 ランの実験を行い、合計 15,200 年分という長期間のデータを得た。解析には、北半球の月平均した帯状平均気温を使用した。

## 3.2 モーメントの推定誤差

大気は非常に複雑な非線型システムであり、大気内部変動のモーメントを正確に求めることはできない。したがって、そのモーメントをデータから推定する。有限長のデータからモーメントを推定するには誤差が生じるため、内部変動のモーメントを知るには標本による推定誤差の性質を知っておく必要がある。その誤差は内部変動の頻度分布およびデータ長に依存している。ここでは長期間積分の結果を用いることにより、大気変動におけるモーメントの見積もり誤差の性質を調べる。

### 3.2.1 内部変動の分布関数

標本によるモーメントの推定誤差は母集団の分布関数に依存する (A.2 節参照)。したがってモーメントの推定誤差を考えるためには、まず内部変動の頻度分布を知っておく必要がある。図 3.2 は、15,200 年分のデータから求めた極域成層圏での気温のヒストグラムと Taguchi and Yoden (2002b) と同様に 1,000 年分のデータから求めたものである。平均値は、夏季に高く冬季に低く、なめらかな季節変化をしている。

内部変動の頻度分布は季節によって大きく異なっている。標準偏差は夏季に比べて冬季に大きく、7 月には 0.4K であるのに対し、1 月では 15.5K である。冬季には、大部分の年は放射平衡温度近くに集中しているが、大きく離れた高い値をとる年があり、頻度分布の裾の尾が高温の方へ長く伸びている。そのため平均値は最頻値よりも高い値となっている。この放射平衡温度から離れた高温は成層圏突然昇温現象に因るものであり、その発生が冬季の大きな年々変動の原因となっている。

15,200 年と 1,000 年で求めたヒストグラムの形はおおよそ一致しているが、1,000 年では形が粗く、細かな頻度分布の議論には長さが十分でない可能性がある。一方、15,200 年のデータではヒストグラムはなめらかであり、Taguchi and Yoden (2002b) で指摘されている冬季の頻度分

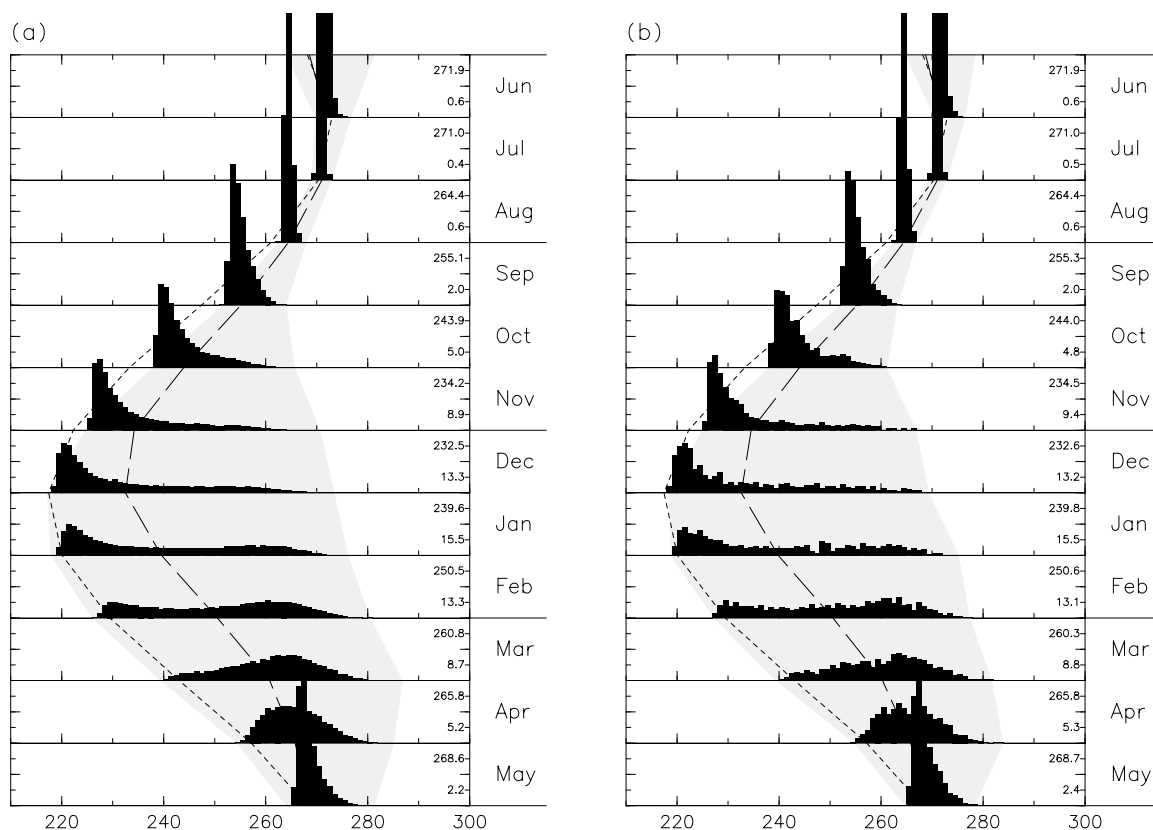


図 3.2: 北緯 86 度の 2.6hPa における気温のヒストグラムの季節依存性。左図は 15,200 年分、右図は 1,000 年分のデータから求めたものである。各月の平均値を破線で、放射平衡温度の月平均値を点線で表している。シェードは各月の最大値と最小値の範囲を示している。各月の右の数字は上から平均値と標準偏差である。単位は K である。

布の二山の構造もはっきりと確認できる。また、冬季から春季の最大値が 1,000 年に比べて 5K ほど上がっている。このような極端な現象には特に長期間のデータが必要であることが分かる。

図 3.3 は成層圏および対流圏における標準化した極域気温のヒストグラムである。対流圏では、変動は一年中正規分布に近いことが分かる。一方、成層圏では、夏季には正規分布に近いが、冬季には正規分布から大きくずれている。また、成層圏の冬季でも、前半と後半で頻度分布に大きな違いがある。秋から初冬には、 $-0.8$  付近に最頻値があり、頻度分布は鋭く尖っている。裾の尾は正の方向に長く伸びており、負の方向には頻度分布は急速に 0 に近づいている。したがって、歪度が大きく、尖度が正である。それに対し晩冬では、二山の構造が見られ、分布の裾の尾は両側とも短い。したがって、歪度は小さく、尖度は負となっている。この季節は、季節の移り変わりの時期であり、その推移は突然昇温により短期間に起る。したがって、この季節には冬型の温度構造の年と、夏型の年とが混在しており、年々の季節進行の違いにより温度分布の二山の構造が作られていると考えられる。

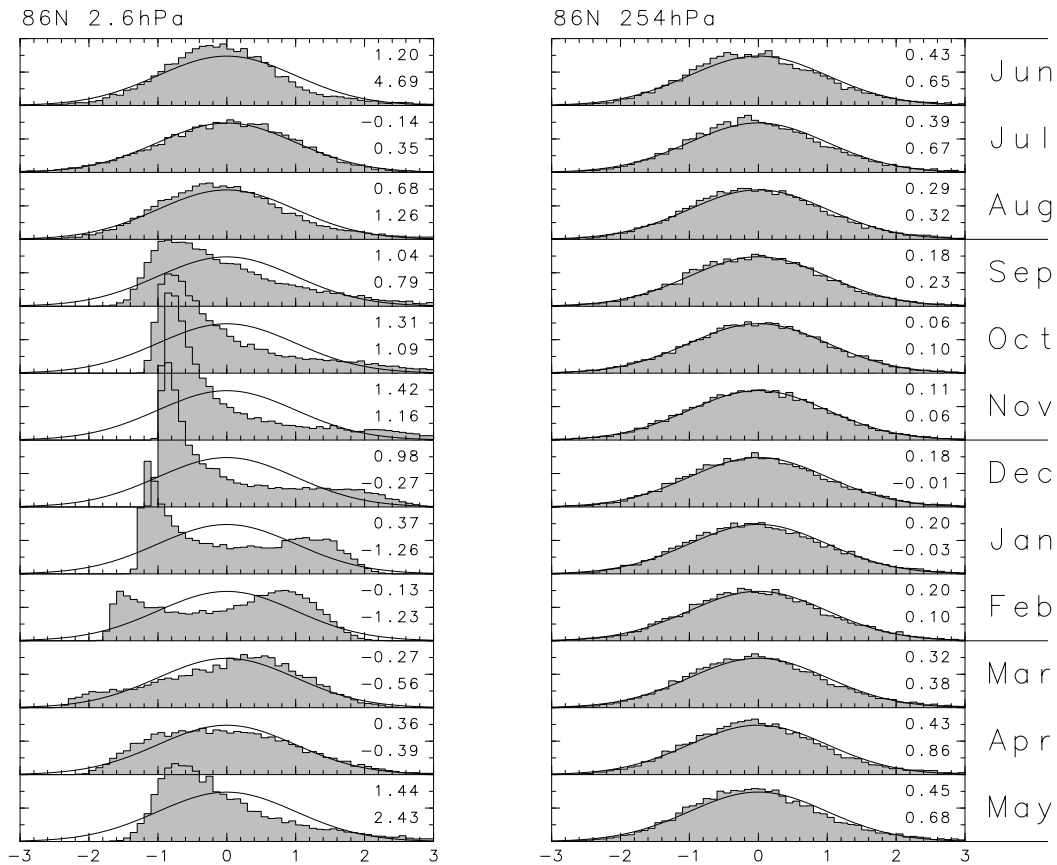


図 3.3: 2.6hPa および 254hPa における標準化した極域気温のヒストグラム。実線は正規分布を表している。各月の右の数字は上から歪度と尖度である。

### 3.2.2 標本モーメントの誤差の分布関数

有限長のデータから求めたモーメントの誤差について考える。重複しない連続した  $N$  年分のデータを  $[1, 520/N] \times 10$  組取り出し、それぞれ標本モーメントを求めた。ここで  $[x]$  は  $x$  を越えない最大の整数である。内部変動の頻度分布による標本モーメントの誤差の違いをみるため、異なる頻度分布をもつ成層圏と対流圏における冬季の極域気温を考える。

図 3.4 は、標本平均の 15,200 年データから求めた平均からのずれのヒストグラムである。データ長  $N$  が大きいほど標準偏差は小さくなる。それぞれの  $N$  での誤差の標準偏差は (A.102) 式で得られた理論とほぼ一致しており、データ長の平方根に反比例している。したがって、標本平均のおおよその誤差を見積もることができる。例えば、標準偏差が 15K 程度の冬季成層圏では、20 年のデータで 3.4K 程度、50 年のデータでは 2.1K 程度である。中心極限定理により  $N$  が大きな場合は標本平均の頻度分布は正規分布に近づくことが分かっている。ここでは、 $N = 10$  でも標本平均の頻度分布は成層圏、対流圏ともにほぼ正規分布である。エッジワース展開 (A.107 式) により標本平均の分布関数が得られるが、 $O(N^{-1})$  までのエッジワース展開による分布関数

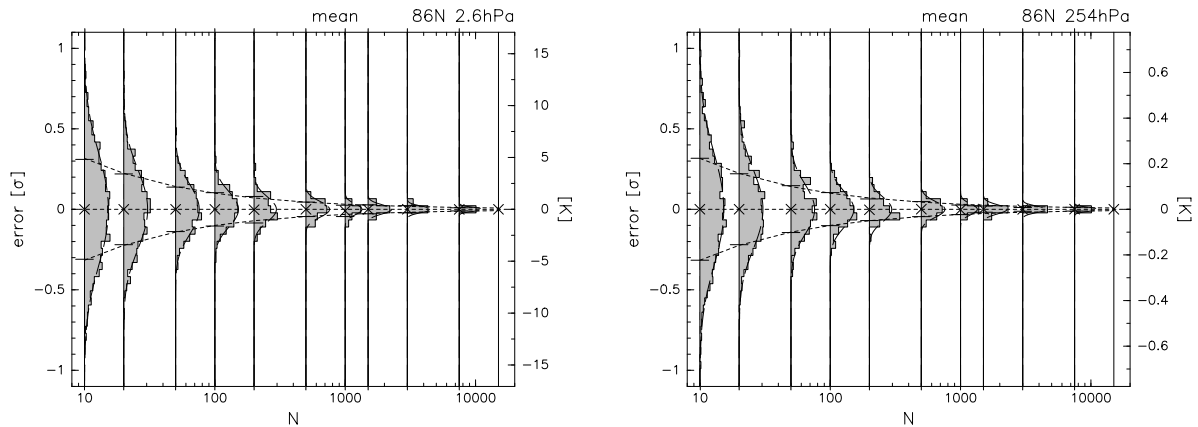


図 3.4: (左)2.6hPa および (右)254hPa における 1 月の極域気温の各データ長  $N$  で求めた標本平均の 15,200 年データから求めた平均値からのずれのヒストグラム。値は 15,200 年データから求めた標準偏差で規格化している。破線は正規分布を表している。各  $N$  での平均、標準偏差をそれぞれ  $\times$  印、 $-$  印で表しており、(A.102) 式で得られる標準偏差の理論曲線を点線で示している。

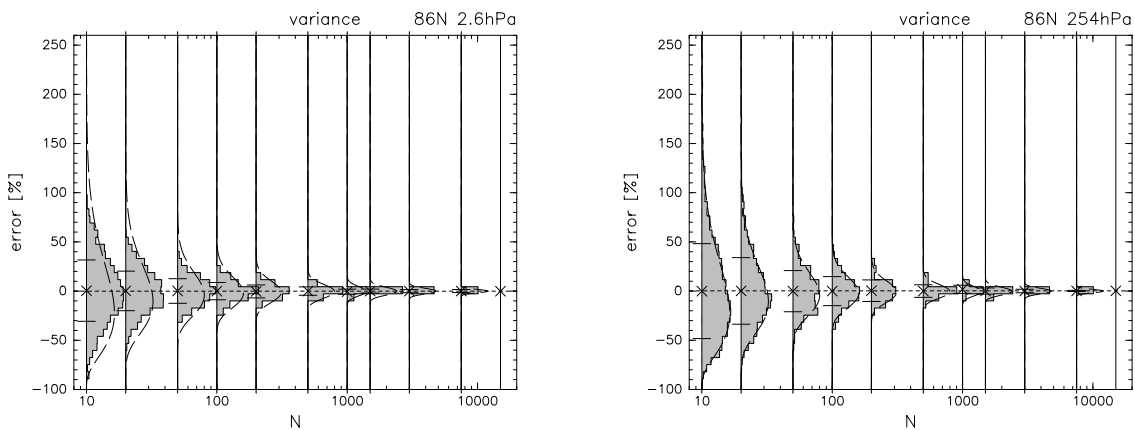


図 3.5: (左)2.6hPa および (右)254hPa における 1 月の極域気温の各データ長  $N$  でもとめた標本分散の 15,200 年データから求めた分散に対する割合のヒストグラム。破線は自由度  $N - 1$  の  $\chi^2$  分布を表している。各  $N$  での平均、標準偏差をそれぞれ  $\times$  印、 $-$  印で表している。

は  $N = 10$  のときでも正規分布とほとんどかわらない (図は省略)。

図 3.5 は標本分散の誤差のヒストグラムである。平均値はすべての  $N$  で 15,200 年データから求めた値とほぼ一致している。標本分散の誤差もデータ長が大きくなるにしたがって小さくなり、標準偏差はおよそデータ長の平方根に反比例している (A.103 式)。2.6hPa における標本分散の標準偏差は 254hPa におけるものよりも小さい。これは 2.6hPa における尖度が負であることに因る。標本分散の誤差は  $N \sim 100(\beta_2 + 2)$  のとき 10% 程度である。標準正規分布に従う  $N$

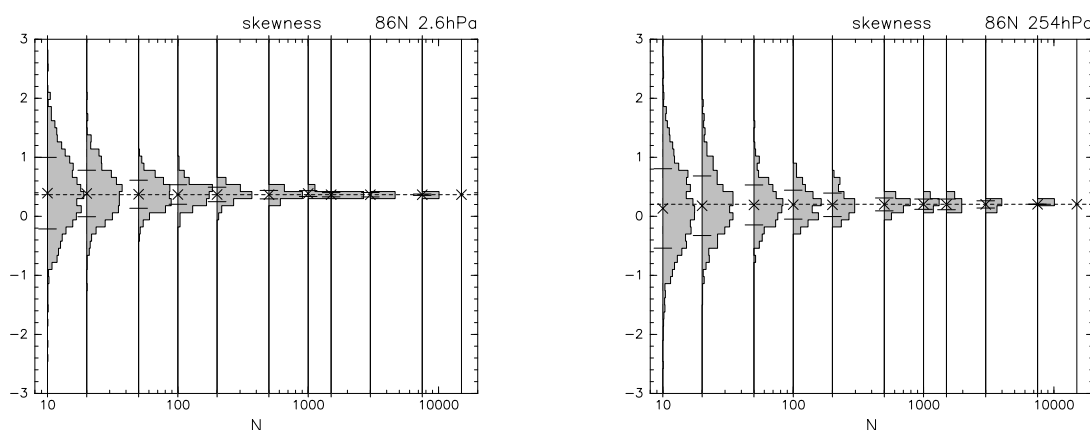


図 3.6: (左)2.6hPa および (右)254hPa における 1 月の極域気温の各データ長  $N$  でもとめた標本歪度のヒストグラム。各  $N$  での平均、標準偏差をそれぞれ  $\times$  印、 $-$  印で表している。点線は 15,200 年データでもとめた歪度を表している。

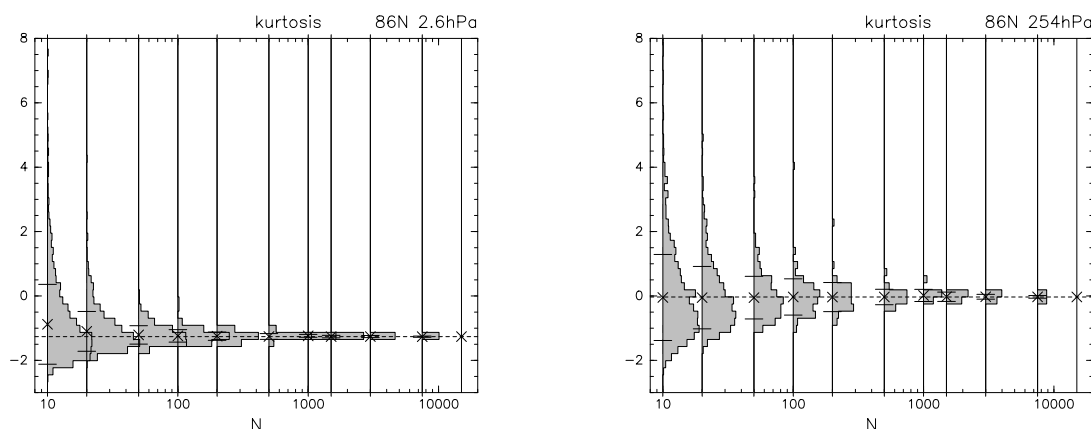


図 3.7: 尖度である以外図 3.6 と同じ。

個の標本の二乗和の分布は自由度が  $N - 1$  の  $\chi^2$  分布,  $\chi^2(N - 1)$ , となる。この分布は歪度をもっており、最頻値は平均よりも小さく、正の方向に分布の裾の尾が長く延びている。対流圏では、内部変動の頻度分布が正規分布に近いため、標本分散の頻度分布は  $\chi^2$  分布とほぼ一致している。一方、成層圏では、内部変動が正規分布からずれているため、標本分散の分布は  $\chi^2$  分布からずれている。

次に歪度をみる (図 3.6)。データ長が大きくなると誤差が小さくなる傾向は同じである。歪度は不偏推定値ではないため、 $N$  が小さなときの平均値は全データから求めた値からずれている。標準偏差の  $N$  依存性を最小二乗法により見積もると、およそ  $2N^{-0.55}$  となる。誤差は  $N \sim 250$  で 0.1 程度となる。誤差の分布に歪みはあまりみられず、成層圏、対流圏とも大きな違いはみられない。

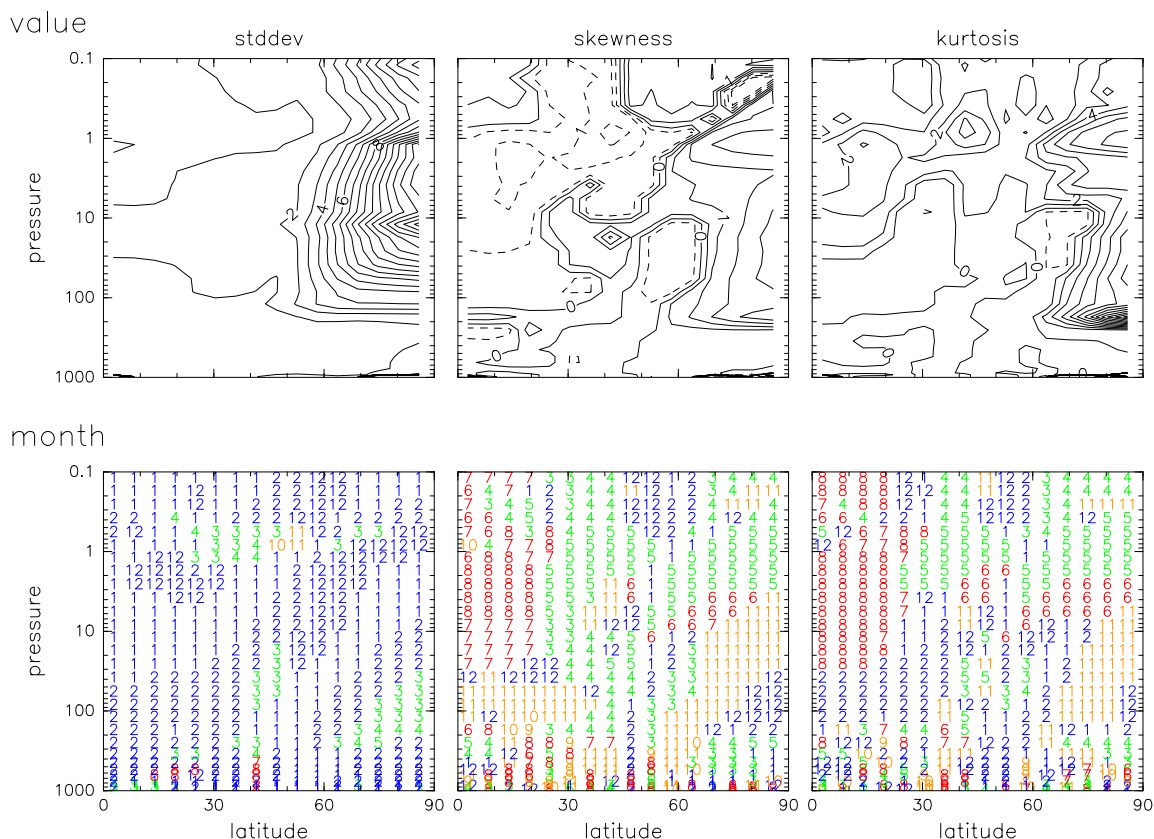


図 3.8: 帯状平均気温の (左) 標準偏差および (中) 歪度、(右) 尖度の (下) 絶対値が最大となる月と (上) その最大値の子午面断面図。等値線間隔は標準偏差、歪度、尖度にたいしてそれぞれ 1K、0.5、1。

尖度もデータ長が大きくなると誤差は小さくなる (図 3.7)。歪度と同様に、尖度も不偏推定値でなく、成層圏で  $N$  が小さなときのヒストグラムの平均値は全データから求めた値からずれている。対流圏では、尖度はほぼ 0 であり、平均値もほぼ 0 である。標準偏差を最小二乗法により見積もると、およそ  $4N^{-0.6}$  であり、 $N \sim 500$  で誤差は 0.1 程度である。分布は成層圏、対流圏とも大きな歪みをもっており、最頻値は真の値よりも小さな値である。

### 3.3 モーメントの空間・季節依存性

内部変動の頻度分布は経度や緯度、高度、季節等によって異なっている。本節では 15,200 年長期データを用いて内部変動のモーメントの空間・季節分布について調べる。

図 3.8 は帯状平均気温の年々変動の標準偏差、歪度、尖度の絶対値が最大となる月とその最大

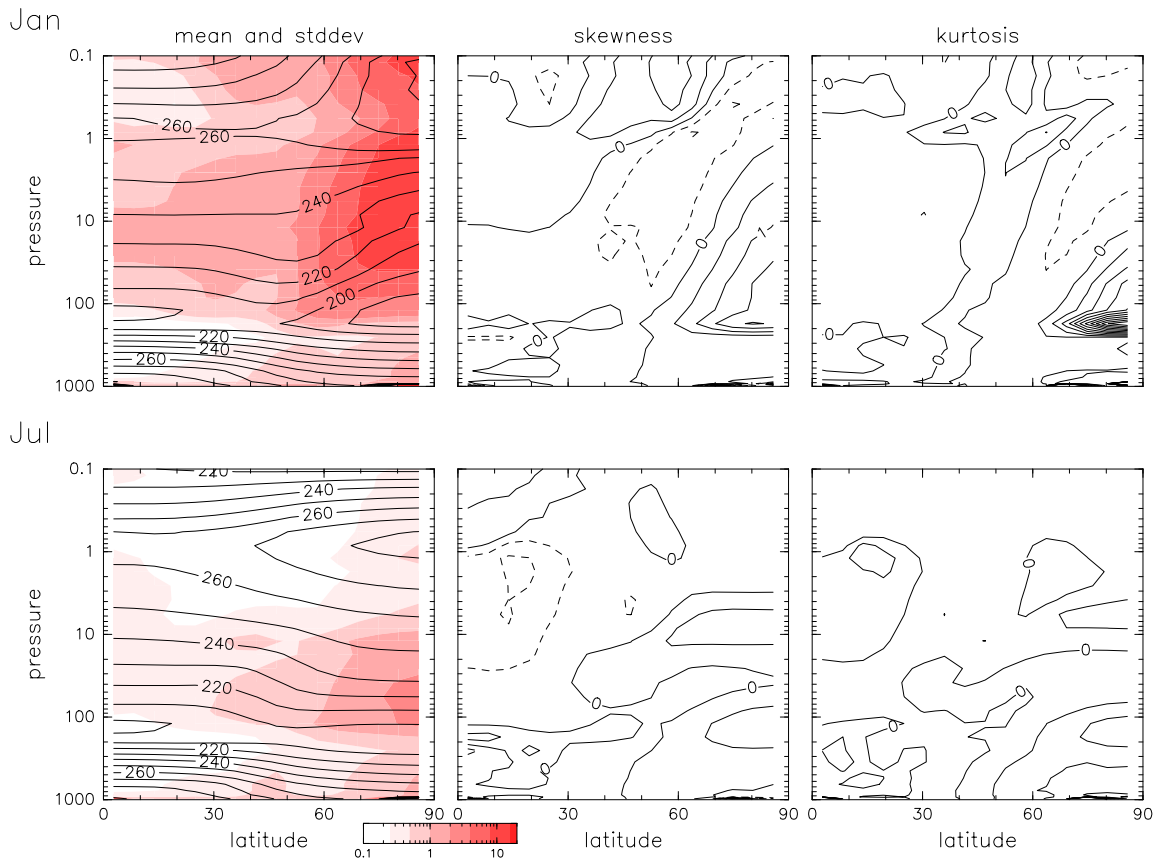


図 3.9: (上)1月および(下)7月における帯状平均気温の(左)平均値と標準偏差、(中)歪度と(右)尖度の子午面断面図。左図の等値線が平均、赤濃淡が標準偏差を表している。等値線間隔は平均、歪度、尖度にたいしてそれぞれ10K、0.5、1。

値の子午面断面図である。標準偏差をみると、年々変動は高緯度成層圏で大きく、最大となる季節はほぼすべての緯度、高度で冬季から春季であることが分かる。また、変動が最大となる月は、極域の1hPaあたりや北緯60度の10hPaあたりでは12月であるが、低い高度ほど、また北ほど遅い月となり、極域の200hPaあたりでは4月であり、高緯度成層圏で変動が最大となる領域が極向きかつ下方に伝播していることが分かる。歪度は高緯度成層圏でおよそ2と比較的大きな正の値をとり、中部成層圏では11月から12月に、1hPaあたりでは5月に、200hPaあたりでは2月に最大となる。冬季極域成層圏の歪度は成層圏突然昇温を反映している(3.2.1節)。北緯40度あたりの上部成層圏から中間圏では春季に大きな負の歪度が見られる。尖度も高緯度成層圏で大きな値となっており、200hPaあたりで最も大きな値となっている。最大となる月も歪度が最大となる月とほぼ同じである。中緯度の上部成層圏で春季に歪度の負が見られた領域でもやや大きな尖度が見られる。

中部および下部成層圏で標準偏差、歪度、尖度が大きくなる1月と、半年逆の7月における帯状平均気温の平均および年々変動の標準偏差、歪度、尖度の子午面断面図を図3.9に示す。標準

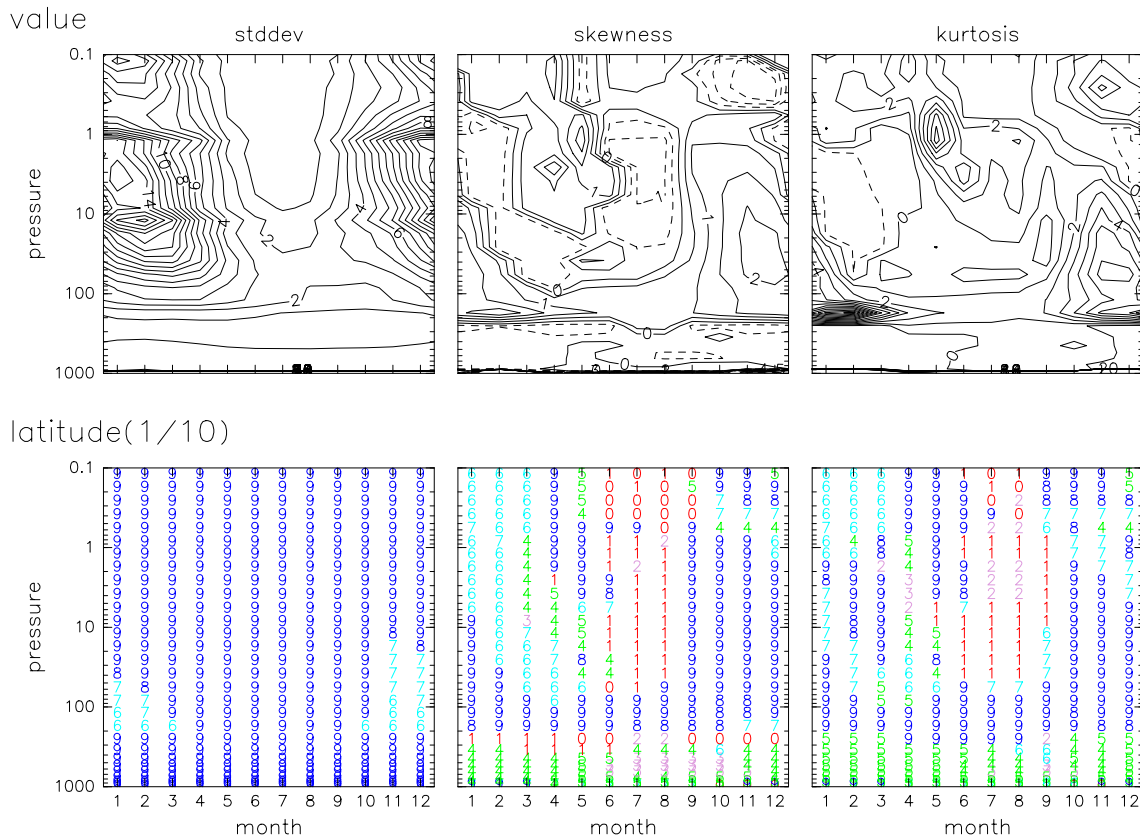


図 3.10: 帯状平均気温の (左) 標準偏差および (中) 歪度、(右) 尖度の (下) 絶対値が最大となる緯度と (上) その最大値の月-高度断面図。下図の数字は北緯を 10 で割ったものである。等値線間隔は図 3.8 と同じ。

偏差がほぼ全領域で冬季に最大となることに関係して、1月の標準偏差の空間分布は図 3.8 の標準偏差の分布とほぼ一致している。1月の標準偏差の最大値は極域中部成層圏で約 15K である。夏季には、最大値は極域下部成層圏で約 3K と冬季に比べ変動は小さく、最大となる高度は低い。冬季の歪度、尖度は極域下部成層圏で正の値であり、下ほど大きく、ともに 200hPa あたりで最大となる。夏季には、歪度と尖度は全領域でおおよそ 0 である。これは夏季には変動が正規分布に近いことを示している。

次に変動の季節変化を見る。図 3.10 は帯状平均気温の各モーメントが最大となる緯度とその最大値である。標準偏差は冬季成層圏で大きく、冬季から春にかけて最大となる高度が下がっているのが見える。この下方伝播は図 3.8 でも見られたものである。夏季の上部成層圏から中間圏では標準偏差は小さい。各月および高度で変動が最大となる緯度はほぼ全域で極域である。ただし下部成層圏では、11月および12月には北緯 60 度で最大となる。歪度と尖度の大きなところはおおむね対応しており、冬季下部成層圏や 5月の 1hPa で大きな値をとっており、その緯度は 90 度であることが分かる。



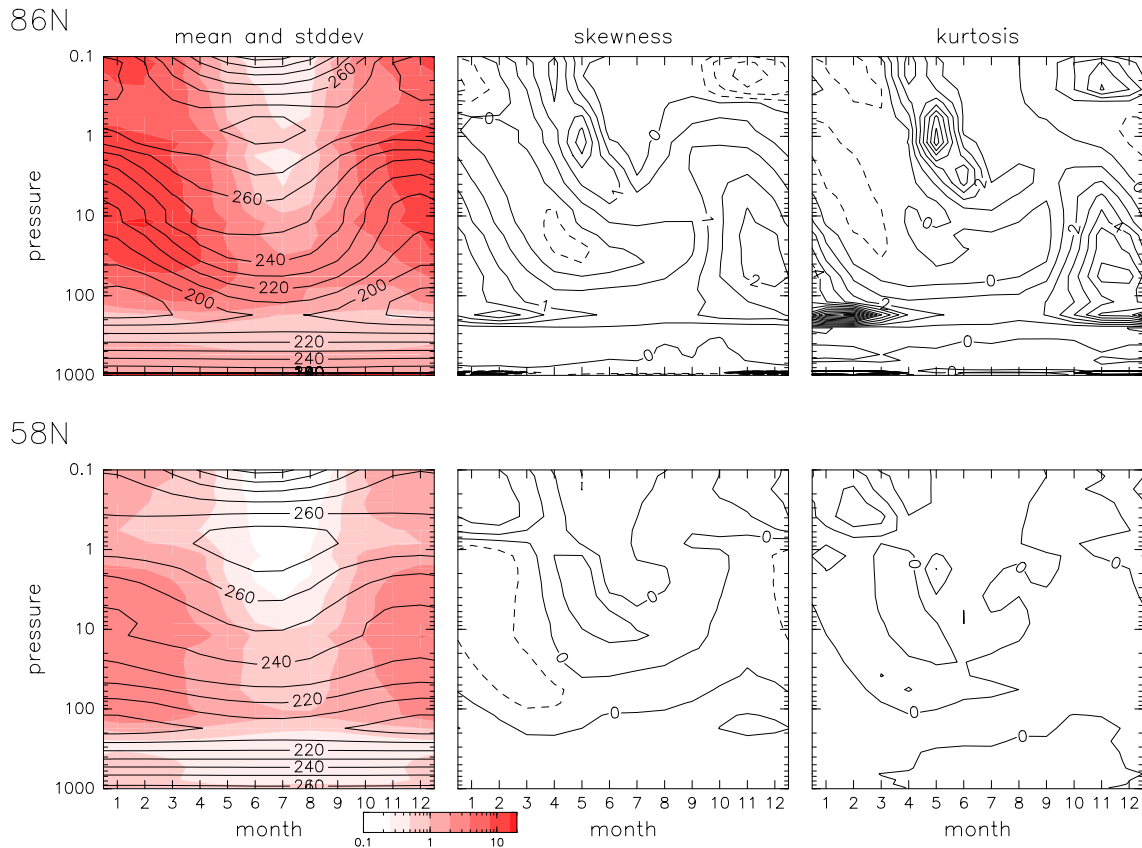


図 3.11: (上) 北緯 86 度および (下) 58 度における帯状平均気温の (左) 平均値と標準偏差、および (中) 歪度、(右) 尖度の月-高度断面図。左図の等値線が平均、赤濃淡が標準偏差を表している。等値線間隔は図 3.9 と同じ。

各モーメントが大きな値をとる極域、ならびに中緯度における各モーメントの月-高度断面を図 3.11 に示す。年々変動が最大となる緯度がほぼ全月および高度で極域であったことに関して、極域での標準偏差の空間・季節分布は図 3.10 の標準偏差の分布とほぼ一致している。標準偏差は 2 月の 12hPa あたりで 16K と最大となり、夏季の中間圏で最小となる。秋季には 1hPa あたりで最大となっているが最大となる領域は夏季には 100hPa あたりまで下がる。中緯度での標準偏差の空間・季節分布は大まかには極域の分布と同じく、冬季成層圏で大きく、夏季上部成層圏および中間圏で小さい。ただし最大となる月は 12 月であり、その最大値は 12hPa あたりで 8K と極域の最大値の半分程度である。また、極域で見られた最大値をとる高度の下方伝播は見られない。歪度と尖度は、極域では冬季成層圏下部および 5 月の 1hPa あたりで大きな値をとっており、両者が大きな領域はほぼ一致している。歪度の最大値はおよそ 2 である。尖度は 2 月の 200hPa あたりで約 12、冬季成層圏で約 6、5 月の 1hPa あたりでは約 7 である。したがってこのような領域では変動の頻度分布は正規分布からずれていることが分かる。一方、中緯度では歪度、尖度ともほぼ 0 であり、変動の頻度分布は正規分布に近いことが分かる。

モデル内大気は非常に複雑な非線型システムであり、その内部変動の分布関数やモーメントを正確に知ることはできないが、15,200年という非常に長期間のデータを用いることで、ほぼ正確に把握できたといえる。

### 3.4 結論

見かけのトレンドは内部変動に依存している。したがって、本章では大気内部変動のモーメントについて3次元大気循環モデルを用いた数値実験により調べた。実験では1,520年数値積分を10ラン行い、合計15,200年分という長期間のデータを得た。解析には月平均した帯状平均気温を用いた。

内部変動のモーメントはデータから求めた標本モーメントで推定するが、標本モーメントには誤差が含まれる。したがって、標本モーメントの誤差の性質を知っておかなければ内部変動のモーメントを正しく知ることはできない。そこでまず標本モーメントの誤差の性質を調べた。標本モーメントの誤差は内部変動の頻度分布に依存している。成層圏突然昇温によって正規分布から大きくずれた頻度分布をもつ冬季極域成層圏気温と、ほぼ正規分布に従う対流圏気温のデータを用いて標本平均、標本分散、標本歪度、標本尖度の誤差の内部変動の頻度分布およびデータ長に対する依存性を調べた。各標本モーメントの誤差の頻度分布の標準偏差はデータ長が大きくなるにしたがって小さくなる。標本平均と標本歪度の誤差の頻度分布は成層圏と対流圏であまり違いが無く、標本分散と標本尖度の誤差の頻度分布には違いがみられる。ここで得られた標本モーメントの誤差のデータ長依存性を用いてモーメントを求めるために必要なデータ長を見積もることができる。

内部変動のモーメントは経度、緯度、高度、季節等に依っており、15,200年データによりその空間、時間依存性を調べた。気温の年々変動はほぼすべての緯度、高度において冬季に最も大きくなる。またほぼすべての月、高度において極域で最も大きい。極域での標準偏差は2月の12hPaで約16Kと最大であり、夏季の上部成層圏および中間圏で小さい。秋季には1hPaで最大であるが、最大となる高度は冬から夏にかけて100hPaあたりまで下降する。中緯度での標準偏差の空間・季節分布は高緯度のパターンとあまり変わらず、冬季成層圏で最大であり、夏季の上部成層圏から中間圏にかけて小さい。ただし、最大となる月は12月であり、その最大値は12hPaで8Kと高緯度の最大値の約半分である。

歪度と尖度は極域の冬季成層圏および5月の1hPaで大きくなっており、両者が大きな領域はほぼ一致している。歪度の最大値はおよそ2である。尖度は極域の2月の200hPaで約12、冬季成層圏でおよそ6、5月の1hPaで約7である。したがって、このような領域では、変動の頻度分布は正規分布からずれていることが分かる。一方、中緯度や夏季では、歪度と尖度はほぼ0であり、内部変動の頻度分布はほぼ正規分布である。

15,200年の長期間データにより、このモデル大気の内部変動のモーメントをほぼ正確に押さえることができた。



## 第4章 トレンドに関する数値実験

第3章でみたモデル大気の内変動は空間・季節に大きく依存していた。したがって、見かけのトレンドも空間・季節に依存していることになる。本章では、外部強制に線型トレンドを与えた実験を行い、大気変動におけるトレンドを調べる。見かけのトレンドを考えるためには内変動を知っておく必要があるが、第3章と同じモデルを用いており、モデル大気の内変動のモーメントは分かっている。また、見かけのトレンドはランダムな内変動に依っているため、試行により見かけのトレンドは異なる。そこで見かけのトレンドのばらつきを見るために、多数のアンサンブル実験を行なった。大気内変動とトレンドの関係の考察を行い、また大気内変動と見かけのトレンドの関係を第2章で得られた理論の結果とあわせて考察する。見積もられたトレンドの統計的有意性の検定にエッジワース検定を用い、既存の検定法の結果を検証する。

### 4.1 実験設定

トレンド実験での北半球の冬至における放射平衡温度場  $T_{wt}^*$  は、標準実験で用いた温度場  $T_w^*$  (図3.1左) から、赤道上の静的安定度  $N^2$  を

$$N^2(z) = \begin{cases} 1.3 \times 10^{-4} \text{s}^{-2} & (z < 12\text{km}) \\ 4.75 \times 10^{-4} \text{s}^{-2} & (12\text{km} \leq z < 50\text{km}) \\ 2.5 \times 10^{-4} \text{s}^{-2} & (50\text{km} \leq z) \end{cases} \quad (4.1)$$

として作成した寒冷化させた温度場  $T_{wc}^*$  (図4.1左) に線形的に変わるようにした;

$$T_{wt}^* = \left(1 - \frac{t}{T}\right) T_w^* + \frac{t}{T} T_{wc}^* \quad (4.2)$$

ここで  $t$  は積分時間、 $T$  は最終積分時間 (50年) である。図4.1 (右) は標準実験の放射平衡温度場と寒冷化させた温度場の差を示している。高度50kmあたりでは約0.25K/yearの割合で寒冷化させている。

標準実験と同様の初期値および放射平衡温度場を用いて1年間スピナップし、その後  $T_{wt}^*$  を用いて50年間積分した。実験は96アンサンブル行い、解析には北半球の月平均値した帯状平均気温を用いた。

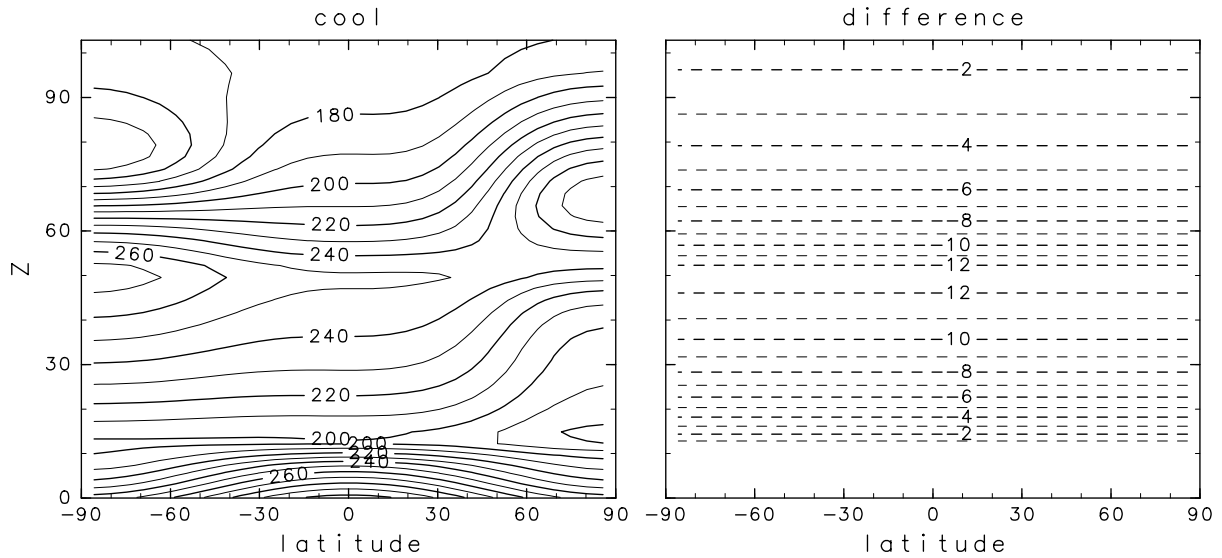


図 4.1: トレンド実験における北半球の冬至での (左) 寒冷化させた放射平衡温度場と、(右) その温度場と標準実験の放射平衡温度場との差。

## 4.2 見積もられたトレンドの空間・季節依存性

大気内部変動は空間・季節により異なっており、したがって、見積もられたトレンドおよび見かけのトレンドも空間・季節により異なっている。よって本節では、見積もられたトレンドおよび見かけのトレンドの空間・季節依存性を調べる。

図 4.2 (a) は冬季における 12hPa の極域気温の時系列をすべてのランについて示したものである。アンサンプルの最大値や最小値はそれぞれおよそ同じ割合で寒冷化しているのが分かる。年々変動の変動幅は 60K 程度と大きく、初期の最低気温よりも 50 年目の最高気温の方がずっと高い。したがって、与えたトレンドは負であるにも関わらず、トレンドを見積もると正の値をとるランがある可能性があることが分かる。

最初の 20 年および 50 年間のデータで最小二乗法によって求めた線型トレンドのヒストグラムをそれぞれ図 4.2 (b) および (c) に示す。与えた外部強制のトレンドは各ランで同じ値であり、12hPa では約  $-0.18\text{K/year}$  である。しかし、各ランでトレンドを見積もると様々な値をとっており、50 年のデータでもいくつかのランで正の値となっている。見積もられたトレンドのばらつきはデータ長が短い方が大きく、20 年データで  $-2.1 \sim 1.3\text{K}$ 、50 年データでは  $-0.5 \sim 0.2\text{K}$  の幅をもっている。

夏季には、年々変動の変動幅は約 8K と冬季に比べ小さいことが分かる (図 4.3 a)。アンサンプ

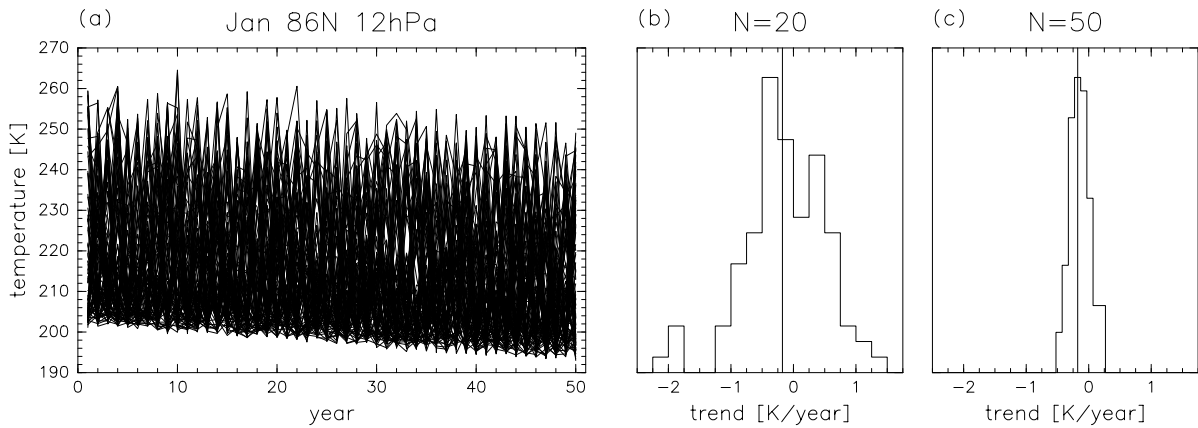


図 4.2: 1月における北緯 86 度および 12hPa の気温の (a) すべてのランの時系列、および (b,c) 見積もられたトレンドのヒストグラム。(b) は最初の 20 年のデータで求めたトレンド、(c) は 50 年データで求めたトレンドである。(b) および (c) 図の細実線は与えたトレンドの値を示している。

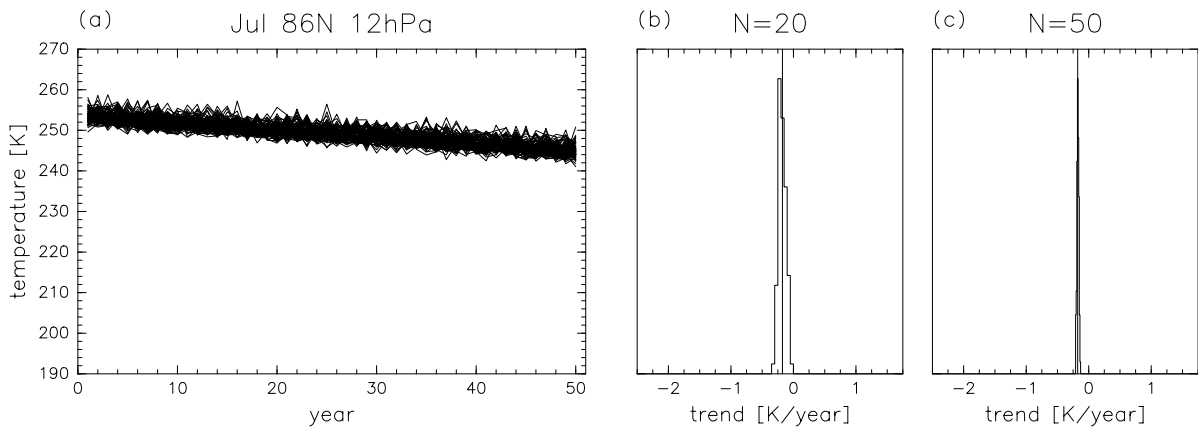


図 4.3: 7月であること以外図 4.2 と同じ。

ルの最大値や最小値は冬季のもの (図 4.2 a) とほぼ同じ割合で寒冷化している。見積もられたトレンドの誤差は、内部変動の大きな冬季に比べ小さく、50 年のデータではすべてのランでほぼ 0 である。(図 4.3 b,c)。

次に、見積もられたトレンドのアンサンブル平均とアンサンブル間のばらつきの緯度-高度依存性をみる (図 4.4)。見積もられたトレンドのアンサンブル平均は 20 年および 50 年データともに冬季の中・低緯度や夏季では緯度依存性が小さく、与えた外部強制のトレンド (図 4.1 右図参照) とほぼ同じ値である。一方、冬季の高緯度では、20 年および 50 年データともに成層圏では与えたトレンドからずれている。アンサンブル間の標準偏差は高緯度で大きく、夏季よりも冬季の方が、また 50 年データよりも 20 年データの方が大きくなっている。見積もられたトレンド

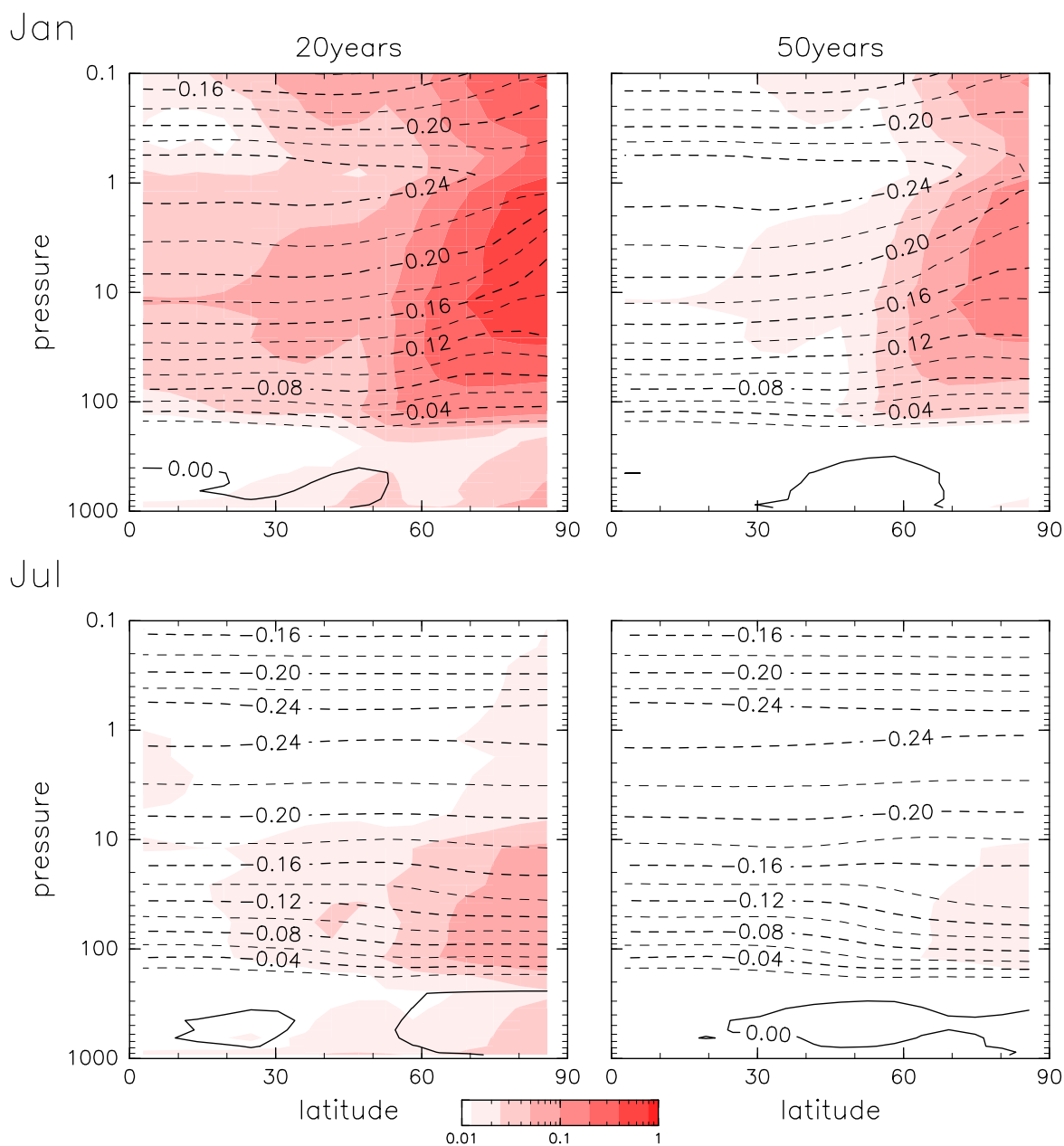


図 4.4: 各ランにおいて (左) 最初の 20 年および (右) 50 年のデータから見積もったトレンドの (上) 1 月と (下) 7 月におけるアンサンブル平均およびアンサンブル間の標準偏差の子午面断面図。等値線が平均を、赤濃淡が標準偏差を表している。等値線間隔は  $0.02\text{K}/\text{year}$  である。

ドのばらつきは見かけのトレンドによるものであり、見積もられたトレンドの標準偏差は見かけのトレンドの標準偏差と等しい。見かけのトレンドの標準偏差の空間パターンは内部変動の標準偏差のパターン (図 3.9) とほぼ一致している。50 年データでの標準偏差は 20 年データの約  $(50/20)^{-3/2} \sim 0.25$  倍であり、理論の結果 (2.10 式) と一致している。



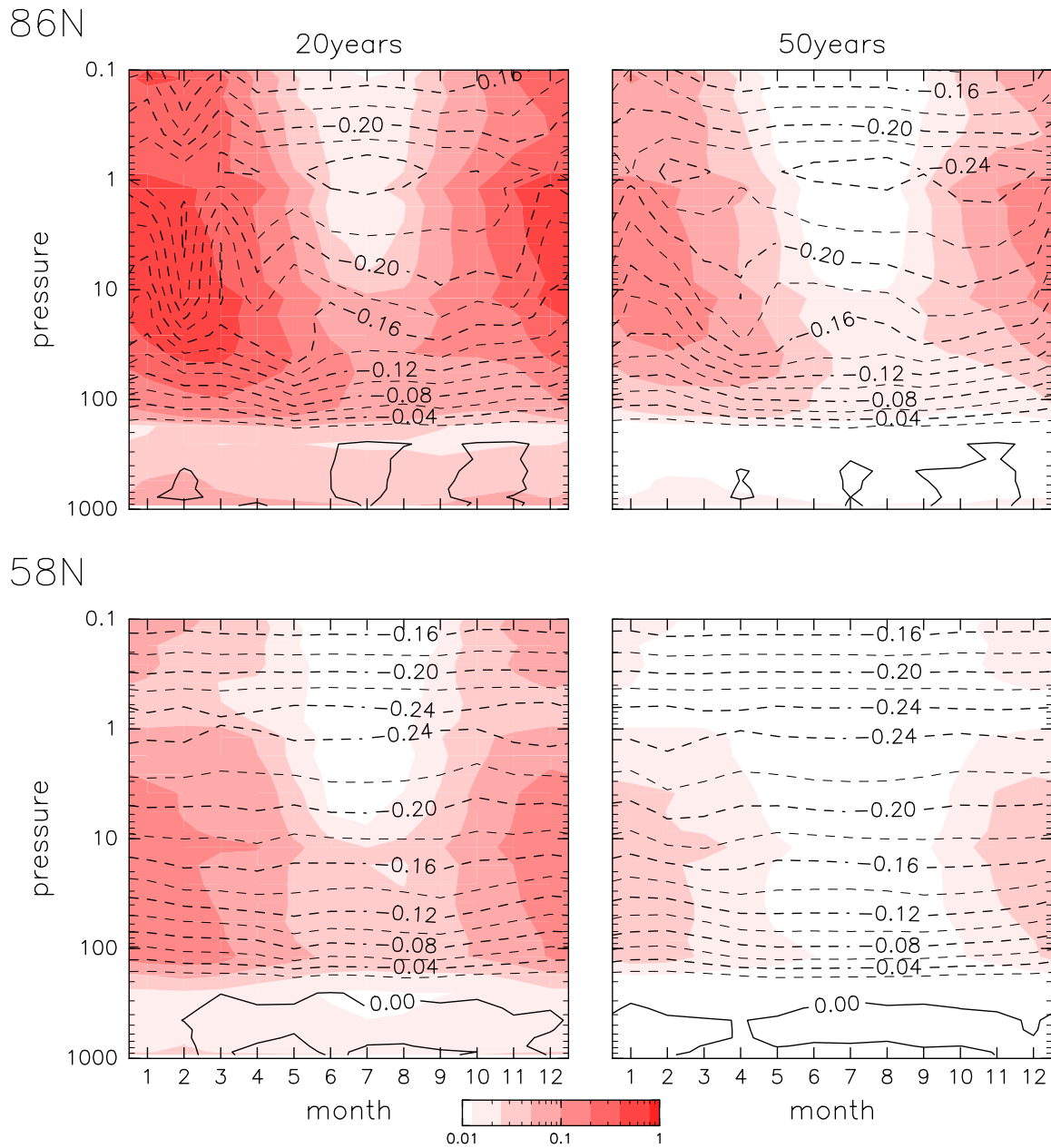


図 4.5: 各ランにおいて(左)最初の20年および(右)50年データから見積もったトレンドの(上)北緯86度および(下)58度におけるアンサンブル平均およびアンサンブル間の標準偏差の月-高度断面図。図の描き方は図4.4と同じ。

同様に月-高度断面(図4.5)でも上記と同様のことが言える。中緯度では、見積もられたトレンドのアンサンブル平均は与えたトレンドとほぼ一致しており、ほとんど月に依存していない。一方、極域では、夏季における値は与えたトレンドとほぼ同じであるが、冬季には大きく異なっており、かつそのずれは月ごとに系統的ではない。また、アンサンブル平均が大きくずれている

領域は見かけのトレンドの標準偏差が大きな領域であり、そのずれは見かけのトレンドによる偽のものである可能性がある。アンサンブル間のばらつきが大きな領域は内部変動が大きな極域冬季成層圏であり、見かけのトレンドの標準偏差のパターンは内部変動の標準偏差のパターン(図3.11)とほぼ一致している。

### 4.3 見積もられたトレンドの統計的有意性検定

各ランで見積もられたトレンドの統計的有意性の検定を行った。有意性検定には、通常用いられる  $t$ -検定やブートストラップ検定に加え、ここでは内部変動の標準偏差と尖度が分かっているため、より正確な  $O(N^{-1})$  のエッジワース検定も行うことができる。 $t$ -検定とブートストラップ検定、エッジワース検定の3つの検定法で見積もられたトレンドの統計的有意性が大きな領域を求め、比較した。図4.6は、20年データによって見積もられたトレンドの統計的有意性が  $t$ -検定と  $O(N^{-1})$  のエッジワース検定のうち片方の検定では99%以上であるがもう一方の検定では99%未満である格子点の数が96ランの中で最も多かったランの結果である。夏季の成層圏から中間圏では、見かけのトレンドの標準偏差で規格化されたトレンドは大きな値をとり、見積もられた寒冷化トレンドは統計的に有意であることが分かる。一方、冬季には与えたトレンドは夏季と同じ値であるにも関わらず統計的有意性は見られない。これは内部変動の標準偏差が大きな冬季では、得られたトレンドを見かけのトレンドの標準偏差で規格化すると小さな値となってしまうためである。 $t$ -検定およびブートストラップ検定では4月および5月あたりの上部成層圏で統計的有意性を大きく見積もってしまっているが、3つの検定法の違いはそれほど大きくない。月平均した帯状平均気温においては、 $t$ -検定およびブートストラップ検定はおおまかな有意性をみるためには20年の検定でも有効であることがエッジワース検定により確認できた。

内部変動の尖度が大きくデータ長が十分長くない場合、見かけのトレンドが正規分布であるという仮定が適切ではなく、 $t$ -検定を使うことができない。図4.6中の×印で示された領域は、そのような高度と季節を表している。 $t$ -検定では5月の1hPaあたりで99%より高い有意性を示しているが、この領域では尖度が大きく、この結果は注意深く検討する必要がある。実際、その領域におけるエッジワース検定の結果は  $t$ -検定による有意性よりも低い。内部変動の標準偏差が大きいいため見積もられたトレンドは統計的に有意ではないが、冬季の下部成層圏にも尖度が大きな領域がある。

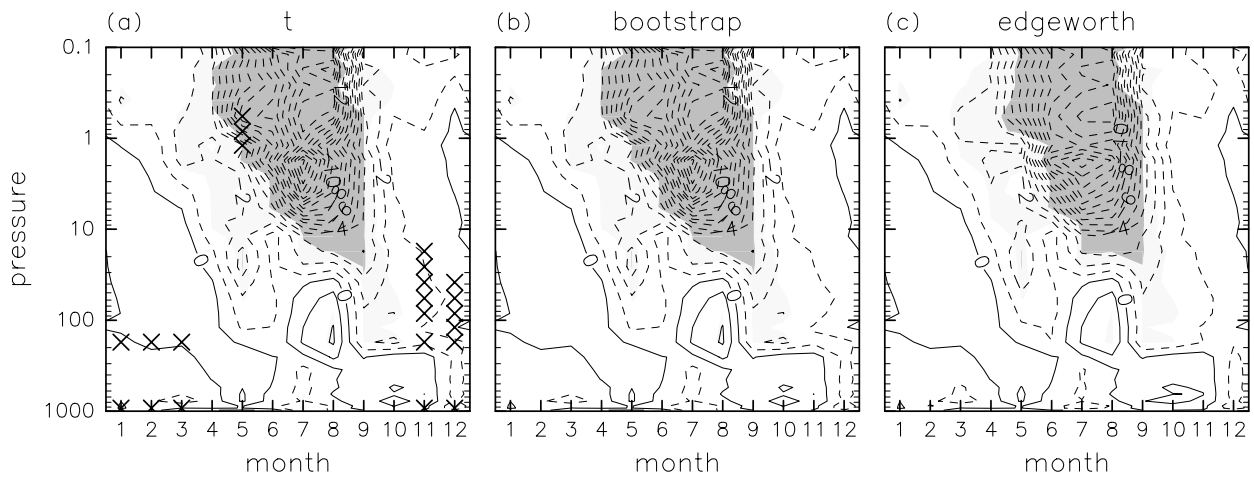


図 4.6: 極域の 20 年のデータでの  $t$ -検定と  $O(N^{-1})$  のエッジワース検定の結果の差が最も大きかったランにおける、(a) $t$ -検定、(b) ブートストラップ検定、(c) $O(N^{-1})$  のエッジワース検定で得られた見積もられたトレンドの統計的有意性が大きな領域。薄いシェードが 90%、濃いシェードが 99%トレンドが有意な領域を表している。等値線は、(a,b) では  $s_{a'}$  で規格化したトレンド、(c) では  $\sigma_{a'}$  で規格化したトレンドを表している。(a) の  $\times$  印は、内部変動の尖度が  $N/4 (= 5)$  よりも大きく、正規分布の仮定が適切ではない領域を表している。

## 4.4 結論

本章では成層圏の放射平衡温度に寒冷化トレンドを与えた数値実験により大気変動における見積もられたトレンドおよび見かけのトレンドの性質を調べた。与えたトレンドは高度 50km でおおよそ  $-0.25\text{K/year}$  である。50 年積分を 96 アンサンブル行い、見積もられたトレンドおよび見かけのトレンドの空間・季節依存性や、第 3 章で得られた大気内部変動と見かけのトレンドの関係を考察した。

冬季には、トレンドの大きさに比べて極域気温の年々変動が大きく、与えたトレンドは負であるにもかかわらず、いくつかのランでは 50 年データでも正のトレンドが見積もられた。一方、夏季では年々変動が小さく、50 年のデータではすべてのランで、与えたトレンドに近い値が見積もられる。極域では、冬季成層圏で見積もられたトレンドのアンサンブル平均は与えたトレンドからずれている。一方、中緯度では、アンサンブル平均は与えたトレンドとほぼ一致している。アンサンブル平均のずれが大きな冬季極域成層圏では、見かけのトレンドの標準偏差も大きな値となっている。標準偏差の空間・季節分布のパターンは内部変動の標準偏差の分布のパターンとほぼ一致しており、値は理論で予想される値とほぼ一致する。

見積もられたトレンドの統計的有意性は、内部変動の標準偏差が小さい夏季の上部成層圏から中間圏で高い。一方、冬季には、与えたトレンドは同じであるにもかかわらず、内部変動の標準

偏差が大きいため見積もられたトレンドは有意性をもたない。 $t$ -検定、ブートストラップ検定、エッジワース検定の結果は似ており、エッジワース検定との比較の結果、月平均帯状平均気温については $t$ -検定およびブートストラップ検定は20年の検定でもおおむね有効であることが確認できた。ただし、5月の1hPaあたりでは、内部変動の尖度が高いため正規分布の仮定が適切ではなく、 $t$ -検定はできず、その結果にはエッジワース検定の結果と差がみられる。

## 第5章 現実大気にみられる気温トレンドの解析

これまで数値実験の結果を用いて大気内部変動とトレンドを調べてきた。本章では現実大気の実験データを用いて内部変動とトレンドの季節・緯度・高度分布を考察する。

### 5.1 データ

現実大気の実験データとして NCEP/NCAR 再解析データ (Kalnay et al., 1996) の 1981-2000 年の 20 年分、およびベルリン自由大学成層圏データ (Labitzke et al., 2002) の 1963-2001 年の 39 年分を使用した。NCEP/NCAR は 1000-10hPa、ベルリンデータは 100-10hPa のデータが利用できる。ただしベルリンデータには欠損値が含まれている。解析には北半球における月平均した帯状平均気温を用いた。

### 5.2 内部変動の平均と標準偏差

現実大気の実験データには、トレンドと内部変動の両方の要素が含まれており、内部変動だけを取り出すことはできない。したがって内部変動の標準偏差は (B.69) 式により回帰残差から推定する。図 5.1 は冬季および夏季における帯状平均気温の気候値と内部変動の標準偏差の子午面断面図である。

気候値を見ると、冬季および夏季共に赤道上の 100hPa あたりで最も気温が低くなっている。また冬季には極域の下部成層圏にも極小値が見られる。NCEP/NCAR とベルリンデータでおおよそ同じ値となっている。内部変動は冬季極域成層圏で最も大きく標準偏差は 10K 程度あり、夏季の極域では対流圏および下部成層圏に極大が見られる。これらの特徴は数値実験の結果 (図 3.9) にも見られる。冬季の中・高緯度の成層圏では高度が高いほど標準偏差が大きくなっている。また、夏季には成層圏において赤道域で大きな年々変動がみられ、その標準偏差は冬季の

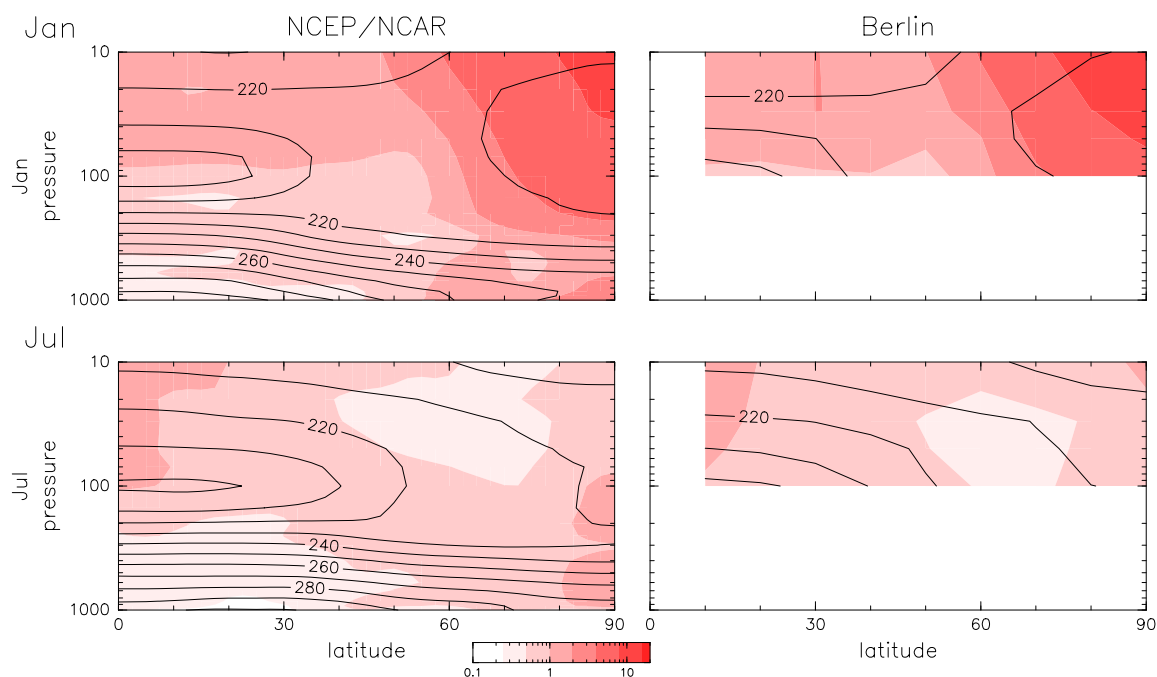


図 5.1: (上)1月および(下)7月における帯状平均気温の気候値と内部変動の標準偏差の北半球子午面断面図。等値線が気候値、赤濃淡が標準偏差を表している。左が NCEP/NCAR 再解析データ、右がベルリン成層圏データの結果である。等値線間隔は 10K である。

同じ場所での値とあまり変わらない。この低緯度での標準偏差の極大は数値実験の結果にはみられない。NCEP/NCAR とベルリンデータの結果を比較すると大まかには似ているものの、細かな構造には違いが見られる。データが 20 年または 39 年と短く、標本標準偏差の誤差は 10 ~ 20% 程度ある可能性がある (3.2.2 節)。

次に月ごとの違いをみる (図 5.2)。気候値には、夏季に暖かく冬季に寒くなるという季節サイクルが見られる。年々変動はほぼ全高度域で冬季から春先にかけて大きな値が見られ、冬季極域成層圏で標準偏差は最大をとり、その最大値は約 10K である。高度分布をみると、冬季成層圏の変動の標準偏差は極域では中部成層圏から下部成層圏まで鉛直方向にほぼ一様で大きな値をとるが、中緯度では高度が高くなるとともに大きくなっている。数値実験 (図 3.11) で見えていた春季の極域での標準偏差の極大の下方伝播は見られない。対流圏においては、変動は極域、中緯度共に冬季に大きく、夏季に小さくなっている。データ間で違いもあり、ベルリンデータの方が NCEP/NCAR よりも冬季および夏季の標準偏差が大きい傾向がある。

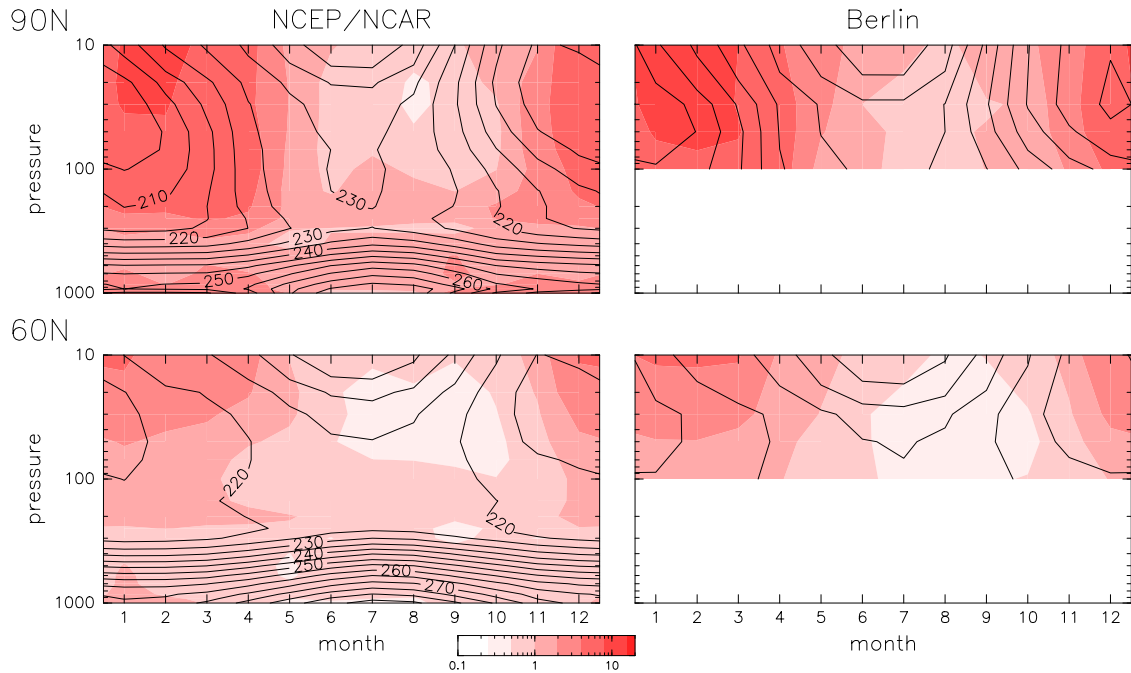


図 5.2: 北緯 (上)90 度および (下)60 度における帯状平均気温の気候値と内部変動の標準偏差の月-高度断面図。等値線が気候値、赤濃淡が標準偏差を表している。左が NCEP/NCAR 再解析データ、右がベルリン成層圏データの結果である。等値線間隔は 10K である。

### 5.3 見積もられた気温トレンド

気温のトレンドを見積もり、その空間・季節依存性を調べた。図 5.3 は冬季および夏季における見積もられたトレンドの子午面断面図である。成層圏ではほぼ全域で寒冷化トレンドが見積もられている。気候値および変動の標準偏差は両データ間の違いはそれほど大きくなかったが、見積もられたトレンドには大きな違いがある。ベルリンデータでは緯度による違いは小さいのに対し、NCEP/NCAR では低・中緯度と高緯度間の違いが大きく、低・中緯度の方が絶対値が小さい。NCEP/NCAR の高緯度の 100hPa あたりでは約 0.12K/year の正の値が見られるが、20 年では冬季極域成層圏で内部変動の標準偏差から見積もられた見かけのトレンドの標準偏差が 0.2K 程度あるため、この見積もられた正のトレンドは見かけであると考えられる。同様に、ベルリンデータの冬季極域の 10hPa あたりにも約 0.05K/year の正の値が見られるが、内部変動の標準偏差から見積もられた見かけのトレンドの標準偏差が 0.15K 程度あり、この正のトレンドも見かけであると考えられる。

見積もられたトレンドの月依存性は緯度依存性と比べると大きい(図 5.4)。中緯度では季節による違いは比較的小さいが、極域では季節ごとの違いが非常に大きい。極域では NCEP/NCAR とベルリンデータでは正負がほぼ逆転しており、NCEP/NCAR では春先に全層で強い寒冷化

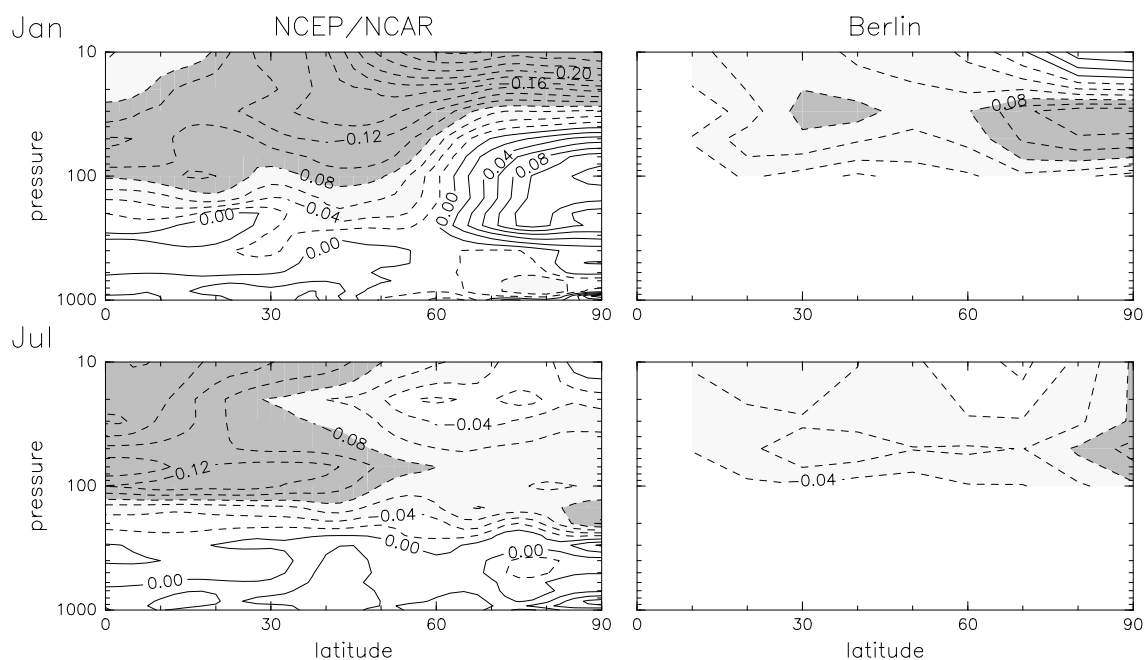


図 5.3: (上)1月および(下)7月における帯状平均気温の見積もられたトレンドの北半球子午面断面図。左が NCEP/NCAR 再解析データ、右がベルリン成層圏データの結果である。等値線間隔は  $0.02\text{K/year}$  である。薄いハッチは  $-0.04\text{K/year}$  以下、濃いハッチは  $-0.08\text{K/year}$  以下の領域を表している。

および 12 月を中心に温暖化が見積もられているが、ベルリンデータでは春先に大きな温暖化トレンドが見積もられている。

見積もられたトレンドは冬季および春季で値が大きかったが、内部変動の標準偏差の推定値から見積もられる見かけのトレンドの標準偏差で規格化すると、夏季で値が大きくなる(図 5.5)。これは内部変動の標準偏差が夏季で小さいためである。また、NCEP/NCAR とベルリンデータでは規格化されたトレンドはベルリンデータの方が絶対値が大きい。これはベルリンデータの方がデータ長が長く、およそデータ長の  $-3/2$  乗に比例する見かけのトレンドの標準偏差が小さいためである。見かけのトレンドの頻度分布が正規分布に近いと仮定して、 $t$ -検定により見積もられたトレンドの有意性検定を行った。夏季の寒冷化トレンドは統計的に有意であることが分かる。一方成層圏で見られた正のトレンドはすべて統計的に有意でないことが分かる。高緯度ではベルリンデータの方が統計的に有意な月や高度の範囲が広いが、冬季には統計的な有意性はない。中緯度では春季から秋季にかけてトレンドの有意性は 90% を越えている。同様にブートストラップ検定も行った(図 5.6)。ブートストラップ検定による統計的に有意な範囲は、 $t$ -検定による範囲よりも少し大きいものの、両者はほぼ同じである。 $t$ -検定やブートストラップ検定の結果は大まかな議論には使えるが、細かな議論を行うことはできない。データ長の不足により、見積もられた内部変動のモーメントの誤差が大きい可能性があり、標準モーメントを



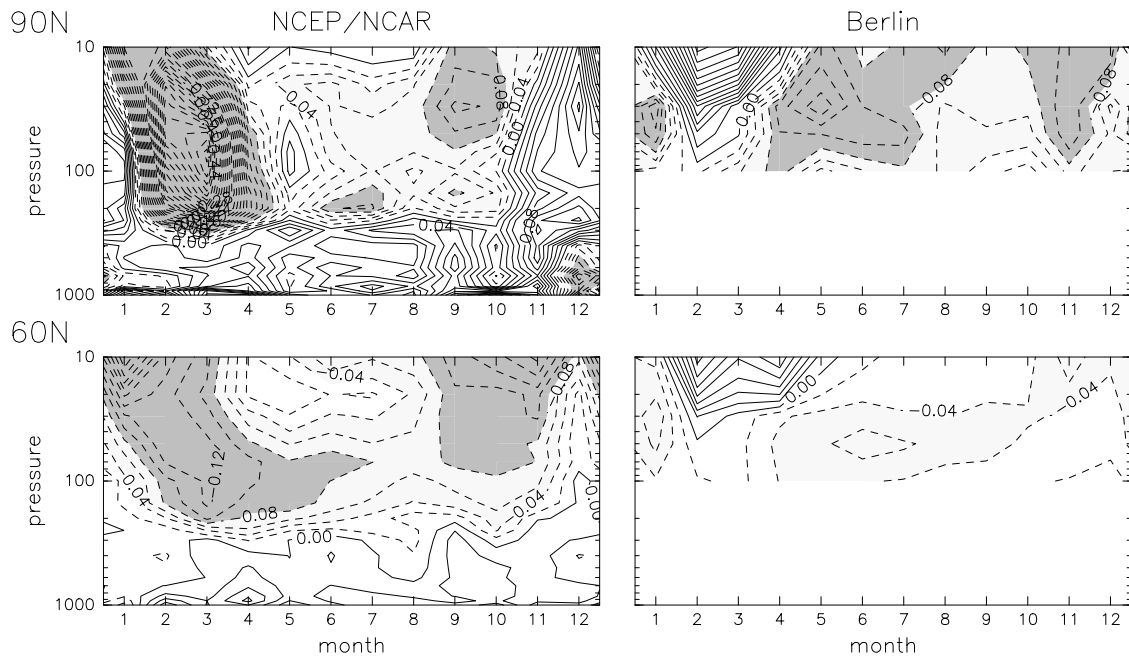


図 5.4: 北緯 (上)90 度および (下)60 度における帯状平均気温の見積もられたトレンドの月-高度断面図。左が NCEP/NCAR 再解析データ、右がベルリン成層圏データの結果である。等値線間隔は  $0.02\text{K/year}$  である。薄いハッチは  $-0.04\text{K/year}$  以下、濃いハッチは  $-0.08\text{K/year}$  以下の領域を表している。

用いたエッジワース検定は  $t$ -検定やブートストラップ検定と比べて精度が良いとは限らない。

## 5.4 結論

本章では、NCEP/NCAR 再解析データとベルリン自由大学成層圏データの 2 つの現実大気的数据を用いて内部変動とトレンドの空間・季節依存性を調べた。

現実大気データにはトレンドと内部変動の両方の要素が含まれているため、内部変動の標準偏差は回帰残差を用いて推定する必要がある。気温の年々変動は冬季極域成層圏で最も大きく、標準偏差はおおよそ  $10\text{K}$  である。夏季の成層圏では、赤道域に標準偏差の極大が見られる。冬季の極域では、成層圏で鉛直方向にほぼ一様に標準偏差が大きな領域がある。2 つのデータによる標準偏差は大まかには一致しているものの、細かな違いもある。データ長が短いことにより標準偏差の誤差が  $10\sim 20\%$  程度ある可能性がある。

見積もられたトレンドは、緯度依存性は大きくないが季節によって大きく異なる。季節依存性

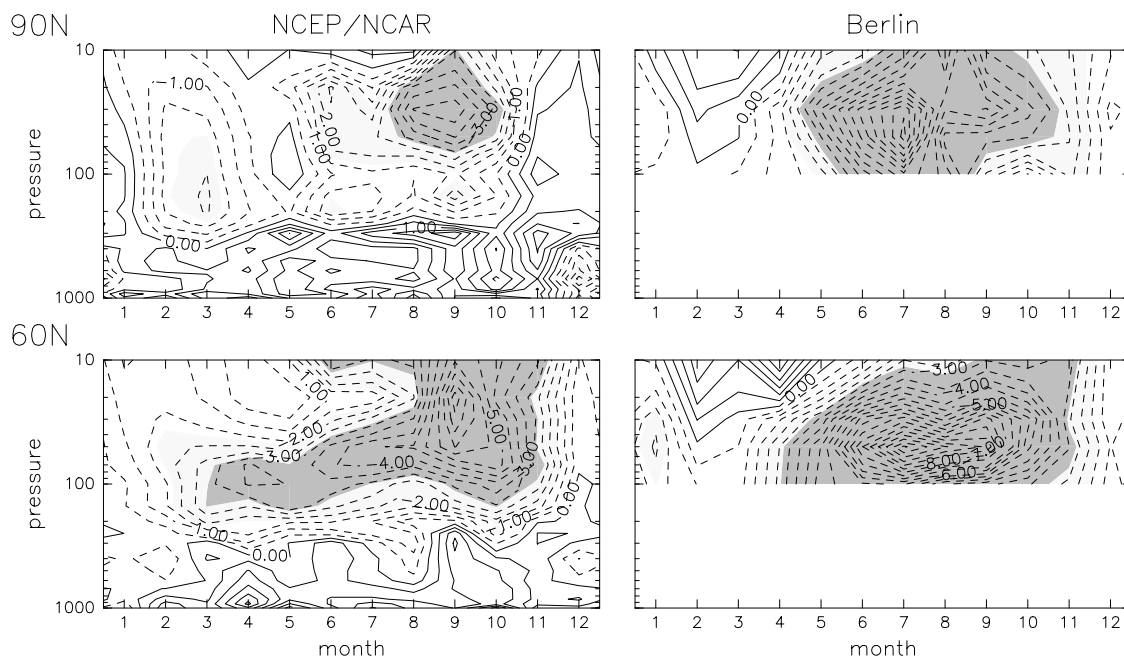


図 5.5: (等値線) スチューデント化した帯状平均気温のトレンドと (ハッチ)  $t$ -検定による統計的有意性の月-高度断面図。薄いハッチは90%以上、濃いハッチは99%以上有意な領域を表している。左がNCEP/NCAR再解析データ、右がベルリン成層圏データの結果である。等値線間隔は0.5である。

は2つのデータで大きく異なっており、特に極域の冬季から春季にかけては見積もられたトレンドの正負が逆である。見積もられたトレンドの統計的有意性を  $t$ -検定およびブートストラップ検定により検定した。夏季から秋季にかけて成層圏に有意な寒冷化が見られる。データ長の違いに因って、ベルリンデータの方が有意な領域が広い。冬季の成層圏で見積もられた温暖化のトレンドは有意性が低く、見かけであると考えられる。

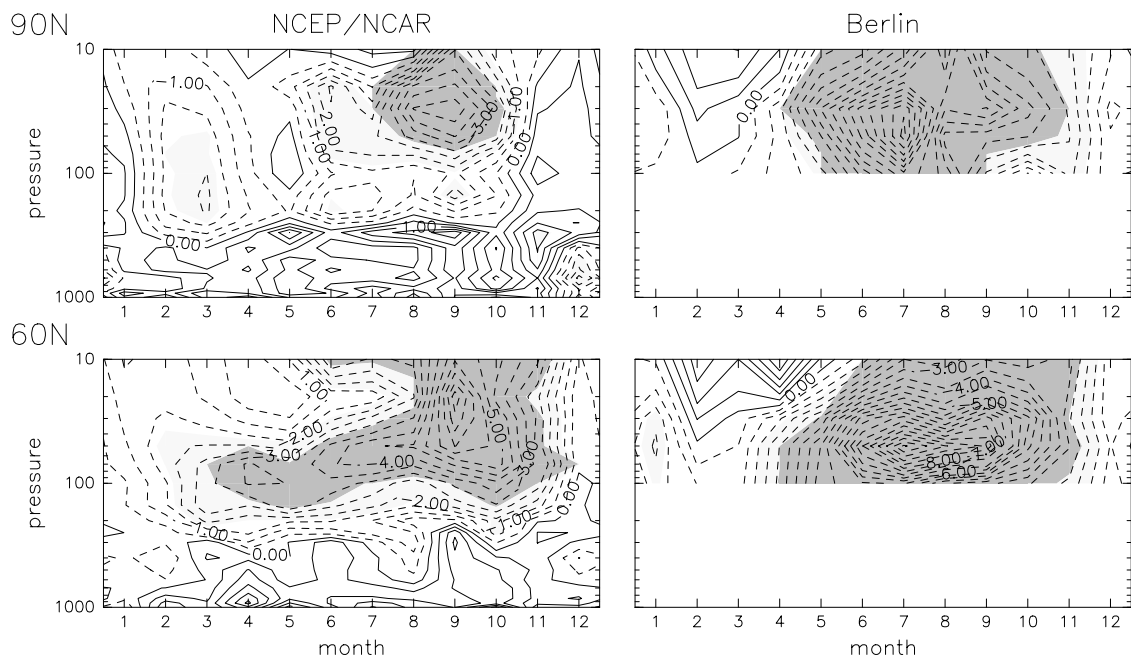


図 5.6: 統計的有意性がブートストラップ検定によるものである以外図 5.5 と同じ。



## 第6章 議論

現実データはデータ長が短く、トレンドの検出は難しいことが多い。データ長が短いと、見積もられた内部変動のモーメントが大きな誤差をもつ可能性が高くなり、また見かけのトレンドの分布関数が正規分布からずれている可能性が高くなる。現実大気における線型トレンドを見積もる際、内部変動の標準偏差を小さくして統計的に有意な結果を得るために全球平均や年平均することが多い。しかしながら、図3.2でみられた極域成層圏気温の季節依存性のように、内部変動は空間・季節により大きく異なる。南極上空の春季のオゾンホールなど、局所的な現象に与えるトレンドの影響等を考える上では、限られた領域や季節におけるトレンドを見積もることは重要である。このような限られた領域や季節でのトレンドの見積もりは、空間平均や季節平均をすることができず、より困難である。

現実大気にみられるトレンドを考える際、大気内部変動を知る必要があるが、現実大気データは十分な長さがなく、標準偏差や尖度などの内部変動のモーメントを現実大気データから見積もることは難しい。例えば、第3.2.2節でみたように、20~40年のデータでは標本標準偏差や標本尖度の誤差はそれぞれ10~20%程度、0.4~0.7程度ある可能性がある。このような限られたデータで見積もられたトレンドを検定する際には、 $t$ -検定、ブートストラップ検定、エッジワース検定それぞれに長所と短所がある。 $t$ -検定は見積もられた標準偏差の誤差は考慮されているものの、高次のモーメントは無視している。ブートストラップ検定は分布関数の仮定は必要ないものの、標本がどの程度内部変動の頻度分布の特徴を表しているのか分からず、標本により検定の精度が異なる。エッジワース検定は高次のモーメントを考慮に入れているものの、モーメントの見積もり誤差は考慮していない。標本から見積もったモーメントを使用してエッジワース検定を行うことはできるが、内部変動の頻度分布が正規分布に近い場合、高次のモーメントを無視したことによる誤差よりも、標準偏差の見積もり誤差を考慮しないことによる誤差の方が大きく、エッジワース検定よりも $t$ -検定の方が正確な場合がある。

エッジワース検定をするためには大気内部変動の高次のモーメントを知る必要がある。大気内部変動を推定するための有用な方法の一つに、大気モデルを用いた長期積分実験が考えられる。そこで得られた内部変動のモーメントを使うことで現実大気データにより見積もられたトレンドをエッジワース検定により評価することができる。本研究では単純化した3次元大気循環モデルを用いた長期間積分実験を行い、大気内部変動のモーメントを求めた。しかし、そのモデル内大気の変動は現実大気の変動と違いがあるため、その長期積分実験により得られた内部変動の

モーメントを現実大気データで見積もられたトレンドの考察に直接使用することには問題がある。そこで、最先端の全球大気大循環モデル (general circulation model; GCM) を使用した長期間積分実験が考えられる。実際には完全に現実大気を再現する GCM は存在しておらず、GCM 実験における内部変動は現実大気の変動と違いがある。したがって、複数のデータや GCM の使用などによって、モデルの誤差や限られた期間の現実大気データから見積もることによる誤差を考察する必要があると考えられる。今日、GCM を用いた温暖化実験などトレンドを入れた長期間実験は多く行われているが、トレンドを入れず、同じ気候のもとでの長期間積分して得られた内部変動をトレンドの解釈に利用する研究も重要であると考えられる。

大気変動には正規分布ではない頻度分布をもつものがある。例えば、月降水量および季節降水量 (ガンマ分布) や、風速 (ワイブル分布)、豪雨や突風などの極端な気象現象 (極値分布) などがあげられる。特にこのような問題において  $t$ -検定を使う際には、正規分布の仮定の妥当性に注意しなければならない。このような変動のトレンドを考える際には、内部変動を正確に押さえ、エッジワース検定により見積もられたトレンドを評価すべきである。極端な気象現象の場合、見積もられたトレンドを誤って解釈してしまうと過小評価による建設基準などにより人間社会に大きな被害をもたらされる可能性があるなど、トレンドを正確に見積もることは非常に重要である。

本研究では、内部変動の標準偏差および尖度を利用して4次の正確度をもつ見かけのトレンドの分布関数を利用した。内部変動の分布関数が複雑な場合、より高次の正確度をもつ分布関数を考える必要がある場合がある。この場合、より高次の内部変動のモーメントが必要となる。また、エッジワース展開の有限の項で求めた関数は単調増加関数でない場合があり、分布関数として適切でないことがある。このような場合にもより高次の項まで考える必要がある。必要なモーメントは内部変動の各モーメントの大きさおよびデータ長により異なる。内部変動のモーメントと見かけのトレンドの分布関数を結び付けるエッジワース展開の式により、あるモーメントを無視するために必要なデータ長の見積もりなど、高次のモーメントの重要性を定量的に評価することができる。

大気内部変動には、春先の極域成層圏気温や、赤道準二年周期振動が存在する赤道成層圏の変動の様に頻度分布が複数の最頻値をもつものがある。このような変動では、複数の平衡状態やレジーム、変動が存在する可能性がある。すべてが同一のトレンドをもつ場合は、本研究で考察したエッジワース展開による方法が適用できるが、内部変動の頻度分布が複雑な場合が多く、高次のモーメントまで考慮する必要があると考えられる。一方、それぞれが別々のトレンドをもつ場合は適用できず、トレンドの検出はより難しいものとなる。

本研究では、線型トレンドとランダムな変動をあわせ持つ系を考えた。まず簡単な例として、モンテカルロシミュレーションではランダムな変動として、性質が分かっている分布関数に従う乱数を用いた。次に複雑な例として、3次元大気循環モデルを用いたトレンド実験を行った。この場合、大気内部変動を乱数発生装置として考えており、この乱数の性質を長期間積分を行っ

---

て調べた。現実大気変動は、数年以上のスケールをもった変動やレジーム間遷移など様々な要素を含んでいる。また、トレンドが途中で変化していたり、線型でない可能性がある。しかし、そのような要素を総合的に考えると問題が複雑であり、まずはこのような簡単な系を仮定してトレンドを調べる必要がある。

本研究では内部変動の分布関数は一定であるとしたが、分布関数自体の変化も重要な問題である。分布関数の変化という点で考えると本研究で考えたような線型トレンドの場合は内部変動の頻度分布の平均値が変化する場合であるとも考えることができる。分布関数の変動を考える際には平均値の他、標準偏差など多くのパラメータの変化が考えられる。Meehl et al. (2000) は、正規分布を仮定し内部変動の頻度分布の平均および標準偏差の変化による極端な気象現象の変化を考えた。現実大気の問題においては、それぞれの変動に応じた分布関数を考え議論する必要があり、平均や標準偏差以外のパラメータの変化も考える必要がある。

---





## 第7章 まとめ

有限長データから見積もられたトレンドには、外部条件の変化による真のトレンドに加えて内部変動の存在などによる見かけのトレンドが含まれる。したがって、見積もられたトレンドを解釈するためには、見かけのトレンドの統計的な考察が不可欠である。しかし、見かけのトレンドの分布関数は分かっておらず、一般的には、見かけのトレンドの頻度分布が正規分布であると仮定することで統計的有意性の検定を行なっている。本研究では、見かけのトレンドの分布関数を陽に考え、確率統計理論および3次元大気循環モデルを用いた数値実験により有限長データから見積もられたトレンドに含まれる内部変動による見かけのトレンドについて調べた。

第2章では、線型トレンドとランダムな内部変動をもつ簡単なトレンドモデルを考え、見かけのトレンドのいくつかのモーメントを求めた。すでに知られている標準偏差に加え、より高次のモーメントである尖度も求めた。奇数次のモーメントがすべて0であることも分かった。見かけのトレンドの分布関数は内部変動の分布関数に依存する。内部変動の頻度分布が正規分布である場合には、見かけのトレンドの頻度分布も正規分布となることを導き出した。また、標本平均の分布関数の議論などで用いられるエッジワース展開およびコーニッシュ・フィッシャー展開を初めてトレンドの議論に適用し、一般的な場合の見かけのトレンドの分布関数のエッジワース展開およびその分布関数の百分位数のコーニッシュ・フィッシャー展開を求めた。見かけのトレンドの頻度分布はデータ長  $N$  が大きくなるほど漸近的に正規分布に収束してゆき (cf. 中心極限定理)、その収束の速度は  $O(N^{-1})$  である。エッジワース展開により、見かけのトレンドの近似的な分布関数を求めることができる。その際には、内部変動のいくつかのモーメントが必要となる。得られた分布関数をもとにトレンドの区間推定や統計的有意性の検定を行うことができる。この検定法は、以前から行われている  $t$ -検定やブートストラップ検定よりも正確であることを示した。大気変動には非正規分布に従うものが多くあり、大気変動にみられるトレンドを正しく解釈するためには分布関数を考慮し、エッジワース展開を利用した検定を行う必要がある。本研究は根拠無く正規分布を仮定することへ警鐘をならすものであり、分布関数を陽に考えるための道筋を与えるものである。

大気変動における見かけのトレンドを知るために大気内部変動のモーメントを知る必要がある。大気内部変動の分布関数は経度や緯度、高度、季節などに依存している。第3章では、3次元大気循環モデルを使用した長期間積分実験により得た15,200年分という長期間のデータを用いて、大気内部変動を調べた。モーメントの見積もりに必要なデータ長を見積もるために、標本モー

メントのデータ長依存性を調べた。また、このデータを用いて大気内部変動のモーメントの空間・季節分布を求め、非正規分布の特徴を考察した。ここで得られたモーメントは15,200年という非常に長期間のデータから求めたものであり、モデル大気の内変動の性質をほぼ正確に得ることができたといえる。このような長期間の積分実験は近年の計算機環境の発展により可能となった。本研究は長期積分実験という今後の数値実験の枠組みの提案を行うものである。

第4章では、成層圏の放射平衡温度に線型の寒冷化トレンドを与えたアンサンブル実験を行い、見積もられたトレンドおよび見かけのトレンドの空間・季節依存性を調べた。見かけのトレンドの標準偏差の空間・季節分布は内変動の標準偏差の分布とほぼ同じパターンをしており、その値は理論によって内変動の標準偏差から見積もられる値とほぼ一致していた。従来行われている  $t$ -検定、ブートストラップ検定に加えてエッジワース展開により得られた見かけのトレンドの分布関数を用いたより正確なエッジワース検定を行った。内変動の尖度が大きいいため、見かけのトレンドの頻度分布が正規分布であるという仮説が適切ではない領域では、 $t$ -検定の結果には誤差が含まれている。エッジワース検定は既存の検定法の検証にも使用することができる。

第5章では、2種類の現実大気データを用いて、月平均した帯状平均気温のトレンドを調べた。内変動が小さな夏季には見積もられた成層圏の寒冷化トレンドは統計的に有意であり、内変動が大きな極域の冬季成層圏では見積もられたトレンドは有意ではない。現実大気データはデータ長が短く、見積もったモーメントの誤差が大きいため、標本モーメントを利用した場合、エッジワース検定は他の既存の検定法に比べ正確であるとは限らず、現実大気データのみでのトレンドの解析には限界がある。本研究で行った単純化した3次元大気循環モデルを用いた長期積分実験は、現実大気にみられるトレンドの研究における数値実験の方法の一つの提案であり、現実大気変動にみられるトレンドの考察においては、より現実大気に近いモデルを用いた長期積分実験と組み合わせることで考えることが重要である。

# 基礎となった論文

本学位論文の基礎となった投稿済みの論文は以下のとおりである。

1. Distribution Function of a Spurious Trend in Finite Length Dataset with Natural Variability: Statistical Considerations and Numerical Experiment with a Global Circulation Model  
(自然変動を含む有限長データにおける見かけのトレンドの分布関数: 統計学的考察と全球循環モデルを用いた数値実験)  
Journal of Geophysical Research, accepted  
西澤誠也, 余田成男 の共著

その他参考となる出版済および投稿済み論文は以下の通りである。

2. 環状変動における地形の役割  
グロースベッター, 40 巻, 19-27 頁, 2002 年  
西澤誠也, 余田成男 の共著
3. 環状変動における地形の役割 –数値実験–  
京都大学防災研究所年報, 45 号, 337-345 頁, 2002 年  
西澤誠也, 余田成男 の共著
4. 環状変動における地形の役割  
気象研究ノート, 第 206 号, 109-124 頁, 2004 年  
西澤誠也, 余田成男 の共著
5. A Parameter Sweep Experiment on Topographic Effects on the Annular Variability  
(環状変動に対する地形の影響に関するパラメータ走査実験)  
気象集誌, 82 巻, 3 号, 879-893 頁, 2004 年  
西澤誠也, 余田成男 の共著

- 
6. Topographic effects on the annular variability in a coupled atmosphere-ocean GCM  
(大気海洋結合モデルにおける環状変動に対する地形の影響)  
気象集誌, 投稿済  
西澤誠也, 余田成男, 鬼頭昭雄 の共著
-

# 謝辞

本研究の遂行にあたり、絶えずご指導下さいました余田成男先生に深く感謝申し上げます。また、様々な面でご指導下さいました石岡圭一先生、内藤陽子先生をはじめとする京都大学気象学研究室のみなさま、田口正和博士に感謝致します。田口博士には数値モデルを提供していただきました。

数値モデルは AGCM5 (Swamp Project, 1998) をもとにしたものであり、作図には地球流体電脳ライブラリ (SGKS Group, 2004) を用いました。

数値計算には、京都大学学術情報メディアセンターの VPP800 および名古屋大学情報連携基盤センターの VPP5000 を利用しました。データ解析には京都大学生存研究所電波科学計算実験装置 (KDK) を利用しました。ここに記して謝意を表します。



# 補遺 A 本研究に関係のある確率統計の基礎

## A.1 確率分布

本節ではいくつかの重要な確率分布についてまとめる。ここでは Wilks (1995)、蓑谷 (1998)、Weisstein を参考にした。

### A.1.1 正規分布 (Normal distribution)

統計学上最も広く応用されている基本的な分布で、ガウス分布 (Gaussian distribution) やベル曲線 (bell curve) とも呼ばれる。平均  $\mu$ 、標準偏差  $\sigma$  の正規分布を  $N(\mu, \sigma^2)$  と書く。 $N(\mu, \sigma^2)$  の確率密度関数 (PDF),  $f(x)$ , および累積分布関数 (CDF),  $F(x)$ , はそれぞれ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad (\text{A.1})$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right\} \quad (\text{A.2})$$

である (導出は B.1.1 節参照のこと)。ここで  $\operatorname{erf}(x)$  は誤差関数 (error function)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (\text{A.3})$$

である。CDF を微分すると PDF となる。特に平均 0、標準偏差 1 の正規分布を標準正規分布 (standard normal distribution) という。標準正規分布の PDF および CDF はそれぞれ  $\phi(x)$ ,  $\Phi(x)$  と表す。

最頻値  $m_o$ 、中央値  $m$  はそれぞれ

$$m_o = \mu, \quad (\text{A.4})$$

$$m = \mu \quad (\text{A.5})$$

である。

特性関数 (characteristic function) <sup>1</sup>  $\psi(\omega)$ 、およびモーメント母関数 (moment generating function) <sup>2</sup>  $M(t)$  はそれぞれ

$$\psi(\omega) = \exp\left(i\mu\omega - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right), \quad (\text{A.9})$$

$$M(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \quad (\text{A.10})$$

である。

正規分布の歪度および尖度はともに 0 である (期待値まわりの 4 次モーメントは 3)。

分布関数が未知の場合、正規分布を仮定することが多い。これは有限の平均および分散をもついかなる分布に従う変数の集合でも、その平均値の分布は正規分布に近づく傾向があるためである。これは中心極限定理 (central limit theorem) と呼ばれる。

### A.1.2 対数正規分布 (Lognormal distribution)

対数をとった値が正規分布に従う変数の分布を対数正規分布という。対数正規分布の PDF および CDF はそれぞれ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}Sx} \exp\left(-\frac{(\log x - M)^2}{2S^2}\right), \quad (\text{A.11})$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\log x - M}{\sqrt{2}S}\right) \right\} \quad (\text{A.12})$$

である。平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$ 、歪度  $\beta_1$ 、尖度  $\beta_2$  はそれぞれ

$$\mu = \exp\left(M + \frac{1}{2}S^2\right), \quad (\text{A.13})$$

---

<sup>1</sup>特性関数は

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) f(x) dx \quad (\text{A.6})$$

で定義される。これは PDF のフーリエ変換である。

<sup>2</sup>モーメント母関数は

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) f(x) dx \quad (\text{A.7})$$

で定義され、 $n$  回微分したものに  $t = 0$  を代入すると  $x^n$  の期待値  $E(x^n)$  が得られる。

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} M(t) \right|_{t=0} = E(x^n) \quad (\text{A.8})$$


---



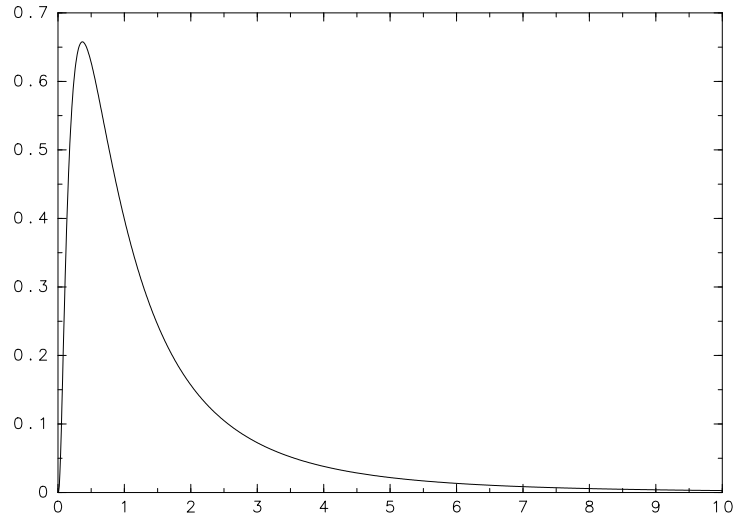


図 A.1:  $S = 1, M = 0$  のときの対数正規分布の PDF。

$$\sigma^2 = \left\{ \exp(S^2) - 1 \right\} \exp(S^2 + 2M), \quad (\text{A.14})$$

$$\beta_1 = \left\{ 2 + \exp(S^2) \right\} \sqrt{\exp(S^2) - 1}, \quad (\text{A.15})$$

$$\beta_2 = \exp(4S^2) + 2 \exp(3S^2) + 3 \exp(2S^2) - 6 \quad (\text{A.16})$$

である。歪度、尖度はともに常に正である。最頻値、中央値はそれぞれ

$$m_o = \exp(M - S^2), \quad (\text{A.17})$$

$$m = \exp(M) \quad (\text{A.18})$$

である。 $S = 1, M = 0$  のときジブラ分布 (Gibrat's distribution) と呼ばれる。

対数分布は雲特性のばらつきを表す際や、水文学で用いられることが多い。

### A.1.3 ガンマ分布 (Gamma distribution)

形状パラメータ  $\alpha (\alpha > 0)$ 、位置パラメータ  $\theta (\theta > 0)$  のガンマ分布は  $Ga(\alpha, \theta)$  と表され、 $x \geq 0$  の分布である。ガンマ分布はベイズ統計学で良く用いられる。 $Ga(\alpha, \theta)$  の PDF および CDF はそれぞれ

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)}, \quad (\text{A.19})$$

$$F(x) = \frac{\Gamma(\alpha, \frac{x}{\theta})}{\Gamma(\alpha)} \quad (\text{A.20})$$

である。ここで  $\Gamma(x)$  はガンマ関数 (gamma function)<sup>3</sup>、 $\Gamma(x, a)$  は不完全ガンマ関数 (incomplete gamma function)<sup>4</sup> である。

特性関数、モーメント母関数はそれぞれ

$$\psi(\omega) = (1 - i\omega\theta)^{-\alpha} \quad (\text{A.25})$$

$$M(t) = (1 - \theta t)^{-\alpha} \quad (\text{A.26})$$

である。平均、分散、歪度、尖度はそれぞれ

$$\mu = \alpha\theta, \quad (\text{A.27})$$

$$\sigma^2 = \alpha\theta^2, \quad (\text{A.28})$$

$$\beta_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}, \quad (\text{A.29})$$

$$\beta_2 = \frac{6}{\alpha} \quad (\text{A.30})$$

である。最頻値は  $\alpha > 1$  のとき

$$m_o = (\alpha - 1)\theta \quad (\text{A.31})$$

である。

$\alpha = 1$  のとき指数分布 (Exponential distribution)<sup>5</sup>、 $\alpha = \nu/2, \theta = 1/2$  のとき自由度  $\nu$  の  $\chi^2$  分布となる。

ガンマ分布に従う確率変数は負にならず、分布の裾の尾が正の方向にのびている。

<sup>3</sup>ガンマ関数は

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt \quad (\text{A.21})$$

で定義され、

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (\text{A.22})$$

を満たす。したがって  $x$  が整数のときは

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (\text{A.23})$$

となる。また  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  である。

<sup>4</sup>不完全ガンマ関数は

$$\Gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} \exp(-t) dt \quad (\text{A.24})$$

で定義される。

<sup>5</sup>指数分布の PDF および CDF は

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad (\text{A.32})$$

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x) \quad (\text{A.33})$$

である。

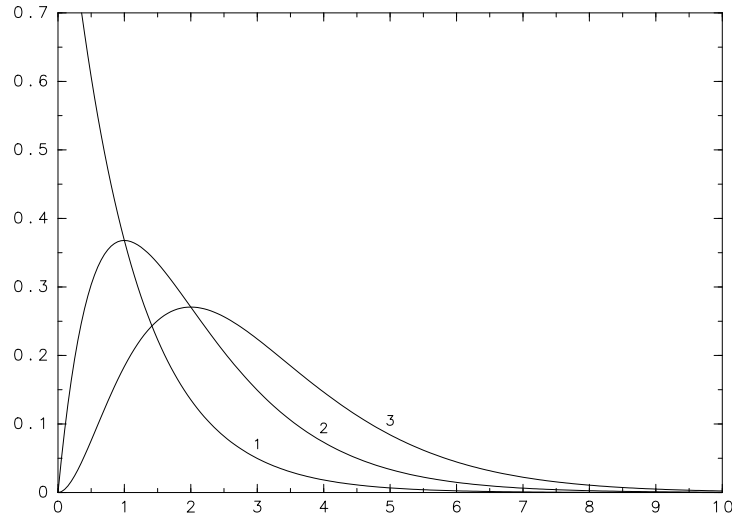


図 A.2:  $\lambda = 1$ 、 $\alpha$  がそれぞれ 1, 2, 3 のときのガンマ分布の PDF。

ガンマ分布は降雨量 (e.g. Wilks and Eggleston, 1992) など負にならない物理量に対して用いられる。

#### A.1.4 ワイブル分布 (Weibull distribution)

破壊は材料の平均的な強度ではなく、最弱点の強度で決まる。Weibull (1951) は破壊現象の統計的性質を表す強度分布を導き出し、後に強度の変わりに故障時間に対してもこの分布が適用できることがわかった。この分布はワイブル分布と呼ばれる。尺度パラメータ  $a (a > 0)$ 、形状パラメータ  $b (b > 0)$  のワイブル分布は  $We(a, b)$  と表され、 $We(a, b)$  の PDF および CDF は

$$f(x) = \frac{b}{a^b} x^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right), \quad (\text{A.34})$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right) \quad (\text{A.35})$$

である (導出は B.1.2 節参照のこと)。平均、分散、歪度、尖度はそれぞれ

$$\mu = a\Gamma(1 + b^{-1}), \quad (\text{A.36})$$

$$\sigma^2 = a^2 \left\{ \Gamma(1 + 2b^{-1}) - \Gamma^2(1 + b^{-1}) \right\}, \quad (\text{A.37})$$

$$\beta_1 = \frac{2\Gamma^3(1 + b^{-1}) - 3\Gamma(1 + b^{-1})\Gamma(1 + 2b^{-1}) + \Gamma(1 + 3b^{-1})}{\{\Gamma(1 + 2b^{-1}) - \Gamma^2(1 + b^{-1})\}^{3/2}}, \quad (\text{A.38})$$

$$\beta_2 = \frac{-6\Gamma^4(1 + b^{-1}) + 12\Gamma^2(1 + b^{-1})\Gamma(1 + 2b^{-1}) - 3\Gamma^2(1 + 2b^{-1})}{\{\Gamma(1 + 2b^{-1}) - \Gamma^2(1 + b^{-1})\}^2}$$

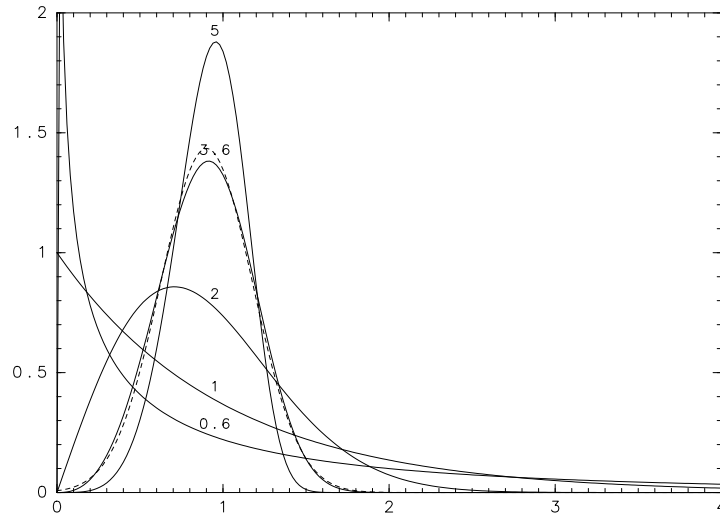


図 A.3: 尺度パラメータが1、形状パラメータがそれぞれ0.6, 1, 2, 3.6, 5 のワイブル分布のPDF(実線)。点線は  $We(1, 3.6)$  と同じ平均および標準偏差をもつ正規分布のPDF を表している。

$$+ \frac{-4\Gamma(1+b^{-1})\Gamma(1+3b^{-1}) + \Gamma(1+4b^{-1})}{\{\Gamma(1+2b^{-1}) - \Gamma^2(1+b^{-1})\}^2} \quad (\text{A.39})$$

である。最頻値、中央値はそれぞれ

$$m_o = a(1 - b^{-1})^{\frac{1}{b}} \quad (b \geq 1), \quad (\text{A.40})$$

$$m = a(\log 2)^{\frac{1}{2}} \approx 0.8326a \quad (\text{A.41})$$

である。

$b = 3.6$  のとき、正規分布に近い。 $b = 1$  のとき指数分布になる。

ワイブル分布は風速に対してよく用いられる (e.g. Conradsen et al., 1984; Pavia and O'Brien, 1986)。

### A.1.5 極値分布 (Extreme value distribution)

指数分布から取り出した標本の最大値や最小値といった極値がとる分布の標本数を無限大にした時の極限の分布を極値分布という。極値分布はガンベル分布 (Gumbel distribution)、フィッシャー・ティペット分布 (Fisher-Tippett distribution) や対数ワイブル分布 (log-Weibull distribution) とも呼ばれる。位置パラメータ  $a$ , ( $a > 0$ ) および尺度パラメータ  $b$ , ( $b > 0$ ) の極値分布のPDF

および CDF はそれぞれ

$$f(x) = \frac{1}{b} \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right) - \frac{x-a}{b}\right), \quad (\text{A.42})$$

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad (\text{A.43})$$

である (導出は B.1.3 節参照のこと)。特性関数、モーメント母関数はそれぞれは

$$\psi(\omega) = \Gamma(1 - i b \omega) \exp(-i a \omega), \quad (\text{A.44})$$

$$M(t) = \Gamma(1 - b t) \exp(a t) \quad (\text{A.45})$$

である。平均、分散、歪度、尖度はそれぞれ

$$\mu = a + b \gamma, \quad (\text{A.46})$$

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6} b^2, \quad (\text{A.47})$$

$$\beta_1 = \frac{12\sqrt{6}\zeta(3)}{\pi^3} \approx 1.139547, \quad (\text{A.48})$$

$$\beta_2 = \frac{12}{5} \quad (\text{A.49})$$

である。ここで  $\gamma$  はオイラー・マスケロニ定数 (Euler-Mascheroni constant)<sup>6</sup>、 $\zeta(3)$  はアペリー定数 (Apéry's constant)<sup>7</sup> である。最頻値、中央値はそれぞれ

$$m_o = a, \quad (\text{A.53})$$

$$m = a - b \log(\log 2) \quad (\text{A.54})$$

である。

極値分布は極端な気象現象に対して用いられる (e.g. Simiu and Heckert, 1996)。

<sup>6</sup>オイラー・マスケロニ定数は

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \quad (\text{A.50})$$

で定義され、 $\gamma \sim 0.57721566$  である。

<sup>7</sup>アペリー定数は

$$\zeta(3) = 1.2020569 \dots \quad (\text{A.51})$$

である。ここで  $\zeta(x)$  はリーマン・ゼータ関数 (Riemann zeta function)

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{u^x - 1}{\exp(u) - 1} du \quad (\text{A.52})$$

である。

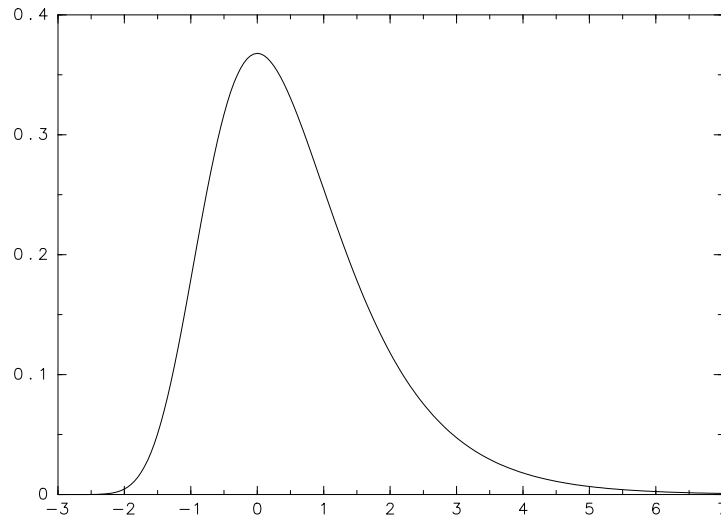


図 A.4:  $a = 0, b = 1$  のときの極値分布の PDF。

### A.1.6 ベータ分布 (Beta distribution)

ベータ分布は  $0 \leq x \leq 1$  上の確率分布で 2 つの形状パラメータ  $\alpha, (\alpha > 0)$  および  $\beta, (\beta > 0)$  のベータ分布は  $Be(\alpha, \beta)$  で表す。  $Be(\alpha, \beta)$  の PDF および CDF はそれぞれ

$$f(x) = \frac{(1-x)^{\beta-1}x^{\alpha-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad (\text{A.55})$$

$$F(x) = \frac{B(x; \alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \quad (\text{A.56})$$

である。ここで  $B(a, b)$  はベータ関数<sup>8</sup>、  $B(x; a, b)$  は不完全ベータ関数<sup>9</sup> である。平均、分散、歪度、尖度はそれぞれ

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad (\text{A.59})$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}, \quad (\text{A.60})$$

$$\beta_1 = \frac{2(\beta - \alpha)\sqrt{\alpha + \beta + 1}}{\sqrt{\alpha\beta}(\alpha + \beta + 2)}, \quad (\text{A.61})$$

<sup>8</sup>ベータ関数は

$$B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (\text{A.57})$$

である。

<sup>9</sup>不完全ベータ関数は

$$B(x; a, b) = \int_0^x u^{a-1}(1-u)^{b-1}du \quad (\text{A.58})$$

であり、  $x = 1$  のときベータ関数となる。

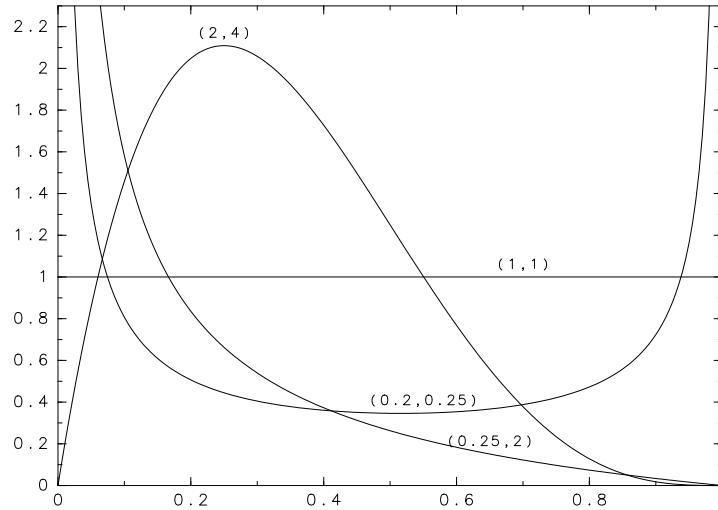


図 A.5:  $(\alpha, \beta) = (0.2, 0.25), (0.25, 2), (1, 1), (2, 4)$  のときのベータ分布の PDF。

$$\beta_2 = \frac{6 \{ \alpha^3 - \alpha^2(2\beta - 1) + \beta^2(\beta + 1) - 2\alpha\beta(\beta + 2) \}}{\alpha\beta(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)} \quad (\text{A.62})$$

である。最頻値は  $a > 1, b > 1$  のとき

$$\frac{a - 1}{a + b - 2} \quad (\text{A.63})$$

である。

$\alpha = 1, \beta = 1$  の時、一様分布 (Uniform distribution) となる。 $X, Y$  が互いに独立でそれぞれ自由度  $m, n$  の  $\chi^2$  分布に従う確率変数であるとき確率変数  $X/(X + Y)$  は  $Be(m/2, n/2)$  に従う。

ベータ分布は雲量や比湿、降水確率の予報の分布に対して用いられる。

### A.1.7 $\chi^2$ 分布 (Chi-squared distribution)

標準正規分布に従っている互いに独立で同一の分布に従う  $\nu$  個の確率変数を考える。これらの二乗和の分布を自由度  $\nu$  の  $\chi^2$  分布 (カイ二乗分布) といい、 $\chi^2(\nu)$  で表す。 $\chi^2(\nu)$  の範囲は  $0 \leq x$  であり、PDF および CDF は

$$f(x) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad (\text{A.64})$$

$$F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (\text{A.65})$$

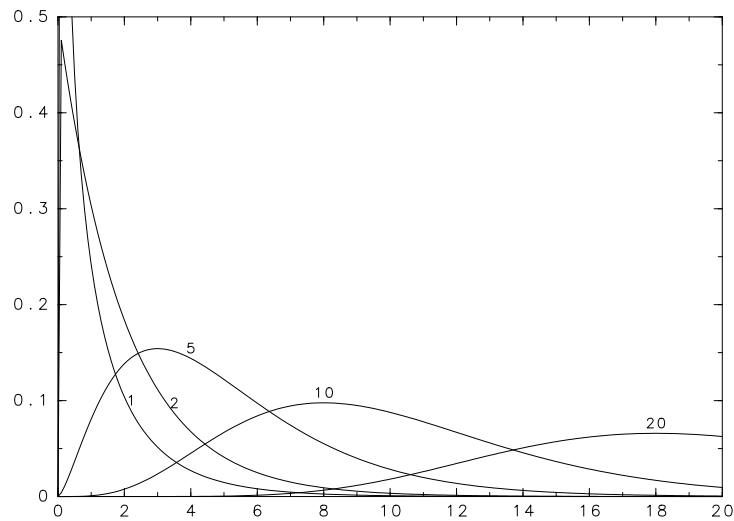


図 A.6: 自由度が 1, 2, 5, 10, 20 の  $\chi^2$  分布の PDF。

である (証明は B.1.5 節参照のこと)。特性関数、モーメント母関数はそれぞれ

$$\phi(\omega) = (1 - 2i\omega)^{-\frac{\nu}{2}}, \quad (\text{A.66})$$

$$M(t) = (1 - 2t)^{-\frac{\nu}{2}} \quad (\text{A.67})$$

である。平均、分散、歪度、尖度はそれぞれ

$$\mu = \nu, \quad (\text{A.68})$$

$$\sigma^2 = 2\nu, \quad (\text{A.69})$$

$$\beta_1 = 2\sqrt{\frac{2}{\nu}}, \quad (\text{A.70})$$

$$\beta_2 = \frac{12}{\nu} \quad (\text{A.71})$$

である。最頻値、中央値はそれぞれ

$$m_o = \nu - 2 \quad (m \geq 2), \quad (\text{A.72})$$

$$m \approx \nu - \frac{2}{3} \quad (m \gg 1) \quad (\text{A.73})$$

である。

$\nu = 2$  のとき指数分布になる。 $\nu$  が大きくなるほど正規分布に近づく。



A.1.8  $t$ -分布 ( $t$ -distribution)

$X$  が標準正規分布、 $Z$  が自由度  $\nu$  の  $\chi^2$  分布に従い、 $X$  と  $Z$  が独立であるとき、統計量  $t$

$$t = \frac{X}{\sqrt{Z/\nu}} \quad (\text{A.74})$$

の分布を自由度  $\nu$  の  $t$ -分布またはスチューデントの  $t$ -分布 (Student's  $t$ -distribution) といい、 $t(\nu)$  と表す。 $t(\nu)$  の PDF は

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (\text{A.75})$$

である (導出は B.1.5 節参照のこと)。いくつかの  $\nu$  に対する特性関数は

$$\psi_1(\omega) = \exp(-|\omega|), \quad (\text{A.76})$$

$$\psi_2(\omega) = \sqrt{2}|\omega|K_1(\sqrt{2}|\omega|), \quad (\text{A.77})$$

$$\psi_3(\omega) = \exp(-\sqrt{3}|\omega|)(1 + \sqrt{3}|\omega|), \quad (\text{A.78})$$

$$\psi_4(\omega) = 2\omega^2 K_2(2|\omega|), \quad (\text{A.79})$$

$$\psi_5(\omega) = \frac{1}{3} \exp(-\sqrt{5}|\omega|)(3 + 3\sqrt{5}|\omega| + 5\omega^2) \quad (\text{A.80})$$

である。ここで  $K_n(x)$  は第 2 種変形ベッセル関数 (modified Bessel function of the second kind)<sup>10</sup> である。平均、分散、歪度、尖度はそれぞれ

$$\mu = 0, \quad (\text{A.82})$$

$$\sigma^2 = \frac{\nu}{\nu - 2}, \quad (\text{A.83})$$

$$\beta_1 = 0, \quad (\text{A.84})$$

$$\beta_2 = \frac{6}{\nu - 4} \quad (\text{A.85})$$

である。最頻値、中央値はともに 0 である。

自由度が大きくなると標準正規分布に近づく。

<sup>10</sup>第 2 種変形ベッセル関数は

$$K_n(x) = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)(2x)^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos t}{(t^2 + x^2)^{n+1/2}} dt \quad (\text{A.81})$$

である。

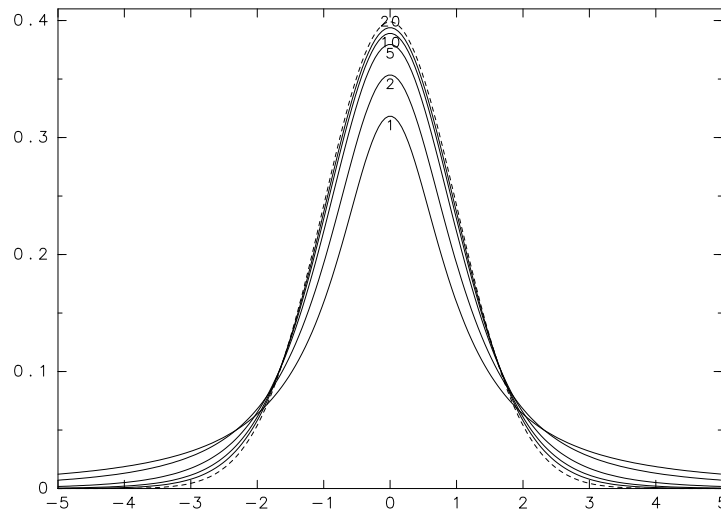


図 A.7: 自由度が 1, 2, 5, 10, 20 の  $t$ -分布の PDF。点線は標準正規分布の PDF を表している。

### A.1.9 $F$ 分布 ( $F$ distribution)

2つの変数  $X, Y$  をそれぞれ自由度  $m, n$  の  $\chi^2$  分布に従う互いに独立である確率変数としたとき、統計量  $F$

$$F = \frac{X/m}{Y/n} \quad (\text{A.86})$$

の分布を自由度  $m, n$  の  $F$  分布といい、 $F(m, n)$  で表す。 $F(m, n)$  の PDF は

$$f(x) = \frac{m^{m/2} n^{n/2}}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \frac{x^{m/2-1}}{(mx+n)^{(m+n)/2}} \quad (\text{A.87})$$

である (導出は B.1.6 節参照のこと)。

平均、分散、歪度、尖度はそれぞれ

$$\mu = \frac{n}{n-2}, \quad (\text{A.88})$$

$$\sigma^2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \quad (\text{A.89})$$

$$\beta_1 = \frac{2(2m+n-2)}{n-6} \sqrt{\frac{2(n-4)}{m(m+n-2)}}, \quad (\text{A.90})$$

$$\beta_2 = \frac{12 \{ (n-2)^2(n-4) + m(m+n-2)(5n-22) \}}{m(n-6)(n-8)(m+n-2)} \quad (\text{A.91})$$

である。最頻値は  $m > 2$  のとき

$$m_o = \frac{n(m-2)}{m(n+2)} \quad (\text{A.92})$$

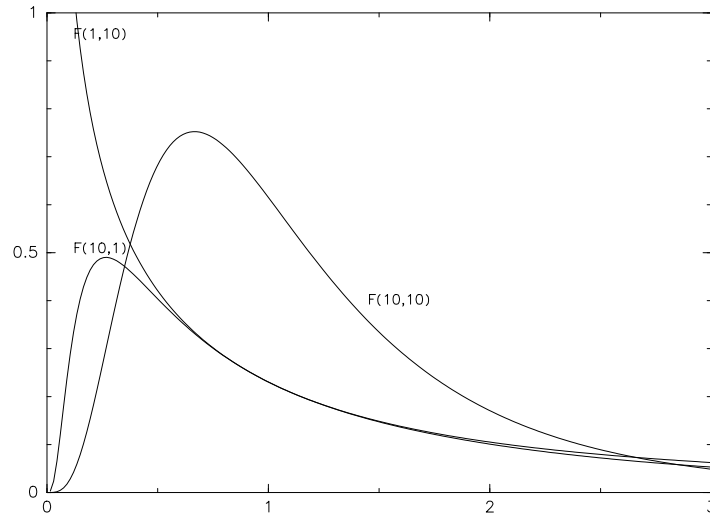


図 A.8: 自由度が  $(1, 10)$ ,  $(10, 1)$ ,  $(10, 10)$  の  $F$  分布の PDF。

である。

## A.2 モーメントの推定

ここでは母集団のモーメントの標本による推定値である標本モーメントの性質について述べる。

### A.2.1 平均・分散・歪度・尖度

平均および分散、歪度、尖度を考える。平均および分散はそれぞれ 1 次および 2 次のモーメントであり、歪度は分散の平方根である標準偏差で規格化した値の期待値まわりの 3 次のモーメントであり、尖度は規格化した値の期待値まわりの 4 次のモーメントから標準正規分布の期待値まわりの 4 次のモーメントである 3 を引いたものである。

母集団の平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$ 、歪度  $\beta_1$ 、尖度  $\beta_2$  はそれぞれ

$$\mu = \kappa_1 = E(X), \quad (\text{A.93})$$

$$\sigma^2 = \kappa_2 = E\left((X - \mu)^2\right), \quad (\text{A.94})$$

$$\beta_1 = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} = E\left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right), \quad (\text{A.95})$$

$$\beta_2 = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} = E\left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4\right) - 3 \quad (\text{A.96})$$

である。ここで  $E(x)$  は  $x$  の期待値、 $\kappa_n$  は  $n$  番目のキュムラント<sup>11</sup> である。標本平均  $m$ 、標本分散  $s^2$ 、標本歪度  $m_3$ 、標本尖度  $m_4$  はそれぞれ

$$m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n, \quad (\text{A.98})$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (X_n - m)^2, \quad (\text{A.99})$$

$$m_3 = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{n=1}^N \left(\frac{X_n - m}{s}\right)^3, \quad (\text{A.100})$$

$$m_4 = \frac{N(N+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{n=1}^N \left(\frac{X_n - m}{s}\right)^4 - \frac{3(N-1)^2}{(N-2)(N-3)} \quad (\text{A.101})$$

である。標本平均、標本分散はそれぞれ母平均、母分散または  $\kappa_1, \kappa_2$  の不偏推定値である。また  $m_3 s^3, m_4 s^4$  はそれぞれ  $\kappa_3, \kappa_4$  の不偏推定値である。キュムラントの不偏推定値は  $k$ -統計量と呼ばれる。これら  $k$ -統計量  $m, s^2, m_3 s^3, m_4 s^4$  の分散はそれぞれ

$$E(m^2) = \frac{1}{N} \kappa_2, \quad (\text{A.102})$$

<sup>11</sup>キュムラントは特性関数を使って

$$\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \frac{(i\omega)^n}{n!} = \log \psi(\omega) \quad (\text{A.97})$$

で定義される。いくつかのキュムラントとモーメントの関係は

$$\begin{aligned} E(\epsilon) &= \kappa_1, \\ E(\epsilon^2) &= \kappa_1^2 + \kappa_2, \\ E(\epsilon^3) &= \kappa_1^3 + \kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2, \\ E(\epsilon^4) &= \kappa_1^4 + \kappa_4 + 4\kappa_1\kappa_3 + 6\kappa_1^2\kappa_2 + \kappa_2^2, \\ E(\epsilon^5) &= \kappa_1^5 + \kappa_5 + 5\kappa_1\kappa_4 + 10\kappa_2\kappa_3 + 10\kappa_1^2\kappa_3 + 15\kappa_1\kappa_2^2 + 10\kappa_2\kappa_1^3, \\ E(\epsilon^6) &= \kappa_1^6 + \kappa_6 + 10\kappa_3^2 + 6\kappa_1\kappa_5 + 15\kappa_2\kappa_4 + 15\kappa_2^3 + 15\kappa_1^2\kappa_4 + 60\kappa_1\kappa_2\kappa_3 + 20\kappa_3\kappa_1^3 + 45\kappa_2^2\kappa_1^2 + 15\kappa_2\kappa_1^4, \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} E\left(\{\epsilon - E(\epsilon)\}^2\right) &= \kappa_2 = \sigma_\epsilon^2, \\ E\left(\{\epsilon - E(\epsilon)\}^3\right) &= \kappa_3, \\ E\left(\{\epsilon - E(\epsilon)\}^4\right) &= \kappa_4 + 3\kappa_2^2 = (\beta_{2\epsilon} + 3)\sigma_\epsilon^4, \\ E\left(\{\epsilon - E(\epsilon)\}^5\right) &= \kappa_5 + 10\kappa_2\kappa_3, \\ E\left(\{\epsilon - E(\epsilon)\}^6\right) &= \kappa_6 + 15\kappa_2\kappa_4 + 10\kappa_3^2 + 15\kappa_2^3 \end{aligned}$$

である。

$$E(s^4) = \frac{1}{N}\kappa_4 + \frac{2}{N-1}\kappa_2^2 \approx \frac{1}{N}(\kappa_4 + 2\kappa_2^2), \quad (\text{A.103})$$

$$E(m_3^2 s^6) = \frac{1}{N}\kappa_6 + \frac{9}{N-1}\kappa_2\kappa_4 + \frac{9}{N-1}\kappa_3^2 + \frac{6N}{(N-1)(N-2)}\kappa_2^3, \quad (\text{A.104})$$

$$\begin{aligned} E(m_4^2 s^8) &= \frac{1}{N}\kappa_8 + \frac{16}{N-1}\kappa_2\kappa_6 + \frac{48}{N-1}\kappa_3\kappa_5 + \frac{34}{N-1}\kappa_4^2 + \frac{72N}{(N-1)(N-2)}\kappa_2^2\kappa_4 \\ &\quad + \frac{144N}{(N-1)(N-2)}\kappa_2\kappa_3^2 + \frac{24N(N+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\kappa_2^4 \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

である。標本平均の標準偏差  $\sigma/\sqrt{N}$  の推定値である  $s/\sqrt{N}$  は標準誤差と呼ばれる。

### A.2.2 標本平均の分布関数

$X(n), (n = 1, \dots, N)$  を互いに独立で同一の分布に従う確率変数としたとき、 $E(X^2) < \infty$  ならば、標準化した標本平均

$$m_s = \frac{m - E(m)}{N^{-\frac{1}{2}}\sigma} \quad (\text{A.106})$$

の分布は  $N$  が大きくなるほど標準正規分布に近くなる。これは中心極限定理として良く知られている。

分布関数を  $N^{-\frac{1}{2}}$  のべきで展開するエッジワース展開により、正規分布よりもより詳しい分布関数の形を求めることができる (Shao, 2003; 清水, 1976; 前園, 2001)。エッジワース展開をつかうと精度の良い近似形を求めることができるほか、標本数に対する正規分布への収束性の議論も行うことができる。

標本平均を標準化した  $m_s$  の分布関数  $F_{m_s}(x)$  のエッジワース展開は

$$F_{m_s}(x) = \Phi(x) + \sum_{l=1}^{\infty} Q_l(x)\phi(x)N^{-\frac{1}{2}l} \quad (\text{A.107})$$

と書くことができ、

$$Q_1(x) = -\frac{\kappa_3}{6}H_2(x), \quad (\text{A.108})$$

$$Q_2(x) = -\frac{\kappa_4}{24}H_3(x) - \frac{\kappa_3^2}{72}H_5 \quad (\text{A.109})$$

となる。ここで  $H_k(x)$  は  $k$  番目のエルミート多項式 (Hermite polynomial)<sup>12</sup>、 $\kappa_k$  は  $(X - \mu)/\sigma$  の  $k$  番目のキュムラントである。正規分布への収束のオーダーは  $N^{-1/2}$  である。

<sup>12</sup>エルミート多項式は

$$H_k^l(x) = kH_{k-1}(x) \quad (\text{A.110})$$

またエッジワース展開の反転で、 $F_{m_s}(x)$  の百分位数の展開であるコーニッシュ・フィッシャー展開は次のようになる。

$$w_\alpha = F_{m_s}^{-1}(\alpha) = z_\alpha + \sum_{l=1}^{\infty} q_l(z_\alpha) N^{-\frac{1}{2}l}, \quad (\text{A.111})$$

$$q_1(x) = -Q_1(x), \quad (\text{A.112})$$

$$q_2(x) = Q_1(x)Q_1'(x) - \frac{1}{2}x\{Q_1(x)\}^2 - Q_2(x) \quad (\text{A.113})$$

となる。ここで  $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$  である。

### A.3 ブートストラップ法

ブートストラップ法 (bootstrap method) は、リサンプリング法の一つであり、Efron (1979) によって定式化された (汪と田栗, 2003)。ブートストラップ法では多くの試行を繰り返すため今日の計算機の発展に伴い利用されるようになってきた。ブートストラップ法には大きく分けてノンパラメトリック・ブートストラップ法とパラメトリック・ブートストラップ法がある。以下ノンパラメトリック・ブートストラップ法について述べる。

今、母集団の分布関数は未知であるが、経験分布関数<sup>13</sup>  $\hat{F}(x)$  が未知の CDF  $F(x)$  の良い近似であるとする。この  $\hat{F}(x)$  から互いに独立で同一の分布に従う  $N$  個の確率変数  $X_1^*, \dots, X_N^*$  (ブートストラップ標本) を取り出し、ブートストラップ統計量  $Y^*$  を計算する。 $X_1^*, \dots, X_N^*$  を取り

を満たし、最初のいくつかの多項式は

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= x, \\ H_2(x) &= x^2 - 1, \\ H_3(x) &= x^3 - 3x, \\ H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3, \\ H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x, \\ H_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15, \\ H_7(x) &= x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x, \\ H_8(x) &= x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105 \end{aligned}$$

となる。

<sup>13</sup>経験分布関数  $\hat{F}(x)$  は

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(X(n) \geq x) \quad (\text{A.114})$$

で定義される。ここで  $N, X(n)$  はそれぞれ変数の総数と  $n$  番目の変数である。また、 $\delta(l)$  はベルヌーイ変数であり、 $l$  が真の時 1 であり、偽のとき 0 である。

出す手順は、 $F(x)$  に従う互いに独立な標本集合（データ）から無作為復元抽出を  $N$  回行えば良い。

母集団の統計量  $Y$  のブートストラップ推定量  $E(Y^*)$  はモンテカルロ近似

$$E(Y^*) \approx \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B Y_b^* \quad (\text{A.115})$$

で求める。ここで  $B, Y_b^*$  はそれぞれシミュレーション回数、 $b$  回目のブートストラップ統計量である。 $B$  はブートストラップ反復回数と呼ばれる。

また  $Y_b^*$  の経験分布関数を使って区間推定や有意性検定を行うことができる (Hall, 1988)。このブートストラップ法を用いた検定をブートストラップ検定と呼ぶ。ブートストラップ法での区間推定や検定には次の代表的な 3 つの方法がある；パーセンタイル法、ブートストラップ  $t$  法、 $BC_a$  法。パーセンタイル法では分布の  $100\alpha\%$  の値を  $Y_b^*$  の順序統計量の  $B\alpha$  番目の値とするものである。ブートストラップ  $t$  法ではスチューデント化された  $Y_b^*$  をもとにパーセンタイル法と同様な手続きで行うものである。 $BC_a$  法ではブートストラップ推定量が偏りや歪みやをもっているときにそれを補正する方法である。

トレンドの問題の場合、データには内部変動とともにトレンドも含まれており、内部変動  $\epsilon(n)$  は未知である。したがって  $\epsilon(n)$  を回帰残差  $e(n)$  をもとに推定する。今

$$\begin{aligned} e(n) &= an + b + \epsilon(n) - (\hat{a}n + \hat{b}) \\ &= \epsilon(n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \epsilon(n) - \left(n - \frac{N+1}{2}\right) S_{nn}^{-1} \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \epsilon(n) \end{aligned} \quad (\text{A.116})$$

であるから

$$\begin{aligned} E(e(n)e(m)) &= E(\epsilon(n)\epsilon(m)) + \frac{1}{N} \{E(\epsilon^2) + (N-1)E^2(\epsilon)\} \\ &\quad + \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \left(m - \frac{N+1}{2}\right) S_{nn}^{-1} \{E(\epsilon^2) - E^2(\epsilon)\} \\ &\quad - \frac{2}{N} (E(\epsilon^2) + (N-1)E^2(\epsilon)) \\ &\quad - 2 \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \left(m - \frac{N+1}{2}\right) S_{nn}^{-1} \{E(\epsilon^2) - E^2(\epsilon)\} \\ &= \left\{ \delta_{nm} - \frac{1}{N} - \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \left(m - \frac{N+1}{2}\right) S_{nn}^{-1} \right\} \sigma_\epsilon^2 \end{aligned} \quad (\text{A.117})$$

となる。ここで  $\delta_{nm}$  はクロネッカーのデルタであり、 $n = m$  のとき 1、 $n \neq m$  のとき 0 である。よって  $e(n)$  の分散は

$$E(e^2(n)) = \left\{ 1 - \frac{1}{N} - \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^2 S_{nn}^{-1} \right\} \sigma_\epsilon^2 \quad (\text{A.118})$$

となる。したがって、 $e(n)$  を  $n$  によらず等しい標準偏差  $\sigma_\epsilon$  をもつように標準化した修正済みの残差  $r(n)$

$$r(n) = \frac{e(n)}{\sqrt{1 - 1/N - S_{nn}^{-1} \{n - (N+1)/2\}^2}} \quad (\text{A.119})$$

を  $\epsilon(n)$  の推定値とする方法が知られている。 $r(n)$  から無作為復元抽出で互いに独立で同一の分布に従う  $N$  個の確率変数  $\epsilon^*(1), \dots, \epsilon^*(N)$  を取り出し、 $a'$  のブートストラップ統計量  $a'^*$  を

$$a'^* = S_{nn}^{-1} \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{N+1}{2} \right) \epsilon^*(n) \quad (\text{A.120})$$

で求める。 $\hat{a}$  のブートストラップ統計量  $\hat{a}^*$  は  $X^*(n) = \hat{a}n + \hat{b} + \epsilon^*(n)$  により得られたブートストラップ標本から

$$\hat{a}^* = S_{nn}^{-1} \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{N+1}{2} \right) X^*(n) \quad (\text{A.121})$$

で求める。 $a'^*$  を繰り返し計算することでその経験分布関数を求める。



## 補遺 B 導出と証明

### B.1 分布関数

#### B.1.1 正規分布の導出

正規分布は二項分布 (Binomial distribution) <sup>1</sup> の極限として導かれる。スターリングの公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} \exp(-n) \quad (\text{B.1})$$

をつかうと二項分布の PDF を  $f_{Bi}(x)$  としたとき  $n \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$\begin{aligned} \log f_{Bi}(x) &= \log n! - \log x! - \log(n-x)! + x \log p + (n-x) \log q \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x + x \\ &\quad - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \left(n-x + \frac{1}{2}\right) \log(n-x) + (n-x) + x \log p + (n-x) \log q \\ &= -\frac{1}{2} \log(2\pi) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n}{x} - \left(x + \frac{1}{2}\right) \log n \\ &\quad + \left(n-x + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n}{n-x} - \left(n-x + \frac{1}{2}\right) \log n + x \log p + (n-x) \log q \\ &= -\frac{1}{2} \log(2\pi n) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(\frac{n}{x}\right) - \frac{1}{2} \log p \\ &\quad + \left(n-x + \frac{1}{2}\right) \log \left(\frac{n}{n-x}\right) - \frac{1}{2} \log q \\ &= -\frac{1}{2} \log(2\pi npq) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(\frac{x}{np}\right) - \left(n-x + \frac{1}{2}\right) \log \left(\frac{n-x}{nq}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

<sup>1</sup>二項分布は不連続分布関数であり、その PDF および CDF はそれぞれ

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}, \\ F(x) &= \sum_{k=1}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

である。ここで  $q = 1 - p$  である。

となる。ここで  $u = (x - np)/\sqrt{npq}$  となる  $u$  を導入すると、(B.2) 式は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\log(2\pi npq) - \left(np + u\sqrt{npq} + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + u\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \\ & - \left(nq - u\sqrt{npq} + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - u\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

となる。ここで  $\log(1+x)$  のテーラー展開

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) \quad (\text{B.4})$$

であるから、(B.3) 式は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\log(2\pi npq) - \left(np + u\sqrt{npq} + \frac{1}{2}\right)\left(u\sqrt{\frac{q}{np}} - u^2\frac{q}{np} + O(n^{-3/2})\right) \\ & - \left(nq - u\sqrt{npq} + \frac{1}{2}\right)\left(u\sqrt{\frac{p}{nq}} - u^2\frac{p}{nq} + O(n^{-3/2})\right) \\ = & -\frac{1}{2}\log(2\pi npq) - u\sqrt{npq} - \frac{1}{2}u^2q - u\sqrt{npq} - \frac{1}{2}u^2p + O(n^{-1/2}) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

となる。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log f_{Bi}(x) = -\frac{1}{2}\log(2\pi npq) - \frac{1}{2}u^2 \quad (\text{B.6})$$

となり、結局

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{Bi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (\text{B.7})$$

を得る。ここで  $\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}$  である。

### B.1.2 ワイブル分布の導出

ある時点  $x$  までは正常で、その時点での瞬間故障率を表す危険度関数  $\lambda(x)$  は

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \quad (\text{B.8})$$

と定義される。

今

$$\lambda(x) = \alpha x^{\beta-1} \quad (\text{B.9})$$

である場合を考える。 $\beta < 1$  のときはこの関数は単調減少であり初期故障型を表し、 $\beta = 1$  のときには故障率が一定の偶発故障型、 $\beta > 1$  のときは単調増加で磨耗故障型を表す。

このとき

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) = \alpha x^{\beta-1} \{1 - F(x)\} \quad (\text{B.10})$$

であり、 $0 \leq F(x) \leq 1$ であることを考慮してこれを解くと

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta}x^\beta\right) \quad (\text{B.11})$$

を得る。 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \frac{1}{a^b}$  とすると

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right) \quad (\text{B.12})$$

を得る。

### B.1.3 極値分布の導出

ここでは極値分布の CDF を導出する (Gumbel, 1958, 1963)。ある  $N$  個の互いに独立で同一の分布に従う確率変数の最大値の PDF および CDF は

$$f_{\max}(x) = N\{F(x)\}^{N-1}f(x), \quad (\text{B.13})$$

$$F_{\max}(x) = \{F(x)\}^N \quad (\text{B.14})$$

である。ここで  $f(x), F(x)$  はもとの分布のそれぞれ PDF および CDF である。

$N$  個の標本のうち  $u_N$  以上の値の数の期待値が 1 であるような値  $u_N$  を特性最大値と定義する。 $N$  個の標本中  $N\{1 - F(x)\}$  個の値は  $x$  以上であることが期待されるから、

$$F(u_N) = 1 - \frac{1}{N} \quad (\text{B.15})$$

となる。

今指数分布から取り出した  $N$  個の標本を考える。指数分布の CDF を  $F_{\exp}(x)$  としたとき、標本の最大値の CDF は

$$\begin{aligned} F_{\max}(x) &= \{F_{\exp}(x)\}^N \\ &= \{1 - \exp(-\lambda x)\}^N \\ &= \left[1 - \exp(-\lambda x) \frac{1}{N \{1 - F_{\exp}(u_N)\}}\right]^N \\ &= \left\{1 - \frac{1}{N} \exp(-\lambda(x - u_N))\right\}^N \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

となる。この CDF の  $N \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{\max}(x) = \exp(-\exp(-\lambda(x - u_N))) \quad (\text{B.17})$$

となる。ここで  $u_N = a, \lambda = 1/b$  とおくと極値分布の CDF

$$\exp\left(-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad (\text{B.18})$$

を得る。最小値についても同様に求まる。

### B.1.4 $\chi^2$ 分布の証明

標準正規分布に従う互いに独立な  $\nu$  個の確率変数の二乗和が  $\chi^2(\nu)$ ,

$$f_{\chi^2(\nu)}(x) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \quad (\text{B.19})$$

に従うことを帰納法で証明する。

$X$  が  $N(0, 1)$  ( $f(x) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2)$ ) に従う場合の  $Y = X^2$  の分布の PDF を考える。  
 $g(x) = x^2$  の逆関数は二価であるから

$$f_Y(y)dy = f_X(x)dx + f_X(-x)dx = 2f_X(x)dx \quad (y \geq 0) \quad (\text{B.20})$$

である。 $dy = 2xdx$  により  $f_Y(y)2x = 2f_X(x)$  となり、したがって  $y$  の PDF は

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \quad (\text{B.21})$$

となる。 $\nu = 1$  のとき

$$f_{\chi^2(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \quad (\text{B.22})$$

であるから成り立つ。

$\nu = n$  のとき成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} f_{\chi^2(n)} * f_{\chi^2(1)} &= \int_0^\infty f_{\chi^2(n)}(x-t) f_{\chi^2(1)}(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (x-t)^{(n-2)/2} \exp\left(-\frac{x-t}{2}\right) \frac{1}{2^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{-1/2} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) dt \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{2^{(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{n/2-1} t^{-1/2} dt \end{aligned}$$

となる。ここで  $t = ux$  とおくと

$$\begin{aligned}
 & \frac{\exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{2^{(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{(n+1)/2-1} \int_0^1 (1-u)^{n/2-1} u^{1/2-1} du \\
 &= \frac{-\exp\left(\frac{x}{2}\right)}{2^{(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\{(n+1)-2\}/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)} \\
 &= \frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} x^{\{(n+1)-2\}/2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \\
 &= f_{\chi^2(n+1)}
 \end{aligned}$$

となり  $\nu = n + 1$  のときも成り立つ。

### B.1.5 $t$ -分布の導出

$X$  が標準正規分布、 $Y$  が自由度  $\nu$  の  $\chi^2$  分布に従い、 $X$  と  $Y$  が独立であるときの確率変数  $T$

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}} \quad (\text{B.23})$$

の PDF を導出する。

$X$  と  $Y$  は互いに独立であるから二次元 PDF  $f_{X,Y}(x, y)$  はそれぞれの PDF の積

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} y^{(\nu-2)/2} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \quad (\text{B.24})$$

となる。 $y = z/\nu$  とすると二次元 PDF  $f_{X,Z}(t, u)$  は

$$\begin{aligned}
 f_{X,Z}(t, u) &= f_{X,Y}(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, u)} \\
 &= f_{X,Y}(x, y) \begin{vmatrix} \sqrt{u} & \frac{t}{2\sqrt{u}} \\ 0 & \nu \end{vmatrix} \\
 &= f_{X,Y}(x, y) \nu \sqrt{u} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2 u}{2}\right) \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\nu u)^{(\nu-2)/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\nu u\right) \nu \sqrt{u} \\
 &= \frac{\nu^{\nu/2}}{2^{(\nu+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} u^{(\nu-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\nu\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)u\right) \quad (\text{B.25})
 \end{aligned}$$

となる。したがって  $f_T(t)$  は

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Z}(t, u) du \\ &= \frac{\nu^{\nu/2}}{2^{(\nu+1)/2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\infty} u^{(\nu-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\nu\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)u\right) du \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

となる。ここで  $v = \nu(1 + t^2/\nu)u$  とすると

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{\nu^{\nu/2}}{2^{(\nu+1)/2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\{\nu(1 + t^2/\nu)\}^{(\nu+1)/2}} \int_0^{\infty} v^{(\nu-1)/2} \exp\left(-\frac{v}{2}\right) dv \\ &= \frac{\nu^{\nu/2}}{2^{(\nu+1)/2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\{\nu(1 + t^2/\nu)\}^{(\nu+1)/2}} 2^{(\nu+1)/2} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \\ &= \frac{\nu^{\nu/2} 2^{(\nu+1)/2} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2^{(\nu+1)/2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \nu^{(\nu+1)/2}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\nu} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

を得る。

### B.1.6 $F$ 分布の導出

$X, Y$  が独立でそれぞれ自由度  $m, n$  の  $\chi^2$  分布に従うときの確率変数  $Z$

$$Z = \frac{X/m}{Y/n} \quad (\text{B.28})$$

の PDF を導出する。

$X$  と  $Y$  は互いに独立であるから二次元 PDF  $f_{X,Y}(x, y)$  はそれぞれの PDF の積

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{y}{2}\right)^{n/2-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{(m+n)/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{m/2-1} y^{n/2-1} \exp\left(-\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

となる。

$U = mY$  としたときの二次元 PDF  $f_{Z,U}(z, u)$  は

$$f_{Z,U}(z, u) = f_{X,Y}(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, u)}$$


---

$$\begin{aligned}
 &= f_{X,Y}(x, y) \begin{vmatrix} u/n & z/n \\ 0 & 1/m \end{vmatrix} \\
 &= f_{X,Y}(x, y) \frac{u}{mn} \\
 &= \frac{1}{2^{(m+n)/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{uz}{n}\right)^{m/2-1} \left(\frac{u}{m}\right)^{n/2-1} \exp\left(-\frac{uz}{2n} - \frac{u}{2m}\right) \frac{u}{mn} \\
 &= \frac{1}{2^{(m+n)/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) m^{n/2} n^{m/2}} z^{m/2-1} u^{(m+n)/2-1} \exp\left(-\frac{mz+n}{2mn} u\right) \quad (\text{B.30})
 \end{aligned}$$

となる。したがって  $f_Z(z)$  は

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \int_0^\infty f_{Z,U}(z, u) du \\
 &= \frac{1}{2^{(m+n)/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) m^{n/2} n^{m/2}} z^{m/2-1} \int_0^\infty u^{(m+n)/2-1} \exp\left(-\frac{mz+n}{2mn} u\right) du \\
 &= \frac{1}{2^{(m+n)/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) m^{n/2} n^{m/2}} z^{m/2-1} \frac{1}{\{(mz+n)/(2mn)\}^{(m+n)/2-1+1}} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \\
 &= \frac{m^{m/2} n^{n/2}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{z^{n/2-1}}{(mz+n)^{(m+n)/2}} \quad (\text{B.31})
 \end{aligned}$$

となる。

## B.2 見かけのトレンド

### B.2.1 最小二乗法による見かけのトレンドの導出

(2.1) 式で表される線型回帰モデルで、最小二乗法により回帰係数を推定する。回帰残差の二乗和

$$L = \sum_{n=1}^N e^2(n) = \sum_{n=1}^N \left\{ X(n) - (\hat{a}n + \hat{b}) \right\}^2 \quad (\text{B.32})$$

が最小になる場合を考える。

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{a}} = -2 \sum_{n=1}^N n \left\{ X(n) - (\hat{a}n + \hat{b}) \right\} = 0, \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{b}} = -2 \sum_{n=1}^N \left\{ X(n) - (\hat{a}n + \hat{b}) \right\} = 0 \quad (\text{B.34})$$

の時  $L$  は最小となる。これを整理すると正規方程式

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N nX(n) = \left(\sum_{n=1}^N n^2\right) \hat{a} + \left(\sum_{n=1}^N n\right) \hat{b} \\ \sum_{n=1}^N X(n) = \left(\sum_{n=1}^N n\right) \hat{a} + N\hat{b} \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

を得る。これを解くと、

$$\hat{a} = S_{nn}^{-1} \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right) X(n), \quad (\text{B.36})$$

$$\hat{b} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(n) - \frac{1}{2}(N+1)\hat{a} \quad (\text{B.37})$$

が得られる。

(2.1) 式から

$$\sum_{n=1}^N X(n) = \frac{1}{2}N(N+1)a + Nb + \sum_{n=1}^N \epsilon(n), \quad (\text{B.38})$$

$$\sum_{n=1}^N nX(n) = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)a + \frac{1}{2}N(N+1)b + \sum_{n=1}^N n\epsilon(n) \quad (\text{B.39})$$

であるから、

$$\hat{a} = a + S_{nn}^{-1} \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \epsilon(n) \quad (\text{B.40})$$

となり、したがって見かけのトレンド  $a'$  は

$$a' = \hat{a} - a = S_{nn}^{-1} \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \epsilon(n) \quad (\text{B.41})$$

となる。

## B.2.2 $a', a'^2, a'^3 a'^4$ の期待値の導出

準備として  $\sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^m$  を計算しておく。まず  $m$  が奇数の場合を考える。 $N$  が奇数の時

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^m \\ &= \left(\frac{N+1}{2} - \frac{N+1}{2}\right)^m + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \left|n - \frac{N+1}{2}\right|^{m-1} \left\{ \left(n - \frac{N+1}{2}\right) + \left(\frac{N+1}{2} - n\right) \right\} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$



$N$  が偶数の時

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^m &= \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \left|n - \frac{N}{2}\right|^{m-1} \left\{ \left(n - \frac{N}{2}\right) + \left(\frac{N}{2} - n\right) \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

となり、 $N$  によらず 0 であることが分かる。 $m$  が偶数の場合は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N n &= N(N+1)/2 \\ \sum_{n=1}^N n^2 &= N(N+1)(2N+1)/6 \\ \sum_{n=1}^N n^3 &= N^2(N+1)^2/4 \\ \sum_{n=1}^N n^4 &= N(2N+1)(3N^3+6N^2+2N-1)/30 \\ \sum_{n=1}^N n^5 &= N^2(N+1)^2(2N^2+2N-1)/12 \\ \sum_{n=1}^N n^6 &= N(N+1)(2N+1)(3N^4+6N^3-3N+1)/42 \\ &\dots \end{aligned}$$

から、それぞれ、

$$\sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}N(N+1)(N-1) \quad (\text{B.44})$$

$$\sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^4 = \frac{1}{240}N(N+1)(N-1)(3N^2-7) \quad (\text{B.45})$$

$$\sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^6 = \frac{1}{1344}N(N+1)(N-1)(3N^4-18N^2+31) \quad (\text{B.46})$$

となる。

$a', a'^2, a'^3, a'^4$  の期待値はそれぞれ

$$\begin{aligned} E(a') &= E\left(S_{nn}^{-1} \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \epsilon(n)\right) \\ &= S_{nn}^{-1} E(\epsilon) \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

$$\begin{aligned}
E(a'^2) &= E\left(\left\{S_{nn}^{-1}\sum_{n=1}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)\epsilon(n)\right\}^2\right) \\
&= S_{nn}^{-2}E\left(\sum_{n=1}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)^2\epsilon^2(n)+\sum_{n=1}^N\sum_{m\neq n}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)\left(m-\frac{N+1}{2}\right)\epsilon(n)\epsilon(m)\right) \\
&= S_{nn}^{-2}\left\{\sum_{n=1}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)^2E(\epsilon^2)-\sum_{n=1}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)^2E^2(\epsilon)\right\} \\
&= S_{nn}^{-1}\{E(\epsilon^2)-E^2(\epsilon)\} \\
&= S_{nn}^{-1}E\left(\{\epsilon-E(\epsilon)\}^2\right) \\
&= S_{nn}^{-1}\sigma_\epsilon^2
\end{aligned} \tag{B.48}$$

$$\begin{aligned}
E(a'^3) &= E\left(\left\{S_{nn}^{-1}\sum_{n=1}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)\epsilon(n)\right\}^3\right) \\
&= S_{nn}^{-3}E\left(\sum_{n=1}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)^3\epsilon^3(n)\right. \\
&\quad \left.+3\sum_{n=1}^N\sum_{m\neq n}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)^2\left(m-\frac{N+1}{2}\right)\epsilon^2(n)\epsilon(m)\right. \\
&\quad \left.+\sum_{n=1}^N\sum_{m\neq n}^N\sum_{l\neq n,m}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)\left(m-\frac{N+1}{2}\right)\left(l-\frac{N+1}{2}\right)\epsilon(n)\epsilon(m)\epsilon(l)\right) \\
&= S_{nn}^{-3}\left\{\sum_{n=1}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)^3E(\epsilon^3)-3\sum_{n=1}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)^3E(\epsilon^2)E(\epsilon)\right. \\
&\quad \left.-\sum_{n=1}^N\sum_{m\neq n}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)\left(m-\frac{N+1}{2}\right)\left(n-\frac{N+1}{2}+m-\frac{N+1}{2}\right)E^3(\epsilon)\right\} \\
&= -S_{nn}^{-3}\sum_{n=1}^N\sum_{m\neq n}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)\left\{\left(m-\frac{N+1}{2}\right)\left(n-\frac{N+1}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.+\left(m-\frac{N+1}{2}\right)^2\right\}E^3(\epsilon) \\
&= -S_{nn}^{-3}\sum_{n=1}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)\left\{-2\left(n-\frac{N+1}{2}\right)^2+\frac{N(N+1)(N-1)}{12}\right\}E(\epsilon)^3 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.49}$$

$$\begin{aligned}
E(a'^4) &= E\left(\left\{S_{nn}^{-1}\sum_{n=1}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)\epsilon(n)\right\}^4\right) \\
&= S_{nn}^{-4}E\left(\sum_{n=1}^N\left(n-\frac{N+1}{2}\right)^4\epsilon^4(n)\right)
\end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
 & +3 \sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^2 \left(m - \frac{N+1}{2}\right)^2 \epsilon^2(n) \epsilon^2(m) \\
 & +4 \sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^3 \left(m - \frac{N+1}{2}\right) \epsilon^3(n) \epsilon(m) \\
 & +6 \sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n}^N \sum_{l \neq n, m}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^2 \left(m - \frac{N+1}{2}\right) \left(l - \frac{N+1}{2}\right) \epsilon^2(n) \epsilon(m) \epsilon(l) \\
 & + \sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n}^N \sum_{l \neq n, m}^N \sum_{k \neq n, m, l}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \left(m - \frac{N+1}{2}\right) \left(l - \frac{N+1}{2}\right) \left(k - \frac{N+1}{2}\right) \\
 & \qquad \qquad \qquad \epsilon(n) \epsilon(m) \epsilon(l) \epsilon(k) \\
 = & S_{nn}^{-4} \left[ \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^4 E(\epsilon^4) \right. \\
 & +3 \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^2 \left\{ \frac{N(N+1)(N-1)}{12} - \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^2 \right\} E^2(\epsilon^2) \\
 & -4 \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^4 E(\epsilon^3) E(\epsilon) \\
 & -6 \sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^2 \left(m - \frac{N+1}{2}\right) \left(n - \frac{N+1}{2} + m - \frac{N+1}{2}\right) \\
 & E(\epsilon^2) E^2(\epsilon) \\
 & - \sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n}^N \sum_{l \neq n, m}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \left(m - \frac{N+1}{2}\right) \left(l - \frac{N+1}{2}\right) \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left(n - \frac{N+1}{2} + m - \frac{N+1}{2} + l - \frac{N+1}{2}\right) E^4(\epsilon) \right] \\
 = & S_{nn}^{-4} \left[ \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^4 \left\{ E(\epsilon^4) - 4E(\epsilon^3) E(\epsilon) \right\} \right. \\
 & +3 \left\{ \frac{N(N+1)(N-1)}{12} \right\}^2 E(\epsilon^2)^2 - 3 \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^4 E(\epsilon^2)^2 \\
 & -6 \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^2 \left\{ \frac{N(N+1)(N-1)}{12} - 2 \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^2 \right\} E(\epsilon^2) E^2(\epsilon) \\
 & - \sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \left(m - \frac{N+1}{2}\right) \left\{ \frac{N(N+1)(N-1)}{12} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^2 - \left(m - \frac{N+1}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{N+1}{2} + m - \frac{N+1}{2}\right)^2 \right\} E^4(\epsilon) \left. \right] \\
 = & S_{nn}^{-4} \left[ \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^4 \left\{ E(\epsilon^4) - 3E^2(\epsilon^2) - 4E(\epsilon^3) E(\epsilon) \right\} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3 \left\{ \frac{N(N+1)(N-1)}{12} \right\}^2 E^2(\epsilon^2) - 6 \left\{ \frac{N(N+1)(N-1)}{12} \right\}^2 E(\epsilon^2) E(\epsilon)^2 \\
& +12 \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{N+1}{2} \right)^4 E(\epsilon^2) E^2(\epsilon) \\
& - \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{N+1}{2} \right) \left\{ -\frac{N(N+1)(N-1)}{12} \left( n - \frac{N+1}{2} \right) + 2 \left( n - \frac{N+1}{2} \right)^3 \right. \\
& \quad \left. - 2 \left( n - \frac{N+1}{2} \right) \left( \frac{N(N+1)(N-1)}{12} - \left( n - \frac{N+1}{2} \right)^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + 2 \left( n - \frac{N+1}{2} \right)^3 \right\} E^4(\epsilon) \Big] \\
= & S_{nn}^{-4} \left[ \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{N+1}{2} \right)^4 \left\{ E(\epsilon^4) - 3E^2(\epsilon^2) - 4E(\epsilon^3) E(\epsilon) + 12E(\epsilon^2) E^2(\epsilon) \right\} \right. \\
& + \left\{ \frac{N(N+1)(N-1)}{12} \right\}^2 \left\{ 3E(\epsilon^2)^2 - 6E(\epsilon^2) E^2(\epsilon) \right\} \\
& \left. + 3 \left\{ \frac{N(N+1)(N-1)}{12} \right\}^2 E^4(\epsilon) - 6 \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{N+1}{2} \right)^4 E^4(\epsilon) \right] \\
= & S_{nn}^{-4} \left[ \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{N+1}{2} \right)^4 \left\{ E(\epsilon^4) - 4E(\epsilon^3) E(\epsilon) + 6E(\epsilon^2) E^2(\epsilon) - 3E^4(\epsilon) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 3E^2(\epsilon^2) + 6E(\epsilon^2)^2 E^2(\epsilon) - 3E^4(\epsilon) \right\} \right. \\
& \left. + 3 \left\{ \frac{N(N+1)(N-1)}{12} \right\}^2 \left\{ E^2(\epsilon^2) - 2E(\epsilon^2) E^2(\epsilon) + E^4(\epsilon) \right\} \right] \\
= & S_{nn}^{-4} \left[ \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{N+1}{2} \right)^4 \left\{ E(\{\epsilon - E(\epsilon)\}^4) - 3(E(\epsilon^2) - E^2(\epsilon))^2 \right\} \right. \\
& \left. + 3 \left\{ \frac{N(N+1)(N-1)}{12} \right\}^2 (E(\epsilon^2) - E^2(\epsilon))^2 \right] \\
= & S_{nn}^{-2} E^2(\{\epsilon - E(\epsilon)\}^2) \left[ \frac{3}{5} \frac{3N^2 - 7}{N(N+1)(N-1)} \left\{ \frac{E(\{\epsilon - E(\epsilon)\}^4)}{E(\{\epsilon - E(\epsilon)\}^2)} - 3 \right\} + 3 \right] \\
= & S_{nn}^{-2} \sigma_\epsilon^4 \left\{ \frac{3}{5} \frac{3N^2 - 7}{N(N+1)(N-1)} \beta_{2\epsilon} + 3 \right\} \tag{B.50}
\end{aligned}$$

となる。

### B.2.3 見かけのトレンドのエッジワース展開とコーニッシュ・フィッシャー展開の導出

$a'_s$  の分布関数のエッジワース展開を求める (cf. Shao, 2003; 清水, 1976; 前園, 2001)。  $a'_s$  の分布の特性関数は  $a'$  の分布の特性関数 (2.12 式) より

$$\begin{aligned}\psi_{a'_s}(\omega) &= \prod_{n=1}^N \psi_\epsilon \left( \frac{1}{S_{nn}^{-1/2} \sigma_\epsilon} S_{nn}^{-1} \left( n - \frac{N+1}{2} \right) \omega \right) \\ &= \prod_{n=1}^N \psi_\epsilon \left( \frac{1}{\sqrt{S_{nn}} \sigma_\epsilon} \left( n - \frac{N+1}{2} \right) \omega \right) \\ &= \prod_{n=1}^N \psi_\epsilon \left( (S_{nn} \kappa_2)^{-\frac{1}{2}} \left( n - \frac{N+1}{2} \right) \omega \right)\end{aligned}$$

であるから、キムラントの定義 (A.97) 式から

$$\begin{aligned}\log \psi_{a'_s}(\omega) &= \sum_{n=1}^N \log \psi_\epsilon \left( (S_{nn} \kappa_2)^{-\frac{1}{2}} \left( n - \frac{N+1}{2} \right) \omega \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\kappa_j}{j!} \left\{ i (S_{nn} \kappa_2)^{-\frac{1}{2}} \left( n - \frac{N+1}{2} \right) \omega \right\}^j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\kappa_j}{j!} (S_{nn} \kappa_2)^{-\frac{j}{2}} (i\omega)^j \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{N+1}{2} \right)^j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\kappa_{2j}}{(2j)!} S_{nn}^{-j} \kappa_2^{-j} (i\omega)^{2j} \sum_{n=1}^N \left( n - \frac{N+1}{2} \right)^{2j}\end{aligned}\tag{B.51}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\psi_{a'_s}(\omega) &= \prod_{n=1}^N \exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} S_{nn}^{-j} \left( n - \frac{N+1}{2} \right)^{2j} \frac{\kappa_{2j}}{\kappa_2^j} (i\omega)^{2j} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{40} \frac{3N^2 - 7}{N(N+1)(N-1)} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} (i\omega)^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{560} \frac{3N^4 - 18N^2 + 31}{N^2(N+1)^2(N-1)^2} \frac{\kappa_6}{\kappa_2^3} (i\omega)^6 + \dots \right\} \\ &= \exp \left( -\frac{\omega^2}{2} \right) \\ &\quad \exp \left\{ \frac{1}{40} \left( \frac{3}{N} - \frac{4}{N^3} + \dots \right) \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} (i\omega)^4 + \frac{1}{560} \left( \frac{3}{N^2} - \frac{12}{N^4} + \dots \right) \frac{\kappa_6}{\kappa_2^3} (i\omega)^6 + \dots \right\} \\ &= \exp \left( -\frac{\omega^2}{2} \right) \left[ 1 + \frac{3}{40} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} (i\omega)^4 N^{-1} + \left\{ \frac{3}{560} \frac{\kappa_6}{\kappa_2^3} (i\omega)^6 + \frac{9}{3200} \frac{\kappa_4^2}{\kappa_2^4} (i\omega)^8 \right\} N^{-2} + \dots \right]\end{aligned}\tag{B.52}$$

となる。今

$$\psi_{a'_s}(\omega) = \sqrt{2\pi}\phi(\omega) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(i\omega)N^{-l} = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^2\right) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(i\omega)N^{-l} \quad (\text{B.53})$$

となる多項式  $P_l$  を考えると

$$\begin{aligned} P_0(\omega) &= 1, \\ P_1(\omega) &= \frac{3}{40} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \omega^4, \\ P_2(\omega) &= \frac{3}{560} \frac{\kappa_6}{\kappa_2^3} \omega^6 + \frac{9}{3200} \frac{\kappa_4^2}{\kappa_2^4} \omega^8, \end{aligned}$$

となる。よって  $a'_s$  の PDF は

$$\begin{aligned} f_{a'_s}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \psi_{a'_s}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \sqrt{2\pi}\phi(\omega) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(i\omega)N^{-l} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \phi(\omega) P_l(i\omega)N^{-l} d\omega \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

となる。標準正規分布の特性関数は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \exp(i\omega x) dx = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^2\right) = \sqrt{2\pi}\phi(\omega). \quad (\text{B.55})$$

であり、両辺を  $\omega$  で  $k$  回微分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k \phi(x) \exp(i\omega x) dx = \sqrt{2\pi} \frac{d^k}{d\omega^k} \phi(\omega) \quad (\text{B.56})$$

であるから

$$f_{a'_s}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l\left(\frac{d}{dx}\right) \phi(x) N^{-l} \quad (\text{B.57})$$

となる。 $a'_s$  の累積分布関数は

$$F_{a'_s}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l\left(\frac{d}{dx}\right) \Phi(x) N^{-l} \quad (\text{B.58})$$

となる。そこで

$$F_{a'_s}(x) = \Phi(x) + \sum_{l=1}^{\infty} Q_l(x) \phi(x) N^{-\frac{1}{2}l} \quad (\text{B.59})$$

とするとエルミート多項式を使うと  $\phi(x)$  の  $k$  回  $x$  微分は

$$\frac{d^k}{dx^k} \phi(x) = (-1)^k H_k(x) \phi(x) \quad (\text{B.60})$$

と書けるので

$$Q_{2m-1}(x) = 0, \quad (\text{B.61})$$

$$Q_2(x)\phi(x) = \frac{3}{40} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \frac{d^4}{dx^4} \Phi(x) = \frac{3}{40} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \frac{d^3}{dx^3} \phi(x) = -\frac{3}{40} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} H_3(x)\phi(x),$$

$$Q_4(x)\phi(x) = \left\{ \frac{3}{560} \frac{\kappa_6}{\kappa_2^3} \frac{d^6}{dx^6} + \frac{9}{3200} \frac{\kappa_4^2}{\kappa_2^4} \frac{d^8}{dx^8} \right\} \Phi(x) = - \left\{ \frac{3}{560} \frac{\kappa_6}{\kappa_2^3} H_5(x) + \frac{9}{3200} \frac{\kappa_4^2}{\kappa_2^4} H_7(x) \right\} \phi(x)$$

となり

$$Q_{2m-1}(x) = 0,$$

$$Q_2(x) = -\frac{3}{40} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} H_3(x),$$

$$Q_4(x) = -\frac{3}{560} \frac{\kappa_6}{\kappa_2^3} H_5(x) - \frac{9}{3200} \frac{\kappa_4^2}{\kappa_2^4} H_7(x)$$

を得る。ここで  $m$  は正の整数である。

コーニッシュ・フィッシャー展開はエッジワース展開の反転である。 $\alpha = F_{a'_s}(w_\alpha)$  のとき

$$w_\alpha = z_\alpha + \sum_{l=1}^{\infty} q_l(z_\alpha) N^{-\frac{1}{2}l} \quad (\text{B.62})$$

となる  $q_l(x)$  を考える。

$$\alpha = F_{a'_s}(w_\alpha) = \Phi(w_\alpha) + \frac{1}{N} Q_2(w_\alpha)\phi(w_\alpha) + \frac{1}{N^2} Q_4(w_\alpha)\phi(w_\alpha) + O(N^{-3}) \quad (\text{B.63})$$

であり、 $z_\alpha \gg \sum_{l=1}^{\infty} q_l(z_\alpha) N^{-\frac{1}{2}l}$  としてテーラー展開すると

$$\begin{aligned} \alpha &= \Phi(z_\alpha) + \frac{1}{N} Q_2(z_\alpha)\phi(z_\alpha) + \frac{1}{N^2} Q_4(z_\alpha)\phi(z_\alpha) + O(N^{-3}) \\ &\quad \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} q_l(z_\alpha) N^{-\frac{1}{2}l} \right\} \left[ \Phi'(z_\alpha) + \frac{1}{N} \{ Q_2'(z_\alpha)\phi(z_\alpha) + Q_2(z_\alpha)\phi'(z_\alpha) \} + O(N^{-2}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} q_l(z_\alpha) N^{-\frac{1}{2}l} \right\}^2 \left[ \Phi''(z_\alpha) + \frac{1}{N} \{ Q_2(z_\alpha)\phi(z_\alpha) \}'' + O(N^{-2}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{6} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} q_l(z_\alpha) N^{-\frac{1}{2}l} \right\}^3 \{ \Phi'''(z_\alpha) + O(N^{-1}) \} \\ &\quad + \frac{1}{24} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} q_l(z_\alpha) N^{-\frac{1}{2}l} \right\}^4 \{ \Phi''''(z_\alpha) + O(N^{-1}) \} \\ &= \alpha + \frac{1}{N^{1/2}} \{ q_1(z_\alpha)\phi(z_\alpha) \} + \frac{1}{N} \left\{ Q_2(z_\alpha)\phi(z_\alpha) + q_2(z_\alpha)\phi(z_\alpha) + \frac{1}{2} q_1^2(z_\alpha)\phi'(z_\alpha) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{N^{3/2}} \left[ q_3(z_\alpha) \phi(z_\alpha) + \frac{1}{6} q_1^3(z_\alpha) \phi''(z_\alpha) + q_1(z_\alpha) \{ Q_2'(z_\alpha) \phi(z_\alpha) + Q_2(z_\alpha) \phi'(z_\alpha) \} \right] \\
& + \frac{1}{N^2} [ Q_4(z_\alpha) \phi(z_\alpha) + q_2 \{ Q_2'(z_\alpha) \phi(z_\alpha) + Q_2(z_\alpha) \phi'(z_\alpha) \} \\
& \quad + q_4(z_\alpha) \phi(z_\alpha) + \frac{1}{2} q_2^2(z_\alpha) \phi'(z_\alpha) + \frac{1}{2} q_1^2(z_\alpha) \{ Q_2(z_\alpha) \phi(z_\alpha) \}'' + \frac{1}{24} q_1^4(z_\alpha) \phi'''(z_\alpha) ] + \dots \\
= & \alpha + \frac{1}{N^{1/2}} \{ q_1(z_\alpha) \phi(z_\alpha) \} + \frac{1}{N} \left\{ Q_2(z_\alpha) + q_2(z_\alpha) - \frac{1}{2} z_\alpha q_1^2(z_\alpha) \right\} \phi(z_\alpha) \\
& + \frac{1}{N^{3/2}} \left[ q_3(z_\alpha) + \frac{1}{6} H_2(z_\alpha) q_1^3(z_\alpha) + q_1(z_\alpha) \{ Q_2'(z_\alpha) - z_\alpha Q_2(z_\alpha) \} \right] \phi(z_\alpha) \\
& + \frac{1}{N^2} [ Q_4(z_\alpha) + q_2 \{ Q_2'(z_\alpha) - z_\alpha Q_2(z_\alpha) \} + q_4(z_\alpha) \\
& \quad + \frac{1}{2} z_\alpha q_2^2(z_\alpha) + \frac{1}{2} q_1^2(z_\alpha) \frac{\{ Q_2(z_\alpha) \phi(z_\alpha) \}''}{\phi(z_\alpha)} - \frac{1}{24} q_1^4(z_\alpha) H_3(z_\alpha) ] \phi(z_\alpha) + \dots
\end{aligned}$$

となる。これはすべての  $N, \alpha$  について成り立つから

$$q_1(x) = 0, \quad (\text{B.64})$$

$$Q_2(x) + q_2(x) = 0, \quad (\text{B.65})$$

$$q_3(x) = 0, \quad (\text{B.66})$$

$$Q_4(x) + q_2 \{ Q_2'(x) - x Q_2(x) \} + q_4(x) - \frac{1}{2} x q_2^2(x) = 0 \quad (\text{B.67})$$

となり、したがって

$$\begin{aligned}
q_{2m-1}(x) &= 0, \\
q_2(x) &= -Q_2(x), \\
q_4(x) &= Q_2(x) Q_2'(x) - \frac{1}{2} x \{ Q_2(x) \}^2 - Q_4(x)
\end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

を得る。

## B.2.4 スチューデント化統計量が $t$ -分布に従うことの証明

多くの場合、内部変動  $\epsilon(n)$  の母分散  $\sigma_\epsilon^2$  は未知であり、 $\sigma_\epsilon^2$  は標本分散  $s_\epsilon^2$

$$s_\epsilon^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{n=1}^N e_n^2 \quad (\text{B.69})$$

で推定される。 $(s_\epsilon^2)$  の導出は B.2.5 節を参照のこと)。見かけのトレンドの分散の推定値  $s_{a'}^2$  は  $s_\epsilon$  を使うと

$$s_{a'}^2 = S_{nm}^{-1} s_\epsilon^2 \quad (\text{B.70})$$



である。

$a'_s$  は  $a'$  を母標準偏差  $\sigma_{a'}$  で規格化したが、代わりに  $\sigma_{a'}$  の推定値である  $s_{a'}$  で規格化した統計量  $t$

$$t = \frac{a'}{s_{a'}} \quad (\text{B.71})$$

を考える。このように標準偏差の推定値で規格化した統計量はスチューデント化統計量と呼ばれる。

内部変動が正規分布に従う場合、この見かけのトレンドのスチューデント化統計量は自由度  $N - 2$  の  $t$ -分布  $t(N - 2)$  に従うことが知られている。以下その証明である。 $\epsilon(n)$  が正規分布に従うとき、 $a'_s$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従い、 $(N - 2)s_\epsilon^2/\sigma_\epsilon^2$  は自由度  $N - 2$  のカイ二乗分布  $\chi^2(N - 2)$  に従う (証明は B.2.5 節参照のこと)。また  $\{a'_s, (N - 2)s_\epsilon^2/\sigma_\epsilon^2\}$  は互いに独立である。(2.10) 式より

$$t = \frac{a'}{\sqrt{S_{xx}^{-1}s_\epsilon^2}} = \frac{a'/\sigma_{a'}}{\sqrt{s_\epsilon^2/\sigma_\epsilon^2}} = \frac{a'_s}{\sqrt{\frac{(N-2)s_\epsilon^2}{\sigma_\epsilon^2}/(N-2)}} \quad (\text{B.72})$$

であるから、統計量  $t$  は  $t(N - 2)$  に従う。

### B.2.5 トрендをもつデータにおける内部変動の標本分散の導出

$\epsilon(n)$  の標本分散  $s_\epsilon^2$  を計算する (cf. 岡部, 2002, 5.6.4 節)。以下で表される行列  $M$  を考える;

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & \cdots & m_{NN} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.73})$$

$$m_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{N} - S_{nn}^{-1} \left( i - \frac{N+1}{2} \right) \left( j - \frac{N+1}{2} \right). \quad (\text{B.74})$$

今、 $M^2 = M$  であるから  $\lambda, v$  をそれぞれ行列  $M$  の固有値、固有ベクトルとすると

$$M^2 v = \lambda^2 v = M v = \lambda v \quad (\text{B.75})$$

となり、よって

$$\lambda^2 = \lambda \quad (\text{B.76})$$

となる。したがって固有値  $\lambda$  は 1 または 0 である。今 2 つのベクトル  $v^{(N)}, v^{(N-1)}$ ,

$$\begin{aligned} v^{(N)} &= \frac{1}{\sqrt{N}} t(1, 1, \dots, 1) \\ v^{(N-1)} &= S_{nn}^{-1t} \left( 1 - \frac{N+1}{2}, 2 - \frac{N+1}{2}, \dots, N - \frac{N+1}{2} \right) \end{aligned}$$

を考える。この2つのベクトルは

$$Mv^{(N)} = Mv^{(N-1)} = 0 \quad (\text{B.77})$$

を満たすので、行列  $M$  の固有ベクトル (固有値 0) であることが分かる。  $N$  次元のベクトル空間  $\mathbb{R}^N$  を次のように直行分解する;

$$\mathbb{R}^N = \{c_N v^{(N)} + c_{N-1} v^{(N-1)}; c_N, c_{N-1} \in \mathbb{R}\} \oplus \{c_N v^{(N)} + c_{N-1} v^{(N-1)}; c_N, c_{N-1} \in \mathbb{R}\}^\perp. \quad (\text{B.78})$$

直行補空間  $\{c_N v^{(N)} + c_{N-1} v^{(N-1)}; c_N, c_{N-1} \in \mathbb{R}\}^\perp$  は  $N-2$  次元の部分空間であるから、その中の正規直交系を  $\{v^{(n)}; 1 \leq n \leq N-2\}$  とする。  $\{v^{(n)}; 1 \leq n \leq N\}$  は  $N$  次元のベクトル空間  $\mathbb{R}^N$  の1つの正規直交系を与える。また次のことが成り立つ;

$$\sum_{j=1}^N v_j^{(n)} v_j^{(m)} = \delta_{nm} \quad (1 \leq n, m \leq N), \quad (\text{B.79})$$

$$\sum_{j=1}^N v_j^{(n)} = \sum_{j=1}^N j v_j^{(n)} = 0 \quad (1 \leq n \leq N-2). \quad (\text{B.80})$$

2つ目の関係式より

$$Mv^{(n)} = v^{(n)} \quad (1 \leq n \leq N-2) \quad (\text{B.81})$$

となりベクトル  $v^{(n)} (1 \leq n \leq N-2)$  が行列  $M$  の固有ベクトル (固有値 1) であることが分かる。

ベクトル  $X$  を  $X = {}^t(X(1), X(2), \dots, X(N))$  とすると回帰残差  $e^{(n)}$  は

$$e^{(n)} = (MX)_n \quad (\text{B.82})$$

となる。ベクトル  $MX$  は直交補空間  $\{c_N v^{(N)} + c_{N-1} v^{(N-1)}; c_N, c_{N-1} \in \mathbb{R}\}^\perp$  に属するので、正規直交系  $\{v^{(n)}; 1 \leq n \leq N-2\}$  で展開する;

$$MX = \sum_{n=1}^{N-2} c_n v^{(n)}. \quad (\text{B.83})$$

係数  $c_n$  は

$$c_n = \sum_{j=1}^N (MX)_j v_j^{(n)} = \sum_{j=1}^N e_j v_j^{(n)} \quad (1 \leq n \leq N-2) \quad (\text{B.84})$$

である。ここで (A.117) 式から

$$\begin{aligned} E(c_n c_m) &= E \left( \sum_{j=1}^N e^{(j)} v_j^{(n)} \sum_{i=1}^N e^{(i)} v_i^{(m)} \right) \\ &= E \left( \sum_{j=1}^N e^2(j) v_j^{(n)} v_j^{(m)} \right) + E \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j}^N e^{(j)} e^{(i)} v_j^{(n)} v_i^{(m)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^N \left\{ 1 - \frac{1}{N} - \left( j - \frac{N+1}{2} \right)^2 S_{nn}^{-1} \right\} \sigma_\epsilon^2 v_j^{(n)} v_j^{(m)} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j}^N \left\{ -\frac{1}{N} - \left( j - \frac{N+1}{2} \right) \left( i - \frac{N+1}{2} \right) S_{nn}^{-1} \right\} \sigma_\epsilon^2 v_j^{(n)} v_i^{(m)} \\
 &= \sum_{j=1}^N \left\{ 1 - \frac{1}{N} - \left( j - \frac{N+1}{2} \right)^2 S_{nn}^{-1} \right\} \sigma_\epsilon^2 v_j^{(n)} v_j^{(m)} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{N} + \left( j - \frac{N+1}{2} \right)^2 S_{nn}^{-1} \right\} \sigma_\epsilon^2 v_j^{(n)} v_j^{(m)} \\
 &= \sigma_\epsilon^2 v_j^{(n)} v_j^{(m)} \\
 &= \sigma_\epsilon^2 \delta_{nm}
 \end{aligned} \tag{B.85}$$

である。

回帰残差の二乗和は

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N e^2(n) &= \sum_{n=1}^N \left( \sum_{j=1}^{N-2} c_j v_n^{(j)} \right)^2 \\
 &= \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^{N-2} (c_j v_n^{(j)})^2 + 2 \sum_j^{N-2} \sum_{i \neq j}^{N-2} c_j c_i v_n^{(j)} v_n^{(i)} \right\} \\
 &= \sum_{j=1}^{N-2} c_j^2
 \end{aligned} \tag{B.86}$$

となり、その期待値は

$$E \left( \sum_{n=1}^N e^2(n) \right) = E \left( \sum_{j=1}^{N-2} c_j^2 \right) = (N-2) \sigma_\epsilon^2 \tag{B.87}$$

となる。したがって  $\epsilon(n)$  の母分散  $\sigma_\epsilon^2$  の推定値  $s_\epsilon^2$  は

$$s_\epsilon^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{n=1}^N e^2(n) \tag{B.88}$$

となる。

次に  $\{a', s_\epsilon^2\}$  は互いに独立であることを示す。(A.116) 式から

$$\begin{aligned}
 E(\epsilon(i)\epsilon(j)) &= E \left( \epsilon(i) \left\{ \epsilon(j) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \epsilon(k) - \left( j - \frac{N+1}{2} \right) S_{nn}^{-1} \sum_{k=1}^N \left( k - \frac{N+1}{2} \right) \epsilon(k) \right\} \right) \\
 &= E(\epsilon(i)\epsilon(j)) - \frac{1}{N} \{ E(\epsilon^2) + (N-1)E^2(\epsilon) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( j - \frac{N+1}{2} \right) S_{nn}^{-1} \left( i - \frac{N+1}{2} \right) \{ E(\epsilon^2) - E^2(\epsilon) \} \\
= & \left\{ \delta_{ij} - \frac{1}{N} - \left( j - \frac{N+1}{2} \right) \left( i - \frac{N+1}{2} \right) S_{nn}^{-1} \right\} \sigma_\epsilon^2
\end{aligned} \tag{B.89}$$

となり、(B.85) 式から

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E(\epsilon(i)e(j)) = N\sigma_\epsilon^2 - N\sigma_\epsilon^2 = 0 \tag{B.90}$$

となる。したがって

$$E(a'c_n) = S_{nn}^{-1} \sum_{i=1}^N \left( i - \frac{N+1}{2} \right) \sum_{j=1}^N v_j^{(n)} E(\epsilon(i)e(j)) = 0 \tag{B.91}$$

$$E(c_n) = \sum_{j=1}^N v_j^{(n)} E(e(j)) = 0 \tag{B.92}$$

であり、(B.85) 式とあわせて  $\{a', c_1, \dots, c_N\}$  は独立であることが分かる。したがって  $\{a', s_\epsilon^2\}$  は互いに独立である。

$\epsilon^{(n)}$  が正規分布に従うとき  $\epsilon^{(n)}$  の一次結合である  $e^{(n)}$  も正規分布に従う。よって  $e^{(n)}$  の一次結合である  $c_n$  は正規分布に従う。したがって (B.86)、(B.88) 式より  $(N-2)s_\epsilon^2$  は自由度  $N-2$  のカイ二乗分布に従う。

## 参考文献

- Brasseur, G., and C. Granier (1992), Mount-Pinatubo aerosols, chlorofluorocarbons, and ozone depletion, *Science*, **257**, 1239–1242.
- Burroughs, W. J. (2001), *Climate change: A multidisciplinary approach*, 298 pp., Cambridge University Press, Cambridge.
- Conradsen, K., L. B. Nielsen, and L. P. Prahm (1984), Review of Weibull statistics for estimation of wind speed distributions, *J. Climate Appl. Meteor.*, **23**, 1173–1183.
- Efron, B. (1979), Bootstrap methods: another look at the jackknife, *Ann. Statist.*, **7**, 1–26.
- Frei, C., and C. Schär (2001), Detection probability of trends in rare events: Theory and application to heavy precipitation in the Alpine region, *J. Climate*, **14**, 1568–1584.
- Galassi, M., et al., *GNU Scientific Library reference manual*, 2nd ed., ISBN 0954161734, <http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- Graham, N. E., and H. F. Diaz (2001), Evidence for intensification of North Pacific winter cyclones since 1948, *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, **82**, 1869–1893.
- Gumbel, E. J. (1958), *Statistics of extremes*, 375 pp., Columbia University Press, New York.
- Gumbel, E. J. (1963), 極値統計学, 404 pp., 廣川書店, 河田竜夫, 岩井重久, 加瀬滋男 監訳, 櫻井武尚, 本間鶴千代, 飯田汲事, 田村亮二, 味村重臣, 角屋陸, 堀素夫 訳.
- Hall, P. (1988), Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals, *Ann. Statist.*, **16**, 927–953.
- Hansen, J., M. Sato, R. Ruedy, A. Lacis, K. Asamoah, K. Beckford, S. Borenstein, E. Brown, B. Vairns, B. Charlson, B. Curran, S. deCastro, L. Druryan, P. Etwarrow, T. Ferede, M. Fox, D. Gaffen, J. Glascoe, H. Gordon, S. Hollandsworth, X. Jiang, V. Johnson, N. Lawrence, J. Lean, J. Lerner, K. Lo, J. Logan, A. Lueckett, M. P. McCormick, R. McPeters, R. Miller, P. Minnis, I. Ramberran, G. Russell, P. Russell, P. Stone, I. Tegen, S. Thomas, L. Thomason, A. Thompson, J. Wilder, R. Willson, and J. Zawodny (1997), Forcings and chaos in interannual to decadal climate change, *J. Geophys. Res.*, **102**, 25,679–25,720.

- Hegerl, G. C., K. Hasselmann, U. Cubasch, J. F. B. Mitchell, E. Roeckner, R. Voss, and J. Waszkewitz (1997), Multi-fingerprint detection and attribution analysis of greenhouse gas, greenhouse gas-plus-aerosol and solar forced climate change, *Clim. Dynam.*, **13**, 613–634.
- Hegerl, G. C., F. W. Zwiers, P. A. Stott, and V. V. Kharin (2004), Detectability of anthropogenic changes in annual temperature and precipitation extremes, *J. Climate*, **17**, 3683–3700.
- Houghton, J. (1997), *Global Warming: The complete briefing*, 2nd ed., 251 pp., Cambridge University Press, Cambridge.
- Houghton, J. T., Y. Ding, D. J. Griggs, M. Noguer, P. J. van der Linden, and D. Xiaosu (Eds.) (2001), *Climate change: The scientific basis, contribution of working group I to the third assessment report of the intergovernmental panel on climate change (IPCC)*, 944 pp., Cambridge University Press, Cambridge.
- Iwashima, T., and R. Yamamoto (1993), Long-term trend of heavy daily precipitation, *J. Meteorol. Soc. Japan*, **71**, 37–640.
- James, F. (1994), RANLUX: A fortran implementation of the high-quality pseudo-random number generator of lüscher, *Comp. Phys. Comm.*, **79**, 111–114.
- Kalnay, E. M., and Coauthors (1996), The NCEP/NCAR reanalysis project, *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, **77**, 437–471.
- Karl, T. R., R. W. Knight, and N. Plummer (1995), Trends in high-frequency climate variability in the twentieth century, *Nature*, **377**, 217–220.
- Labitzke, K., and Collaborators (2002), *The Berlin stratospheric data series*, Meteorological Institute, Free University Berlin, Berlin, CDROM.
- Landsea, C. W., N. Nicholls, W. M. Gray, and L. A. Avila (1996), Downward trends in the frequency of intense Atlantic hurricanes during the past five decades, *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 1697–1700.
- Lüscher, M. (1994), A portable high-quality random number generator for lattice field theory calculations, *Comp. Phys. Comm.*, **79**, 100–110.
- 前園宜彦 (2001), 統計的推測の漸近理論, 241 pp., 九州大学出版会.
- Meehl, G. A., T. Karl, D. R. Easterling, S. Changnon, R. P. Jr., D. Changnon, J. Evans, P. Y. Groisman, T. R. Knutson, K. E. Kunkel, L. O. Mearns, C. Parmesan, R. Pulwarty, T. Root, R. T. Sylves, P. Whetton, and F. Zwiers (2000), An introduction to trends in extreme weather and climate events: Observations, socioeconomic impacts, terrestrial ecological impacts, and model projections, *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, **81**, 413–416.
-

- 蓑谷千鳳彦 (1998), *すぐに役立つ統計分布*, 266 pp., 東京図書.
- 岡部靖憲 (2002), *確率・統計*, 応用数学基礎講座 6, 273 pp., 朝倉書店.
- Osborn, T. J., and M. Hulme (2002), Evidence for trends in heavy rainfall events over the UK, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **360**, 1313–1325.
- Palmer, T. N., and J. Rälsänen (2002), Quantifying the risk of extreme seasonal precipitation events in a changing climate, *Nature*, **415**, 512–514.
- Pavia, E. G., and J. J. O'Brien (1986), Weibull statistics of wind speed over the ocean, *J. Climate Appl. Meteor.*, **25**, 1324–1332.
- Ramaswamy, V., M.-L. Chanin, J. Angell, J. Barnett, D. Gaffen, M. Gelman, P. Keckhut, Y. Koshelkov, K. Labitzke, J.-J. R. Lin, A. O'Neill, J. Nash, W. Randel, R. Rood, K. Shine, M. Shiotani, and R. Swinbank (2001), Stratospheric temperature trends: Observations and model simulations, *Rev. Geophys.*, **39**, 71–122.
- Randel, W. J., and F. Wu (1999), Cooling of the Arctic and Antarctic polar stratospheres due to ozone depletion, *J. Climate*, **12**, 1467–1479.
- Robock, A. (2000), Volcanic eruptions and climate, *Rev. Geophys.*, **38**, 191–219.
- Schär, C., and G. Jendritzky (2004), The European heatwave of 2003: was it merely a rare meteorological event or a first glimpse of climate change to come? Probably both, is the answer, and the anthropogenic contribution can be quantified, *Nature*, **432**, 559–560, doi: 10.1038/432559a.
- SGKS Group (2004), DCL-5.3 (in Japanese). GFD-DENNOU Club, available online at <http://www.gfd-dennou.org/library/dcl/>.
- Shao, J. (2003), *Mathematical statistics*, 2nd ed., 591 pp., Springer-Verlag, New York.
- 清水良一 (1976), *中心極限定理*, シリーズ 新しい応用の数学 14, 246 pp., 教育出版.
- Simiu, E., and N. A. Heckert (1996), Extreme wind distribution tails: A "peaks over threshold" approach, *J. Struct. Eng.*, **122**, 539–547.
- Swamp Project (1998), AGCM5 (in Japanese). GFD-DENNOU Club, available online at <http://www.gfd-dennou.org/arch/agcm5/>.
- Taguchi, M., and S. Yoden (2002a), Internal interannual variability of the troposphere-stratosphere coupled system in a simple global circulation model. Part I: Parameter sweep experiment, *J. Atmos. Sci.*, **59**, 3021–3036.
-

- Taguchi, M., and S. Yoden (2002b), Internal interannual variability of the troposphere-stratosphere coupled system in a simple global circulation model. Part II: Millennium integrations, *J. Atmos. Sci.*, **59**, 3037–3050.
- Tiao, G. C., G. C. Reinsel, D. Xu, J. H. Pedrick, X. Zhu, A. J. Miller, J. J. DeLuisi, C. L. Mateer, and D. J. Wuebbles (1990), Effects of autocorrelation and temporal sampling schemes on estimates of trend and spatial correlation, *J. Geophys. Res.*, **95**, 20,507–20,517.
- 汪金芳, and 田栗正章 (2003), 第I部 ブートストラップ法入門, in 計算統計 I, 統計科学のフロンティア 11, pp. 1–64, 岩波書店.
- Weatherhead, E. C., G. C. Reinsel, G. C. Tiao, X.-L. Meng, D. Choi, W.-K. Cheang, T. Keller, J. DeLuisi, D. J. Wuebbles, J. B. Kerr, A. J. Miller, S. J. Oltmans, and J. E. Frederick (1998), Factors affecting the detection of trends: Statistical considerations and applications to environmental data, *J. Geophys. Res.*, **103**, 17,149–17,161.
- Weibull, W. (1951), A statistical distribution function of wide applicability, *J. App. Mech.*, **18**, 293–297.
- Weisstein, E. W., Continuous distributions, from *MathWorld* – A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ContinuousDistributions.html>.
- Wilks, D. S. (1995), *Statistical methods in the atmospheric sciences*, 467 pp., Academic press, San Diego.
- Wilks, D. S., and K. L. Eggleston (1992), Estimating monthly and seasonal precipitation distributions using the 30- and 90-day outlooks, *J. Climate*, **5**, 252–259.
- Yoden, S., M. Taguchi, and Y. Naito (2002), Numerical studies on time variations of the troposphere-stratosphere coupled system, *J. Meteorol. Soc. Japan*, **80**, 811–830.
-