(2.3.24a)〜(2.3.24d) において，$\varepsilon_{eg} \ll 1$ の場合を考えると，

$$
\left.
\begin{aligned}
-yv &= \quad\quad + u_{yy} + \delta_E^2 u_{zz} \\
+yu &= -p_y + v_{yy} + \delta_E^2 v_{zz} \\
v_y + w_z &= 0
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

を得る．

鉛直平均した流れ（順圧成分）

✓ 流れの順圧成分を

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \int_0^1 (u, v)\,dz \qquad (2)$$

と定義する．また 流れの順圧成分からのずれを

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (u, v) - (\bar{u}, \bar{v}) \qquad (3)$$

と定義する．

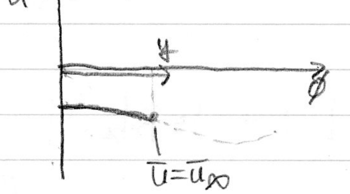
✓ 流れの順圧成分に対する方程式

(1)を $z=0 \sim z=1$ まで積分し，上下端での境界条件を適用すると，

$$
\left.
\begin{aligned}
-y\bar{v} &= \quad\quad + \bar{u}_{yy} + \delta_E \left[-1 - \delta_E (\hat{u}_z)_{z=0} \right], \\
+y\bar{u} &= -p_y + \bar{v}_{yy} + \delta_E \left[\quad\quad - \delta_E (\hat{v}_z)_{z=0} \right], \\
\bar{v}_y &= 0
\end{aligned}
\right\} \quad (4)
$$

を得る。

✓ (4)を満たす解について



$|y| = y_\infty$ で，$\bar{u} = \bar{u}_\infty$ となる(4)の解を求める．
(4)において $O(\delta_E)$ の項をムシすれば，

$$
\left.
\begin{aligned}
&\bar{v} = 0, \quad \bar{u} = \bar{u}_\infty, \\
&p = -\frac{\bar{u}}{2} y^2 + (\text{const})
\end{aligned}
\right\} \quad (5)
$$

を得る．

流れの鉛直平均からのずれ（傾圧成分）

√ 流れの傾圧成分に対する方程式

(1)−(4) より

$$\left.\begin{aligned} -y\hat{v} &= \hat{u}_{yy} + \delta_E^2 \hat{u}_{zz} + \delta_E\left[1 + \delta_E (\hat{u}_z)_{z=0}\right], \\ +y\hat{u} &= \hat{v}_{yy} + \delta_E^2 \hat{v}_{zz} + \delta_E\left[\delta_E (\hat{v}_z)_{z=0}\right], \\ \hat{v}_y + w_z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

を得る。

今，

$$p = \hat{u} + i\hat{v}$$

とおけば，(6)は，

$$\boxed{\delta_E^2 p_{zz} + p_{yy} - iyp = \delta_E\left[1 + \delta_E p_z|_{z=0}\right]} \quad (7)$$

と書ける。

√ 流れの傾圧成分の分解

$$p = p_I + p_{e1} + p_{e2} \quad (8)$$

と分解する。ここで，

- p_I ： 内部領域の流れを表す．p_Iの鉛直粘性項はムシ
- p_{e1} ： 上側エクマン層内の流れを表す．その外側ではゼロとする．
- p_{e2} ： 下側エクマン層内の流れを表す．その外側ではゼロとする．

√ 流れの傾圧成分の決定

(i) 内部領域

(7)から p_I に対する方程式

$$(p_I)_{yy} - iyp_I = \delta_E\left[1 + \delta_E p_z|_{z=0}\right] \quad (9)$$

を得る。

ここで，$O(\delta_E)$ 以下の項をムシするとき，

$$(p_I)_{yy} - iy\,p_I = 0$$

となる。$|y|\to\infty$ において，

$$-iy\,p_I = 0$$

に漸近的収束する解を考えると，$p_I = 0$ を得る．
したがって，$O(\delta_E)$ までにおいて，

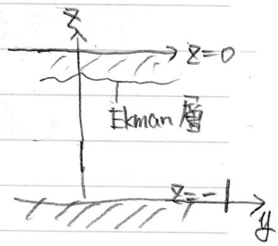
<u>内部領域における流れの圧力成分 p_I はゼロ</u>

である．

(ii) 上側エクマン層

・伸縮座標の導入

$$\hat{z} = \frac{z-1}{\delta_E} \qquad (10)$$



・上側エクマン層における p_{e1} に対する方程式
(7)-(9) をして，p に p_{e1} を代入すれば，

$$(p_{e1})_{\hat{z}\hat{z}} + (p_{e1})_{yy} - iy\,p_{e1} = 0 \qquad (11)$$

を得る．

・(11) に課す境界条件

$$\begin{cases} (p_{e1})_{\hat{z}} \to -1 & \text{as } \hat{z} \to -0 \qquad (12a) \\ p_{e1} \to 0 & \text{as } \hat{z} \to -\infty \qquad (12b) \\ p_{e1} \sim \dfrac{-1 \pm i}{2\sqrt{|y|}} \exp\left[\hat{z}(1+i)\sqrt{|y|/2}\right] & \text{as } |y| \to \infty \qquad (12c) \end{cases}$$

・境界条件(12a,b,c)を満たす (11)の解

ここでは、結果だけを示す。導出は付録を参照。

$$\boxed{p_{e1} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l}} \exp\left[-\frac{l^3}{3} - ily - \frac{\hat{z}^2}{4l}\right] dl} \qquad (13)$$

また、$\hat{z} \to \infty$ における鉛直速度は、

$$\boxed{w_{e1}\Big|_{\hat{z}\to-\infty} = \delta_E \int_0^{\infty} l\, e^{-\frac{l^3}{3}} \cos(ly)\, dl} \qquad (14)$$

と求まる。

(iii) 下側エクマン層

・伸縮座標の導入

$$\hat{z} = z/\delta_E \qquad (15)$$

・下側エクマン層における p_{e2} 対する方程式
(11)と同様すれば

$$(p_{e2})_{\hat{z}\hat{z}} + (p_{e2})_{yy} - iy\, p_{e2} = 0 \qquad (16)$$

が得られる。

・(16)に課す境界条件

$$\begin{cases} (u + iv) = 0 \quad \text{すなわち} \quad p_{e2} = -(p_I + \bar{u} + i\bar{v}) & \text{at } \hat{z} = 0 \quad (17a) \\ p_{e2} \to 0 & \text{as } \hat{z} \to \infty \quad (17b) \\ p_{e2} \sim -(p_I + \bar{u}_\infty + i\bar{v}_\infty) \exp\left[-z(1+i)\sqrt{\frac{|y|}{2}}\right] & \text{as } |y| \to \infty \quad (17c) \end{cases}$$

・境界条件(17 a, b, c)を満たす(16)の解

ここでは結果だけを示す。導出は付録を参照

$$\boxed{p_{e2} = -\frac{u_\infty}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z}{l^{3/2}} \exp\left(-\frac{l^3}{3} - i l y - \frac{z^2}{4l}\right) dl} \quad (18)$$

また、$z \to \infty$ における鉛直速度は

$$\boxed{w_{e2}\Big|_{z\to\infty} = \delta_E \frac{u_\infty}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{l}\, e^{-\frac{l^3}{3}} \cos(ly)\, dl} \quad (19)$$

と求まる。

付録A：(13)の導出

(11) $(p_{e1})_{zz} + (p_{e1})_{yy} - iy\, p_{e1} = 0$

の解を求める.

境界条件(12b)を満たすような解として

$$p_{e1} = \int_C F(y,k)\, e^{kz}\, dk \qquad (A.1)$$

を考える. ただし, Cは複素k平面上の経路であり, 後ほど決定する。また,

$$\mathrm{Re}(k) \geq 0 \quad \text{on } C \qquad (A.2)$$

でなければならない。

核Fが満たす方程式を求める. (A.1)を(11)に代入すれば,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (k^2 - iy)F = B(k,y) \qquad (A.3)$$

を得る. ここで,

$$\int_C B(k,y)\, dk = 0. \qquad (A.4)$$

さらに,

$$F(y,k) = \int_D \hat{F}(l,k)\, e^{-ily}\, dl \qquad (A.5)$$

なる形式の$F(y,k)$を求める. ここで, Dは複素l面上の経路であり後ほど決定される. (A.5)を(A.3)に代入し, 部分積分を実行すれば,

$$\int_D \left(-l^2 \hat{F} + k^2 \hat{F} - \frac{\partial \hat{F}}{\partial l}\right) e^{-ily}\, dl = -\left[\hat{F} e^{-ily}\right]_D + B(k,y) \qquad (A.6)$$

を得る。

今，(A.6)の右辺が0となるように，経路Dをとることにすれば，

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial l} = -(l^2 - k^2)\hat{F} \qquad (A.7)$$

を得る．ただし，

$$\left[\hat{F} e^{-ily}\right]_D = B(k, y) \qquad (A.8)$$

でなければならない．

(A.7)を解けば，

$$\hat{F} = C(k)\exp\left[-\frac{l^3}{3} + k^2 l\right].$$

ここで，$C(k)$はkの任意関数である．これを(A.8)に代入すれば，

$$C(k)\left[\exp\left[-\frac{l^3}{3} + k^2 l - ily\right]\right]_D = B(k, y)$$

を得る．さらに，

$$\left[\exp\left[-\frac{l^3}{3} + k^2 l - ily\right]\right]_D = 1 \qquad (A.9)$$

を満たすように経路Dを選ぶことによって，

$$C(k) = B$$

と決まる。(よって，Bはyに依存しない。) なお，(A.9)を満たすDとは正の実軸である．以上より，

$$p_{e1} = -\int_C \int_{l=0}^{\infty} B(k)\exp\left[-\frac{l^3}{3} + k^2 l - ily + kz\right] dl\, dk \qquad (A.10)$$

を得る．

✓ 境界条件 (BC) の考慮

(A.10)のzによる1階微分をとれば，

$$-\int_C \int_{l=0}^{\infty} kB(k)\exp\left[-\frac{l^3}{3} + k^2 l - ily + kz\right] dl\, dk$$

$a=$
$(\omega-\omega^2)a=\omega^2$
$(\omega^2-1)a=1$

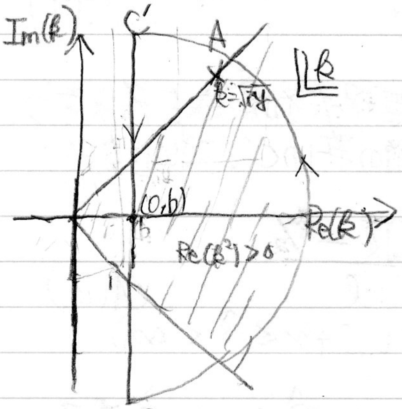
$$= +\int_C\int_0^\infty \frac{kB(k)e^{kz}}{iy-k^2+l^2}\times\frac{\partial}{\partial l}\left\{\exp\left[-\frac{l^3}{3}+k^2l-ily\right]\right\}dl\,dk$$

$$= \int_C\left\{\left[\frac{kB(k)e^{kz}}{iy-k^2+l^2}\exp\left[-\frac{l^3}{3}+k^2l-ily\right]\right]_0^\infty\right\}dk \quad + O(y^{-2}) \qquad (A.11)$$

今, $|y|\to\infty$ かつ $\mathrm{Re}(k^2)<0$ on C の場合を考えるとき, (A.11)は

$$-\int_C \frac{kB(k)e^{kz}}{iy-k^2}dk. \qquad (A.12)$$

と漸近的に等しくなる。



・$\mathrm{Re}(k^2)<0$
・$\mathrm{Re}(k)\geq 0$ } on C

(A.12)を変形すると,

$$-\int_C \frac{kB(k)e^{kz}}{iy-k^2}dk = \int_C\left\{\frac{1}{\sqrt{iy}+k}-\frac{1}{\sqrt{iy}-k}\right\}\frac{B(k)e^{kz}}{2}dk$$

である。今 $|y|\to\infty$ を考えているので, 極Aにおいて $\mathrm{Re}(k)\to\infty$ である。したがって, 極Aのごく近傍以外では C上の積分の寄与はムシできる。

今 積分経路として $k=ib$ に中心をもつ半径 $|\sqrt{iy}|+\varepsilon$ の半円C'を考えよう。(図参照) ただし,

$$b,\ \varepsilon \sim O(1).$$

とする

このとき, C'は $\mathrm{Re}(k^2)>0$ である領域を通過してしまうが, そこでは積分の寄与は十分に小さい。したがって, $|y|\to\infty$ に対して,

$$\phi(1)_{\hat z} \sim -\int_{C'}\frac{kB(k)e^{kz}}{iy-k^2}dk = -i\pi B(\sqrt{iy})\exp[\hat z\sqrt{iy}] \qquad (A.13)$$

を得る. 一方, 境界条件(12c)を $\hat z$ で微分し, 整理すれば,

$$[\phi(1)]_{\hat z} \sim -\exp[\hat z\sqrt{iy}] \quad \text{as } |y|\to\infty \qquad (A.14)$$

であるので, (A.13)との比較より

$$B(k) = -\frac{i}{\pi} \qquad (A.15)$$

と選べば 境界条件(12C)を満足できる.

したがって,

$$p_{e1} = \frac{i}{\pi}\int_{C'}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{l^3}{3}+k^2 l - ily + k\hat{z}\right] dl\,dk \qquad (A.16)$$

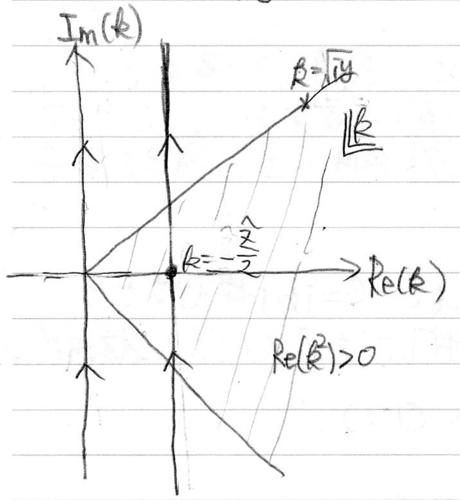
まで求まった。

✓ 境界条件(12a)の考慮

(A.16)の $\hat{z}$ による微分をとれば,

$$(p_{e1})_{\hat{z}} = \frac{i}{\pi}\int_{C'}\int_0^\infty k\exp\left[-\frac{l^3}{3}+k^2 l - ily + k\hat{z}\right] dl\,dk \qquad (A.17)$$

となる。



今, C′の半径が無限大の場合を考えよう。
(|k|→∞のとき, これは前の半円のC′と同じになる)
つまり,

$$C' : k = \frac{i\hat{k}\sqrt{l} - \hat{z}/2}{l} \qquad (A.18)$$

(ただし, $-\infty < \hat{k} < \infty$)

のように取る。C′は $k = -\frac{\hat{z}}{2}$ (≥ 0) を通る虚数軸に平行な直線である。C′上で,(A.17)は最小となることに注意が必要である。なぜならば,

$$f(k) = k^2 l + k\hat{z}$$

$$(\mathrm{Re}(k^2) < 0)$$

とおくとき, $k = -\frac{\hat{z}}{2l}$ においてf(k)がゼロとなるからである。

したがって,(A.17)の複素k平面上の積分を,(A.18)によって,実軸 $\hat{k}$ 上の積分に変換すれば,

$$(p_{e1})_{\hat{z}} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{l^{3/2}}\exp\left(\frac{l^3}{3} - ily - \frac{\hat{z}^2}{4l}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(i\hat{k}\sqrt{l} - \frac{\hat{z}}{2}\right)e^{-\hat{k}^2}d\hat{k}$$

となる。$\hat{k}$ についての積分を実行すれば,

$$(p_{e1})_{\hat{z}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\hat{z}}{l^{3/2}}\exp\left[\frac{l^3}{3} - ily - \frac{\hat{z}^2}{4l}\right] dl \qquad (A.19)$$

を得る。

(A.19) が実際に (3.1) を満足することを確認する。

$$\hat{l} = \frac{l}{\hat{z}^2}$$

なる l のスケーリングを (A.19) に対して行い，また $\hat{z} \to -0$ の極限をとれば

$$(p_{e1})_{\hat{z}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\hat{l}^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4\hat{l}}\right] d\hat{l} \quad (\hat{z} \to -0)$$

さらに，

$$\hat{\hat{l}}^2 = 1/4\hat{l}$$

と変数変換すれば，

$$(p_{e1})_{\hat{z}} = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\hat{\hat{l}}^2} d\hat{\hat{l}} = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \times \left(+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -1. \quad (\hat{z} \to -0)$$

(A.20)

したがって，(A.19) は境界条件 (12a) を満たす。

✓ p_{e1} の最終的な形式

(A.19) を $\hat{z}$ について $-\infty$ から $\hat{z}$ まで積分すれば，

$$[p_{e1}]_{-\infty}^{\hat{z}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\hat{z}} \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{\partial}{\partial \hat{z}'}\left\{\exp\left[\frac{l^3}{3} - ily - \frac{\hat{z}'^2}{4l}\right]\right\} d\hat{z}' dl$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{l}} \exp\left[\frac{l^3}{3} - ily - \frac{\hat{z}^2}{4l}\right] dl.$$

よって，

$$\boxed{p_{e1} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{l}} \exp\left[\frac{l^3}{3} - ily - \frac{\hat{z}^2}{4l}\right] dl} \quad (A.21)$$

が得られる。

付録B：(14)の導出

(6)より

$$\delta_E (V\hat{e}_1)_y + \quad w_{\hat{z}} = 0$$

であるので，

$$w_{\hat{z}} = -\delta_E (\mathrm{Im}(\varphi_{e1}))_y$$

$$= -\frac{\delta_E}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{l} \exp\left[-\frac{l^3}{3} - \frac{\hat{z}^2}{4l}\right] \cos(ly)\, dl \quad (B.1)$$

よって，(B.1)を $\hat{z}$ について 0 から $\hat{z}$ まで積分すれば，

$$[w]_{\hat{z}}^{0} = -\frac{\delta_E}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{l} \exp\left[-\frac{l^3}{3}\right] \cos(ly) \int_{\hat{z}}^{0} e^{-\frac{\hat{z}^2}{4l}}\, d\hat{z}\, dl$$

となるので，

$$w(y, \hat{z}) = \frac{\delta_E}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{l}\, e^{-\frac{l^3}{3}} \cos(ly) \int_{\hat{z}}^{0} e^{-\frac{\hat{z}^2}{4l}}\, d\hat{z}\, dl \quad (B.2)$$

を得る．特に，$\hat{z} \to -\infty$ に対しては，(B.2)

$$\boxed{w(y)\Big|_{\hat{z} \to -\infty} = \delta_E \int_0^\infty l\, e^{-\frac{l^3}{3}} \cos(ly)\, dl} \quad (B.3)$$

となる．