

# 第1章 はじめに

## 第2章 モデル

### 2.1 系の設定

全球に渡って岸のない海洋の軸対称な風成循環の力学を理解するために, 図 2.1.1 で示される  $\beta$  平面上の均質な流体層を考える. 一定の深さ  $H$  をもつ流体層は初期には静止しているが, 表面で加えられる応力  $(\tau_{x*}, \tau_{y*}) = (\tau_{x*}(y), 0)$  により流体層は運動を始めるような状況を考える. その際生じる境界近傍の摩擦層 (エクマン層) 内の運動やそれを介して駆動される内部領域の運動について次章以降で議論するために, 本章では支配方程式系や境界条件を記述する.

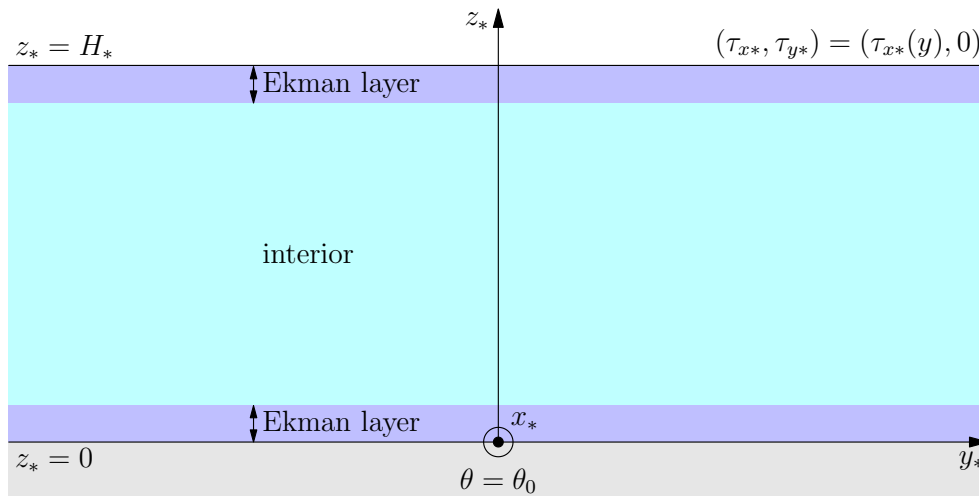


図 2.1.1: 軸対称風成循環の力学を考察するための系の概念図. 球面の効果は  $\beta$  平面近似により表現する.

## 2.2 支配方程式系と境界条件

### 2.2.1 $\beta$ 平面近似

球面上の回転流体の運動を直角座標系を使って簡潔に記述するために、ここでは  $\beta$  平面近似を用いる。すなわち、とある球面上の一点  $(\lambda, \theta, r) = (\lambda_0, \theta_0, a)$  に対する接平面を定義し、それに対して局所直角座標系

$$x = a \cos \theta_0 (\lambda - \lambda_0), \quad y = a (\theta - \theta_0), \quad z = r - a \quad (2.2.1)$$

を導入する。ここで、 $a$  は惑星半径である。その際、運動方程式に現れるコリオリパラメータ  $f (= 2\Omega \sin \theta)$  の緯度依存性は、

$$\begin{aligned} f &\sim f_0 + \left( \frac{df}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0) \\ &= f_0 + \beta_0 y \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

のように線形近似する。ただし、

$$f_0 = 2\Omega \sin \theta_0, \quad \beta_0 = \frac{1}{a} \left( \frac{df}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} = \frac{2\Omega}{a} \cos \theta_0 \quad (2.2.3)$$

と定義した。

### 2.2.2 支配方程式系と境界条件

今考える問題において、水平方向の運動のスケールは鉛直方向に比べてずっと大きいので、静力学近似を適用することができる。さらに、軸対称な流体の運動を考えるので、全ての変数は  $x$  方向に一様と仮定する。このとき、均質（密度一定）な流体の運動は以下の方程式系によって記述される。

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} + v_* \frac{\partial u_*}{\partial y_*} + w_* \frac{\partial u_*}{\partial z_*} - (f_0 + \beta_0 y_*) u_* = A_h \frac{\partial^2 u_*}{\partial y_*^2} + A_v \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2}, \quad (2.2.4a)$$

$$\frac{\partial v_*}{\partial t_*} + v_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} + w_* \frac{\partial v_*}{\partial z_*} + (f_0 + \beta_0 y_*) u_* = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_*}{\partial y_*} + A_h \frac{\partial^2 v_*}{\partial y_*^2} + A_v \frac{\partial^2 v_*}{\partial z_*^2}, \quad (2.2.4b)$$

$$\frac{\partial p_*}{\partial z_*} = -\rho_0 g, \quad (2.2.4c)$$

$$\frac{\partial v_*}{\partial y_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0. \quad (2.2.4d)$$

ここで、添字の\*は有次元の変数であることを示す。  $u_*, v_*, w_*$  はそれぞれ速度の  $y, z$  方向成分,  $\rho_0$  は基準密度,  $p_*$  は圧力,  $g$  は重力加速度である。また,  $A_h, A_v$  はそれぞれ水平, 鉛直渦粘性係数であり, この系の散逸は渦粘性項により表現する。

(2.2.4a)-(2.2.4d) に対する境界条件は, 以下のように課される。図 2.1.1 に示すように, 流体層の上端において  $x$  方向にのみ応力が加えられるので,

$$\rho_0 A_v \frac{\partial u_*}{\partial z_*} = \tau_{x*}(y_*), \quad \rho_0 A_v \frac{\partial v_*}{\partial z_*} = 0 \quad \text{at } z = H \quad (2.2.5)$$

を課す。流体層上端における鉛直速度の境界条件は, 今 rigid-lid 近似を適用することにすれば,

$$w = 0 \quad \text{at } z = H \quad (2.2.6)$$

によって与えられる。一方, 地面と接する流体層下端では滑りなし条件

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (2.2.7)$$

を課す。流体層下端における鉛直速度の境界条件は, 今地面は平坦であるので,

$$w = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (2.2.8)$$

によって与えられる。

## 2.3 系の無次元化

### 2.3.1 系の無次元化 (赤道遠方の場合)

無次元変数の導入

系のパラメータ依存性を調べる上で, 系の無次元化を行うこと有用である。  $L$  は水平方向の長さスケール,  $D$  は鉛直方向の長さスケール (すなわち  $H$ ),  $U$  は水平速度のスケールとすると,

$$\begin{aligned} (x_*, y_*, z_*) &= (Lx, Ly, Dz), \quad (u_*, v_*, w_*) = (Uu, Uv, \left(U \frac{D}{L}\right)w) \\ t_* &= \frac{L}{U}t, \quad p_* = -\rho g z_* + (\rho_0 f_0 UL)p, \\ \tau_{x*} &= \tau_0 \tau_x \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

と無次元変数を導入する. ここで, 鉛直速度  $w_*$  のスケーリングのために連続の式を使った. ここで議論する風成循環の問題において,  $L$  は海面応力の空間スケールである.

今, 時間  $t_*$  のスケールには, 移流時間スケールを用いた. しかし, 現時点では, スピンアップ時間  $\tau_{\text{spinup}}$  よりも移流時間によるスケーリングが適切である保証はない. どちらが適切な時間スケールかは, 両者の比

$$r = \frac{L}{U\tau_{\text{spinup}}} \quad (2.3.10)$$

に依存するだろう. ここでは, 簡潔な記述のために, 形式的に,

$$r = O(1) \quad (2.3.11)$$

を  $yy$  仮定し, 摩擦の過程と移流の過程のどちらが卓越するかを, 先験的には制限しないことにする. そして,  $r = O(1)$  に対する定式化が完成した後に,  $r$  の値が大きい場合や小さい場合の極限を考えることで, どちらかの過程が卓越する場合の定式化を得ることにする.

#### 支配方程式系や境界条件の無次元化

(2.3.9) を使って支配方程式系 (2.2.4a)-(2.2.4d) を無次元化すれば,

$$\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \beta y v \right) - v = \frac{E_H}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{E_V}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.3.12a)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \beta y u \right) + u = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{E_H}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{E_V}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (2.3.12b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (2.3.12c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.3.12d)$$

が得られる. ここで,

$$\text{ロスビー数} : \varepsilon = \frac{U}{f_0 L}, \quad (2.3.13a)$$

$$\text{水平方向のエクマン数} : E_H = 2 \frac{A_h}{f_0 L^2}, \quad (2.3.13b)$$

$$\text{鉛直方向のエクマン数} : E_V = 2 \frac{A_v}{f_0 D^2}, \quad (2.3.13c)$$

$$\beta = \beta_0 \frac{U}{L^2} \quad (2.3.13d)$$

である。

次に境界条件 (2.2.5)-(2.2.8) を無次元化すれば、流体層上端  $z = 1$  における境界条件は、

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left( \frac{\tau_0 D}{\rho_0 A_v U} \right) \tau_x(y), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 1, \quad (2.3.14)$$

$$w = 0 \quad \text{at } z = 1, \quad (2.3.15)$$

となり、一方、流体層下端  $z = 0$  における境界条件は、

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (2.3.16)$$

$$w = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (2.3.17)$$

となる。

### 2.3.2 系の無次元化 (赤道近傍の場合)

赤道ではコリオリパラメータの符号が反転するため、赤道上で海面応力が与えられたときにその近傍では湧昇流や赤道境界層が生じる。上で述べた系の無次元化は基準緯度におけるコリオリパラメータの値を陽に用いるので、赤道近傍では使えない。ここでは、赤道近傍の循環に対して適切な系の無次元化を行う。

#### 無次元変数の導入

初めに、惑星パラメータを用いて、おおまかに変数の無次元化を行う。すなわち、

$$(x_*, y_*, z_*) = (ax, ay, Dz), \quad (u_*, v_*, w_*) = (Uu, Uv, \left( U \frac{D}{a} \right) w) \quad (2.3.18)$$

$$t_* = \frac{a}{U} t, \quad p_* = -\rho g z_* + (\rho_0 2\Omega U) p,$$

$$\tau_{x*} = \tau_0 \tau_x$$

ここで、 $a$  は惑星半径である。また、水平速度スケールを決定するために、上側エクマン層内の運動量バランスを考えると、

$$2\Omega U \delta_E D \sim \tau_0 / \rho_0$$

であるので、

$$U = \frac{\tau_0}{2\Omega \delta_E D} \quad (2.3.19)$$

と決まる.

赤道近傍の循環に対して適切な変数のスケージングは、この後の支配方程式系の各項のスケール解析によって行う.

支配方程式系や境界条件の無次元化

(2.3.23) を使って支配方程式系 (2.2.4a)-(2.2.4d) を無次元化すれば,

$$\varepsilon_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - yv = E_{H0} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E_{V0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.3.20a)$$

$$\varepsilon_0 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + yu = -\frac{\partial p}{\partial y} + E_{H0} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + E_{V0} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (2.3.20b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (2.3.20c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.3.20d)$$

が得られる. ここで,

$$\text{ロスビー数} : \varepsilon_0 = \frac{U}{2\Omega L}, \quad (2.3.21a)$$

$$\text{水平方向のエクマン数} : E_{H0} = \frac{A_h}{2\Omega a^2}, \quad (2.3.21b)$$

$$\text{鉛直方向のエクマン数} : E_{V0} = \frac{A_v}{2\Omega D^2}, \quad (2.3.21c)$$

である.

次に、赤道近傍の循環の南北幅  $l$  を見積もる. そのために、赤道近傍における上側のエクマン層における力学的バランスを考えよう. 赤道から十分離れた場所では、鉛直粘性項は、非地衡流速速度によるコリオリ項とバランスする. しかし、赤道に近づくにつれてそのコリオリ項はゼロとなるので、力学的バランスを得るためには、赤道遠方では無視した項 (慣性項あるいは水平粘性項) が重要となる. ここでは、Gill (1972) に従って、赤道近傍において鉛直拡散項がコリオリ項と水平粘性項によってバランスする場合を考えることにする<sup>\*1</sup>.

<sup>\*1</sup>ここでは、水平粘性項に比べて慣性項は小さいことを仮定することによって、まず線形問題を考えることにする. しかし、赤道近傍の循環における力学的バランスでは、慣性項がしばしば重要である. 慣性項の効果については、McKee (1973) を参考にされたい. また、ここで用いる支配方程式系では、伝統的近似によって、自転角速度ベクトルの水平成分に伴うコリオリ項を無視している. しかしながら、この項もまた赤道近傍では重要な場合があり、赤道境界層などの問題におけるその効果については、D?? を参考にされたい.

今, 無次元単位において, エクマン層の厚さを  $\delta_E$ , 赤道近傍の循環の南北幅を  $l$  とする. (??), (2.3.20b) におけるコリオリ項, 水平粘性項, 鉛直粘性項の大きさは, それぞれ

$$l, \quad E_{H0}/l^2, \quad E_{V0}/\delta_E^2$$

と見積もられる. したがって,  $l$  と  $\Delta_E$  は,  $E_{H0}, E_{V0}$  を用いて,

$$l = (E_{H0})^{1/3}, \quad \delta_E = \left( \frac{E_{V0}}{(E_{H0})^{1/3}} \right)^{1/2} \quad (2.3.22)$$

と書ける. よって, 水平長さスケールと関係した変数に対するスケーリングを,

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= (E_{H0})^{1/3}y, \\ (\tilde{u}, \tilde{v}) &= (E_{H0})^{-1/3}(u, v), \quad \tilde{w} = (E_{H0}^{-2/3})w \\ \tilde{t} &= (E_{H0})^{-1/3}t, \quad \tilde{p} = (E_{H0})^{-1/3}p \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

とやり直すことにする.

このとき, 無次元化した支配方程式系は,

$$\varepsilon_{eq} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - yv = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \delta_E^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.3.24a)$$

$$\varepsilon_{eq} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + yu = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \delta_E^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (2.3.24b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (2.3.24c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.3.24d)$$

と書き直される. ただし,  $(\tilde{\quad})$  は省略した.

(2.3.24a)-(2.3.24d) に対して, 領域の上下端で課される無次元化した境界条件は,

$$\delta_E \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x(y), \quad \delta_E \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 1, \quad (2.3.25)$$

$$w = 0 \quad \text{at } z = 1, \quad (2.3.26)$$

および,

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (2.3.27)$$

$$w = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (2.3.28)$$

である. 最後に, 赤道近傍の解は赤道から十分離れた所において, 赤道遠方の解と漸近的に接続するとする.



## 第3章 支配方程式系の近似解: 赤道遠方

本章では, 境界条件 (2.3.25)-(2.3.17) に対する, 支配方程式系 (2.2.4a)-(2.2.4d) の近似解を, Pedlosky (1987, chapter 4) を参考にして, 漸減摂動法を使って求める.

漸減摂動法を用いて, 非線形偏微分方程式である支配方程式系から, より簡単な方程式系を取り出すには, 以下のようなことを行う. 今, それぞれの変数の解は,  $y, z, t$  および無次元のパラメータ  $\varepsilon, E_H, E_V$  の関数である. これらの無次元パラメータの値が小さいとき, そのパラメータによってそれぞれの変数を級数展開することができる. 例えば, 変数のベクトル  $\mathbf{q} = (u, v, w, p)$  は,

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0(y, z, t) + \Delta(\varepsilon, E_V, E_H)\mathbf{q}_1(y, z, t) + \dots \quad (3.0.1)$$

と級数展開できる. ここで,  $\Delta$  は小さなパラメータであり,  $\varepsilon, E_V, E_H$  の関数である. 今, その関数形の詳細は重要でないが,  $\varepsilon, E_V, E_H \rightarrow 0$  のとき  $\Delta \rightarrow 0$  でなければならぬ. これを, 支配方程式系 (2.2.4a)-(2.2.4d) に代入して, 小さなパラメータの同じオーダー ( $O(1), O(\Delta), \dots$ ) の項を集めることによって, 各オーダーに対するより簡単な方程式が得られる.

本論文で扱う方程式系において, 変数の最低次の解  $\mathbf{q}_0$  の解を決定するためには,  $O(1)$  や  $O(\Delta)$  の項をそれぞれ集めて, それぞれのオーダーに対する方程式を導き, さらに境界層の解を考慮することによって,  $\mathbf{q}_0$  で閉じた方程式系を導く必要がある.

### 3.1 線形近似解 (赤道遠方)

海洋の観測事実によれば, 定常的な速度は  $2 \sim 3 \text{ m/s}$  を超えることはないので, ロスビー数が 1 以上となるのは, 赤道の近傍か, あるいは中緯度では数 10 km の

水平スケールを持つ運動 (例えば, 慣性境界流) に限られる<sup>\*1</sup>. したがって, 赤道の近傍を除く ( $\theta_0$  が 10 度以上), 大規模な (水平スケールが  $10^3$  以上の) 海洋循環に対する, ロスビー数は 1 よりも十分に小さい. 本節では, 赤道近傍以外の, 内部領域と上・下端の境界層における支配方程式の近似解を求める.

### 3.1.1 内部領域における最低次の循環: $O(1)$ のバランス

変数の最低次  $q_0$  は, 級数展開 (3.0.1) から,

$$q_0 = \lim_{\substack{(y,z,t) \text{ fixed} \\ E_V, \varepsilon, E_H \rightarrow 0}} q \quad (3.1.2)$$

なる極限によって定義される. したがって, (3.0.1) は内部領域の流れに対する適切な表現を与える. しかし, 上の極限により定義される  $q_0$  自体は, 境界条件を満足しないだろう. そのため, 境界条件を満足させるための修正が必要である.

#### 内部領域の $O(1)$ のバランス

(2.3.12a)-(2.3.12d) に (3.0.1) を適用して,  $O(1)$  の項を集めれば,

$$u_0 = -\frac{\partial p_0}{\partial y}, \quad (3.1.3a)$$

$$v_0 = 0, \quad (3.1.3b)$$

$$0 = \frac{\partial p_0}{\partial z}, \quad (3.1.3c)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad (3.1.3d)$$

を得る. ただし, (3.1.3d) を導く際に, (3.1.3b) を用いた. したがって, 内部領域における  $O(1)$  の水平速度は地衡流である. 特に,  $x$  方向の一様性のために,  $v_0$  は恒等的にゼロである. また, (3.1.3c) より,

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \quad (3.1.4)$$

であるので, 内部領域の  $O(1)$  の速度は  $z$  に独立である.

<sup>\*1</sup>例えば, 緯度 40 度では,  $f \sim 10^{-4} [\text{s}^{-1}]$  であるので,  $U \sim 2 [\text{m}]$  とするとき, ロスビー数が 1 を超えるためには, 運動の水平スケールは 20 [km] 以下でなければならない.

一方, 低緯度域の水平スケール  $L \sim 10^2 [\text{km}]$ ,  $U \sim 2 [\text{m}]$  の運動に対して, ロスビー数が 1 を超えるためには, 緯度は 8 度以上でなければならない.

(3.1.3a)-(3.1.3d) は、内部領域の  $O(1)$  の速度におけるバランスを与えるが、依然としてそれらは未知である (地衡流縮退). 内部領域の  $O(1)$  の循環を決定するためには、 $O(\varepsilon)$  の項のバランスによって与えられる、 $q_0$  の時間発展式が必要である. また、その時間発展式を  $q_0$  で閉じるには、 $z = 0, -1$  近傍の摩擦層 (エクマン層) 内の運動を調べて、それが内部領域に与える強制を  $q_0$  を使って表現しなければならない. その際、境界条件 (2.3.25)-(2.3.17) は考慮される.

### 3.1.2 エクマン層とその内部領域に対する強制の定式化

$z = 0, 1$  近傍のエクマン層の運動は、境界層理論によって記述できる.

下部境界近傍のエクマン層

$z = 0$  の底面に発生するエクマン層の記述を、Pedlosky (1987, section 4.5) に従って行う. 今、境界近傍における鉛直方向の場の急激な変化を  $O(1)$  で表現するために、伸縮座標

$$\xi = z/l \quad (3.1.5)$$

を導入する. ここで、 $l$  は無次元の境界層の厚さである. (2.3.12a)-(2.3.12d) に対して、(3.1.5) を適用すれば、

$$\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{l} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta y v \right) - v = \frac{E_H}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{E_V}{2l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad (3.1.6a)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{l} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \beta y u \right) + u = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{E_H}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{E_V}{2l^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \quad (3.1.6b)$$

$$\frac{1}{l} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad (3.1.6c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0. \quad (3.1.6d)$$

を得る. したがって、 $E_V$  に比例する摩擦項が  $O(1)$  のコリオリ項とバランスするために、

$$l = E_V^{1/2} \quad (3.1.7)$$

と選ぶ.

境界層において、変数は

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}}(y, \xi, t, E_V, E_H, \varepsilon) = \tilde{\mathbf{q}}_0(y, \xi, t) + \dots \quad (3.1.8)$$

と書かれる. ここで,  $(\sim)$  は境界層近傍で適切な表現であることを示す. また, 最右辺の小さなパラメータによる級数展開は, 固定した  $\xi$  に対して  $E_V, E_H, \varepsilon \rightarrow 0$  の極限により,  $\tilde{q}_0$  を定義する.

次に, (3.1.6d) を用いて,  $\tilde{w}$  のスケールについて考える. 今,

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi} = -E_V^{1/2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \quad (3.1.9)$$

であるので, もし  $\tilde{w}$  が  $O(E_V^{1/2})$  より大きければ,  $\partial \tilde{w} / \partial \xi = 0$  であることを要求するだろう. このとき, 鉛直速度の境界条件 (2.3.17) から,  $\tilde{w}$  は恒等的にゼロとなってしまう. したがって,  $\tilde{w} = O(E_V^{1/2})$  でなければならない. 故に, 境界層の鉛直速度のスケールを次のようにとり直す.

$$\begin{aligned} \tilde{w}(y, \xi, t, \varepsilon, E_H, E_V) &= E_V^{1/2} \tilde{W}(y, \xi, t, \varepsilon, E_H, E_V) \\ &= E_V^{1/2} \{ \tilde{W}_0(y, \xi, t) + \dots \}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{W}, \tilde{p}$  の小さなパラメータによる級数展開を, (3.1.6a)-(3.1.6d) に代入し,  $O(1)$  の項だけ集めれば,

$$-\tilde{v}_0 = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad (3.1.11a)$$

$$\tilde{u}_0 = -\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \xi^2}, \quad (3.1.11b)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \xi} = 0, \quad (3.1.11c)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial \xi} = -\frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial y} \quad (3.1.11d)$$

を得る.

(3.1.11c) より, 境界層内の  $O(1)$  の圧力  $\tilde{p}_0$  は  $\xi$  に依存しない. また, 境界層内の変数は,  $\xi \rightarrow 0$  のとき, 内部領域の解と滑らかに接続しなければならない (接合原理). すなわち,  $v$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{q}_0 = \lim_{z \rightarrow 0} q_0 \quad (3.1.12)$$

でなければならない. したがって, すべての  $\xi$  に対して, 境界層内の  $O(1)$  の圧力勾配は内部領域の  $O(1)$  の圧力勾配によって与えられる. このとき, (3.1.11a), (3.1.11b) は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \xi^2} + \tilde{v}_0 &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \xi^2} - \tilde{u}_0 &= u_0(y) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

と書ける. ただし, (3.1.3a), (3.1.3b) によって, 内部領域の  $O(1)$  の水平圧力勾配を水平速度で置き換えた. 今,  $z = \xi = 0$  に対する滑りなし条件と水平速度に対する接合原理,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0 &= 0, \quad \tilde{v}_0 = 0 & \text{at } \xi = 0, \\ \tilde{u}_0 &= u_0(y), \quad \tilde{v}_0 = v_0(y) = 0 & \text{at } \xi \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

のもとで, (3.1.13) の解を求めれば,

$$\tilde{u}_0 = u_0(y) [1 - e^{-\xi} \cos \xi], \quad \tilde{v}_0 = u_0(y) e^{-\xi} \sin \xi \quad (3.1.15)$$

を得る<sup>\*2</sup>.

次に, エクマン層における鉛直速度  $\tilde{W}_0$  を求める. (3.1.11d) に (3.1.15) を代入し, その結果を  $\xi$  について 0 から  $\xi$  まで積分すれば,

$$\tilde{W}_0(y, \xi) = \frac{1}{2} \zeta_0 [1 - e^{\xi} (\cos \xi + \sin \xi)] \quad (3.1.16)$$

を得る<sup>\*3</sup>. ただし, 積分定数の決定のために,  $\xi = 0$  において  $\tilde{W}_0 = 0$  である境界条件を用いた. また,  $\zeta_0 (= -\partial u_0 / \partial y)$  は内部領域の渦度の最低次を表す. 鉛直速度に対して接合原理を適用すれば, (3.1.16) は  $z = 0$  における内部領域の鉛直速度

$$w(y, 0) = \frac{E_V^{1/2}}{2} \zeta_0 \quad (3.1.17)$$

を与える. したがって, 内部領域の流れに対する下部境界条件が得られた.

### 上部境界近傍のエクマン層

応力が加えられる流体表面の近傍に発生するエクマン層の記述を, Pedlosky (1987, section 4.10) に従って行う. 手法は上で示した下部境界近傍のエクマン層の場合とほぼ同じであるので, 異なる部分以外は結果のみを示すことにする.

最初に, 伸縮座標を

$$\bar{\xi} = \frac{1 - z}{E_V^{1/2}} \quad (3.1.18)$$

<sup>\*2</sup> $x$  方向の一様性を仮定しない場合には, エクマン層内の水平速度の最低次は, ベクトル形式で書けば,

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_0 (1 - e^{-\xi} \cos \xi) + (\mathbf{k} \times \mathbf{u}_0) e^{-\xi} \sin \xi$$

となる. ここで,  $\tilde{\mathbf{u}}_0 = (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ ,  $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$  とおいた. また,  $\mathbf{k}$  は鉛直方向の単位ベクトルである.

<sup>\*3</sup> $x$  方向の一様性を仮定しない場合でも, 境界層の鉛直速度は同じ表現で与えられる.

と導入する. さらに, (3.1.8) と同様の小さなパラメータによる変数の級数展開を行えば, 境界層における  $O(1)$  の方程式系

$$-\tilde{v}_0 = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\xi}^2}, \quad (3.1.19a)$$

$$\tilde{u}_0 = -\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \bar{\xi}^2}, \quad (3.1.19b)$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \bar{\xi}} = 0, \quad (3.1.19c)$$

$$-\frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial \bar{\xi}} = -\frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial y} \quad (3.1.19d)$$

を得る. 境界層における水平圧力勾配は, 下側のエクマン層と同様に内部領域の値を与えればよい. また, (3.1.19a), (3.1.19b) に対する  $\bar{\xi} = 0$  における境界条件として, (2.3.25), すなわち,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{\xi}} = \alpha \tau_x(y), \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \bar{\xi}} = 0 \quad \text{at } \bar{\xi} = 0 \quad (3.1.20)$$

を課す. ここで,

$$\alpha = \frac{2\tau_0}{\rho_0 f D E_V^{1/2} U} \quad (3.1.21)$$

とおいた. このとき, 境界条件を満足する境界層内の  $O(1)$  の水平速度は,

$$\tilde{u} = u_0(y) + \frac{e^{-\bar{\xi}}}{2} \alpha \tau_x(y) [-\sin \bar{\xi} + \cos \bar{\xi}], \quad \tilde{v} = -\frac{e^{-\bar{\xi}}}{2} \alpha \tau_x(y) [\sin \bar{\xi} + \cos \bar{\xi}] \quad (3.1.22)$$

と得られる<sup>\*4</sup>

境界層内の鉛直速度もまた下側エクマン層と同様に求めることができる. すなわち, (3.1.24) を (3.1.19d) に代入し,  $\bar{\xi}$  について 0 から  $\bar{\xi}$  まで積分すればよい. rigid-lid 近似を適用するとき,  $\bar{\xi} = 0$  における鉛直速度はゼロとするので, 結果的に境界層内の鉛直速度は,

$$\tilde{W}_0(y, \bar{\xi}) = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial \tau_x(y)}{\partial y} [1 - e^{-\bar{\xi}} \cos \bar{\xi}] \quad (3.1.24)$$

<sup>\*4</sup> $x$  方向の一様性を仮定せず, また流体表面に加わる応力がより一般的な場合には, 境界層内の  $O(1)$  の水平速度は, ベクトル形式において,

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0 + \frac{\alpha e^{-\bar{\xi}}}{2} [\boldsymbol{\tau}(\cos \bar{\xi} - \sin \bar{\xi}) - (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau})(\cos \bar{\xi} + \sin \bar{\xi})] \quad (3.1.23)$$

となる.

と与えられる。最後に、鉛直速度に対して接合原理を適用すれば、(3.1.24) は、 $z = H$  における内部領域の鉛直速度

$$w(y, H) = \alpha \frac{E_V^{1/2}}{2} \mathbf{k} \cdot \text{curl } \boldsymbol{\tau} \quad (3.1.25)$$

を与える<sup>\*5</sup>。ここで、

$$\mathbf{k} \cdot \text{curl } \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_x(y)}{\partial y} \quad (3.1.26)$$

である。したがって、内部領域の流れに対する上部境界条件が得られた。

### 3.1.3 内部領域における最低次の循環: $O(\varepsilon)$ のバランス

展開パラメータ  $\Delta$  の決定

(3.0.1) における展開パラメータ  $\Delta$  は、実際の流れが  $O(1)$  の厳密な地衡流からどの程度ずれるかの指標である。今の場合、内部領域において、地衡流からのずれを発生させる機構は、

- 流れの相対加速度 (相対速度の移流)
- エクマン・パンピングによる惑星渦管の伸縮
- 運動量の水平拡散

である。1 つ目の機構は、 $O(\varepsilon)$  の非地衡流を生じさせる。一方、2 つ目の機構は、 $O(E_V^{1/2})$  の相対渦度の変化を発生させる。エクマン・パンピングによる惑星渦管伸縮と相対渦度の移流との比は、

$$E_V^{1/2}/\varepsilon = (L/U)/\tau_{\text{spinup}}$$

で与えられる。ここで、 $\tau_{\text{spinup}} = D/(2A_V f)^{1/2}$  である。これは、(2.3.10) で定義される  $r$  に他ならず、今  $r = O(1)$  を仮定している。 $r$  が大きい、あるいは小さい場合については、 $r$  の極限をとることによって考慮される。3 つ目の機構によるずれへの寄与は、 $O(E_H)$  である。運動量の摩擦による水平拡散と相対加速度の比は、

$$E_H/\varepsilon = \frac{2}{\text{Re}}$$

<sup>\*5</sup> $x$  方向の一様性を仮定せず、また一般的な応力分布を与える場合でも、同じ形式の鉛直速度が得られる。

で与えられる. ここで,  $Re = UL/A_H$  は内部領域の流れのレイノルズ数である. 通常, 地球流体力学の問題において, このレイノルズ数は十分に大きく, 比  $E_H/\varepsilon = 2/Re$  は小さい. しかし, 滑りなし条件を課す水平境界が存在する場合, そこで水平拡散項が重要となるため,  $O(E_H)$  の水平拡散項を無視せずの残すことにする.

したがって, 小さなパラメータ  $\Delta$  による変数  $q$  の級数展開は,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}(y, z, t, \varepsilon, E_V, E_H) \\ &= \mathbf{q}_0(y, z, t, r, Re) + \varepsilon \mathbf{q}_1(y, z, t, r, Re) + \dots \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

と書ける.

### $O(1)$ の変数の時間発展方程式

(2.3.12a)-(2.3.12d) に, (3.1.27) を代入し,  $O(1)$  の項を集めれば, やはり (3.1.3a)-(3.1.3d) が得られる. よって,  $O(1)$  の速度は  $z$  に依存しない. 今,  $z = 0$  における鉛直速度の最低次は, (3.1.17) により  $O(E_V^{1/2})$  である.  $E_V^{1/2} \ll 1$  であるので, 故に全ての  $z$  に対して,

$$\boxed{w_0 = 0} \quad (3.1.28)$$

でなければならない.

$O(\varepsilon)$  の項を集め, さらに  $u_0$  が  $z$  に依存しないこと, 今  $v_0, w_0$  が内部領域において恒等的にゼロである事実を用いれば,

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - v_1 = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \quad (3.1.29a)$$

$$-\beta u_0 + u_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial y}, \quad (3.1.29b)$$

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad (3.1.29c)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (3.1.29d)$$

を得る. 次に, 渦度方程式は ( $x$  方向の一様性に注意),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} &= -\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

と求まる. ここで,  $\zeta_0$  は内部領域における  $O(1)$  の相対渦度であり, 今の場合  $\zeta_0 = -\frac{\partial u_0}{\partial y}$  最低次の運動は  $z$  に依存しないので,  $z$  について 0 から 1 まで簡単に積分で



きる。その結果,

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} = w_1(y, 1) - w_1(y, 0) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \quad (3.1.31)$$

を得る。この時点で,  $z = 0, 1$  における摩擦層の存在が重要になる。(3.1.17) と (3.1.27) から,

$$w(y, 0, t) = \varepsilon w_1(y, 0, t) + \dots = \frac{E_V^{1/2}}{2} \zeta_0 \quad (3.1.32)$$

であるので,

$$w_1(y, 0, t) = \frac{r}{2} \zeta_0(y, 0, t) \quad (3.1.33)$$

$v$  となる。同様に, (3.1.25) と (3.1.27) から,

$$w_1(y, H, t) = \left( \frac{\tau_0}{\rho_0 f_0 U D \varepsilon} \right) \mathbf{k} \cdot \text{curl} \tau \quad (3.1.34)$$

となる。したがって,  $O(\varepsilon)$  までの系のポテンシャル渦度方程式,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \left[ \frac{\tau_0}{\rho_0 f_0 U D \varepsilon} \right] \mathbf{k} \cdot \text{curl} \tau - \frac{r}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \quad (3.1.35)$$

が得られる<sup>\*6</sup>。ここで,  $\psi$  は  $O(1)$  の水平速度に対する流線関数であり,  $\partial^2 \psi / \partial y^2 = \zeta_0$  である。

### 3.1.4 内部領域における最低次の循環:定常解

次に, (3.1.35) の定常解を求める。

<sup>\*6</sup>本論文では,  $x$  方向の一様性, 地形なし, および流体表面において rigid-lid を仮定したため, 内部領域の運動に対するポテンシャル渦度方程式 (3.1.35) の右辺は,  $\zeta_0$  の局所時間微分の項しか残らない。

一方, より一般的な場合には, すなわち地形や摩擦が存在し, 流体表面が自由表面である場合には, 準地衡流ポテンシャル渦度方程式は Pedlosky(1987) の式 (4.1.12) によって,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] [\nabla^2 \psi - F \psi + \beta y + \eta_B] = \left[ \frac{\tau_0}{\rho_0 f_0 U D \varepsilon} \right] \mathbf{k} \cdot \text{curl} \tau - \frac{r}{2} \nabla^2 \psi + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi$$

と与えられる。ここで,  $\psi$  は内部領域の  $O(1)$  の水平速度に対する流線関数,  $F = L^2 / (gD / f^2)$  はフルード数である。また,

$$\eta_0 = \psi, \quad \varepsilon \eta_B(x, y) = \frac{h_{B*}}{D}$$

である。ただし,  $h_{B*}$  は有次元の地形の高さであり,  $h_{B*} / D = O(\varepsilon)$  である (流体層の厚さに対して, 地形高度は十分に小さい) ことを仮定している。

明らかに, 流体表面で加えられる応力の回転 (右辺一項目) による強制は, 下部エクマン層における散逸とバランスするだろう. したがって,  $U$  のスケールを

$$U = \frac{2}{r} \frac{\tau_0}{\rho_0 f_0 D \varepsilon} = \frac{2\tau_0}{\rho_0 f_0 \delta_E} \quad (3.1.36)$$

のように取る. ここで,  $\delta_E = E_V^{1/2} D$  はエクマン層の特徴的な厚さである. このとき, (3.1.35) から,  $\zeta_0$  の  $y$  に対する二階の線形常微分方程式,

$$-\frac{1}{\tilde{\text{Re}}} \frac{d^4 \psi}{dy^4} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} = \mathbf{k} \cdot \text{curl } \boldsymbol{\tau}(y) \quad (3.1.37)$$

を得る. ただし,

$$\tilde{\text{Re}} = \frac{r \text{Re}}{2} \quad (3.1.38)$$

とおき直した. なお, 今レイノルズ数は,

$$\text{Re} = \frac{UL}{A_H} = \frac{2\tau_0 L}{A_H \rho_0 f_0 \delta_E} \quad (3.1.39)$$

と計算される. また, (3.1.37) を最低次の東西流速  $u_0$  を用いて書くならば,

$$\frac{1}{\tilde{\text{Re}}} \frac{d^3 u_0}{dy^3} - \frac{du_0}{dy} = \mathbf{k} \cdot \text{curl } \boldsymbol{\tau}(y) \quad (3.1.40)$$

と書ける.

$\tilde{\text{Re}}^{-1} \ll 1$  に対する漸近級数解

赤道近傍を除けば風成循環の水平スケールは大規模であり, その循環に対する水平レイノルズ数  $\text{Re}$  は 1 より十分大きい. また, エクマン層に伴うスピンアップ・タイムが, 移流時間スケールより短い場合 (すなわち  $r > 1$ ) をここでは考えることにする. このとき, 変数を  $\tilde{\text{Re}}^{-1} (\ll 1)$  によって

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} [u_0]_n (\tilde{\text{Re}})^{-n} \quad (3.1.41)$$

のように級数展開し, (3.1.40) の漸近級数解を求める.

(3.1.41) を (3.1.40) に代入し,  $O(1)$  の項を集めれば,

$$-\frac{d[u_0]_n}{dy} = \mathbf{k} \cdot \text{curl } \boldsymbol{\tau}(y) \quad (3.1.42)$$

を得る. さらに,  $O((r\text{Re})^{-m})$  の項を集めれば,

$$\frac{d[u_0]_m}{dy} = \frac{d^3[u_0]_{m-1}}{dy^3} \quad (3.1.43)$$

なる関係式を得る. 今  $|y| \rightarrow \infty$  で  $u_n$  はゼロに収束することを仮定すれば, 上の二式から

$$[u_0]_n = \frac{d^{2n}}{dy^{2n}} \tau_x(y) \quad (3.1.44)$$

を得る. したがって,  $[u_0]_0$  は単に  $\tau_x(y)$  であり, 水平渦粘性の効果はそれより高次の項によって考慮される.

## 第4章 支配方程式系の近似解: 赤道近傍

本章では,  $\varepsilon_{eq}$  が 1 より十分小さい場合を考えて, (2.3.24a) - (2.3.24d) の線形解の導出を, Gill (1971); Dowden (1972) に従って行う. 彼らによれば, 海面応力の詳細な分布は赤道境界層の力学に対して重要でない. そのため, 本ノートにおいても, 簡単化のために南北方向に一樣な海面応力を与える. すなわち,

$$\tau_x(y) = -1 \quad (4.0.1)$$

の場合を考えることにする.

### 4.1 線形近似解 (赤道近傍)

(2.3.24a) - (2.3.24d) において, 非線形項を無視すれば,

$$-yv = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \delta_E^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (4.1.2a)$$

$$yu = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \delta_E^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (4.1.2b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.1.2c)$$

となる. 以下では, 流れを順圧成分と傾圧成分に分割して, (4.1.2) の解を求める. 初めに, 流れの順圧成分  $(\bar{u}, \bar{v})$  を

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \int_0^1 (u, v) dz \quad (4.1.3)$$

と定義する. 一方で, 流れの傾圧成分  $(\hat{u}, \hat{v})$  は, 流れの順圧成分からのずれによって定義する. すなわち,

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (u, v) - (\bar{u}, \bar{v}). \quad (4.1.4)$$

### 4.1.1 流れの順圧成分

流れの順圧成分に対する方程式を得るために, (4.1.2) を  $z$  について 0 から 1 まで積分し, 上下端における境界条件を適用すれば,

$$-y\bar{v} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \delta_E \left[ -1 - \delta_E \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \right)_{z=0} \right], \quad (4.1.5a)$$

$$y\bar{u} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \delta_E \left[ -\delta_E \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right)_{z=0} \right], \quad (4.1.5b)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (4.1.5c)$$

が得られる.

(4.1.5) を満たす解について考える. 例えば,  $|y| = y_\infty$  において,  $\bar{u} = \bar{u}_\infty$  となる, (4.1.5) の解を求めることにしよう.  $O(\delta_E)$  の項を無視することにすれば,

$$\bar{v} = 0, \quad \bar{u} = \bar{u}_\infty, \quad (4.1.6)$$

$$p = -\frac{\bar{u}}{2} y^2 + (\text{const}). \quad (4.1.7)$$

が得られる.

### 4.1.2 流れの傾圧成分

流れの傾圧成分に対する方程式を得るために, (4.1.2) を (4.1.5) で引けば,

$$-y\hat{v} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + \delta_E^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} + \delta_E \left[ 1 + \delta_E \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \right)_{z=0} \right], \quad (4.1.8a)$$

$$y\hat{u} = \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \delta_E^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} + \delta_E \left[ \delta_E \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right)_{z=0} \right], \quad (4.1.8b)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.1.8c)$$

を得る. 今,

$$P = \hat{u} + i\hat{v} \quad (4.1.9)$$

とおけば, (4.1.8) は,

$$\delta_E^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - iyP = \delta_E \left[ 1 + \delta_E \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{z=0} \right] \quad (4.1.10)$$

と書ける.

## 流れの傾圧成分の分解

次に, 流れの傾圧成分に対する線形の方程式 (4.1.8) の解を, それぞれ内部領域, 上側エクマン層, 下側エクマン層内の寄与に分割して考えるために,  $P$  を

$$P = P_I + P_{e1} + P_{e2} \quad (4.1.11)$$

と分解する. ここで,  $P_I, P_{e1}, P_{e2}$  を以下のように定義する.

- $P_I$ : 内部領域の流れの速度. ただし,  $P_I$  に関する鉛直拡散項はゼロする.
- $P_{e1}$ : 上側エクマン層内の流れの速度. ただし, その外側ではゼロとする.
- $P_{e2}$ : 下側エクマン層内の流れの速度. ただし, その外側ではゼロとする.

## 流れの傾圧成分の決定: (i) 内部領域

$P_I$  に対する方程式は, (4.1.10) から,

$$\frac{\partial^2 P_I}{\partial y^2} - iyP_I = \delta_E \left[ 1 + \delta_E \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{z=0} \right] \quad (4.1.12)$$

と得られる. ここで,  $O(\delta_E)$  以下の項を無視することにすれば,

$$\frac{\partial^2 P_I}{\partial y^2} - iyP_I = 0 \quad (4.1.13)$$

となる. 今,  $|y| \rightarrow \infty$  において,

$$-iyP_I = 0 \quad (4.1.14)$$

に漸近的に収束する条件を課せば,

$$P_I = 0 \quad (4.1.15)$$

を得る. したがって,  $O(\delta_E)$  までに対して, 内部領域における流れの傾圧成分  $P_I$  はゼロである.

## 流れの傾圧成分の決定: (ii) 上側エクマン層

今, 上端エクマン層内の流れの表現に適した座標

$$\tilde{z} = \frac{z-1}{\delta_E} \quad (4.1.16)$$

を導入する. この  $\tilde{z}$  を用いて, (4.1.10) を書き直し, その結果を (4.1.5) で引けば, 上側エクマン層内の流れ  $P_{e1}$  に対する方程式

$$\frac{\partial^2 P_{e1}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial^2 P_{e1}}{\partial y^2} - iyP_{e1} = 0 \quad (4.1.17)$$

を得る.

(4.1.17) に対して, 以下の境界条件を課す.

$$\frac{\partial P_{e1}}{\partial \tilde{z}} \rightarrow -1 \quad \text{as } \tilde{z} \rightarrow -0, \quad (4.1.18a)$$

$$P_{e1} \rightarrow 0 \quad \text{as } \tilde{z} \rightarrow -\infty, \quad (4.1.18b)$$

$$P_{e1} \sim \frac{-1 \pm i}{2\sqrt{|y|}} \exp\left[\tilde{z}(1+i)\sqrt{|y|/2}\right] \quad \text{as } |y| \rightarrow \infty. \quad (4.1.18c)$$

最後の境界条件により, 赤道から十分に遠方では,  $P_{e1}$  はエクマン解と接続しなければならない.

境界条件 (4.1.18) を満たす (4.1.17) の解は, 最終的には以下のように得られる. その導出過程については, 付録を参照されたい.

$$P_{e1} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{l}} \exp\left(-\frac{l^3}{3} - ily - \frac{\tilde{z}^2}{4l}\right) dl \quad (4.1.19)$$

また, 上の  $P_{e1}$  と連続の式を用いて, 上側エクマン層内の鉛直速度を求めれば,

$$w_{e1} = \frac{\delta_E}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{l} \exp\left(-\frac{l^3}{3}\right) \cos(ly) \int_0^{\tilde{z}} \exp\left(-\frac{\tilde{z}^2}{4l}\right) d\tilde{z} dl \quad (4.1.20)$$

と得られる. 特に,  $\tilde{z} \rightarrow -\infty$  に対する鉛直速度は,

$$w_{e1}|_{\tilde{z} \rightarrow -\infty} = \delta_E \int_0^\infty l \exp\left(-\frac{l^3}{3}\right) \cos(ly) dl \quad (4.1.21)$$

と書ける.

流れの傾圧成分の決定: (iii) 下側エクマン層

上側エクマン層の場合と同様な方法によって解を導出できる.

上側エクマン層と同様の手順により, 下側エクマン層の流れ  $P_{e2}$  に対する方程式は,

$$\frac{\partial^2 P_{e2}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial^2 P_{e2}}{\partial y^2} - iyP_{e2} = 0 \quad (4.1.22)$$

と得られる. ただし, 伸縮座標  $\tilde{z}$  は

$$\tilde{z} = \frac{z}{\delta_E} \quad (4.1.23)$$

と導入した.

(4.1.22) に対して, 以下の境界条件を課すことにする.

$$P_{e2} = -(P_I + \bar{u} + i\bar{v}), \quad \text{as } \tilde{z} = 0, \quad (4.1.24a)$$

$$P_{e2} \rightarrow 0 \quad \text{as } \tilde{z} \rightarrow \infty, \quad (4.1.24b)$$

$$P_{e2} \sim -(P_I + \bar{u}_\infty + i\bar{v}_\infty) \exp\left[\tilde{z}(1+i)\sqrt{|y|/2}\right] \quad \text{as } |y| \rightarrow \infty. \quad (4.1.24c)$$

最初の境界条件は, 下端境界における滑り無し条件である. また, 最後の境界条件によって, 赤道から十分遠方では,  $P_{e2}$  と接続しなければならない.

境界条件 (4.1.24) を満たす (4.1.22) の解は, 最終的には以下のように得られる. その導出過程については, 付録を参照されたい.

$$P_{e2} = -\frac{\bar{u}_\infty}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{z}}{l^{3/2}} \exp\left(-\frac{l^3}{3} - ily - \frac{\tilde{z}^2}{4l}\right) dl \quad (4.1.25)$$

また, 上の  $P_{e1}$  と連続の式を用いて, 上側エクマン層内の鉛直速度を求めれば,

$$w_{e2} = \delta_E \frac{\bar{u}_\infty}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{l} \exp\left(-\frac{l^3}{3}\right) \cos(ly) \left[1 - \exp\left(-\frac{\tilde{z}^2}{4l}\right)\right] dl \quad (4.1.26)$$

と得られる. 特に,  $\tilde{z} \rightarrow \infty$  に対する鉛直速度は,

$$w_{e2}|_{\tilde{z} \rightarrow \infty} = \delta_E \frac{\bar{u}_\infty}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty l \exp\left(-\frac{l^3}{3}\right) \cos(ly) dl \quad (4.1.27)$$

と書ける.



## 付録 A: 東西チャネルを仮定し, 境界条件を陽に与えて解を求める場合

右辺の応力の回転を,

$$-\frac{\partial \tau_x(y)}{\partial y} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 \quad (\text{A.1})$$

と三次関数で与えるとすれば, (3.1.37) の一般解は,

$$\begin{aligned} \psi(y) = & C_1 \sinh(\text{Re}^{1/2} y) + C_2 \cosh(-\text{Re}^{1/2} y) + C_3 + C_4 x \\ & - \left(\frac{a_0}{2} + a_2/\text{Re}\right) y^2 - \left(\frac{a_1}{6} + a_3/\text{Re}\right) y^3 - \frac{a_2}{12} y^4 - \frac{a_3}{20} y^5 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

と得られる. 今, 未知定数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を決定するために, (3.1.37) に対して,

$$\begin{aligned} \psi &= 0, \quad \text{at } y = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0, \quad \text{at } y = y_0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0, \quad \text{at } y = \pm 1 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

なる条件を課す. 一番目の条件は,  $y = 0$  において流れ関数がゼロとなることを要請するが, この条件に物理的な意味はない. 二番目の条件は,  $y = y_0$  ( $|y_0| < 1$ ) において  $u_0$  がゼロとなることを要求する. 最後の条件は,  $y = \pm 1$  において  $u_0$  の南北シアがゼロとなることを要求する. したがって, 未知定数は以下のように決まる.

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{q_{yy}(1) - q_{yy}(-1)}{2r^2 \sinh(r)}, \quad C_2 = -C_3 = -\frac{q_{yy}(1) + q_{yy}(-1)}{2r^2 \cosh(r)}, \\ C_4 &= -q_y(y_0) - r \cosh(ry_0)C_1 - r \sinh(ry_0)C_2. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ただし,  $q(y)$  は (A.2) の非斉次解の部分を表す関数である.

任意の  $y_0$  に対して, (A.3) を満たす (3.1.37) の特殊解の陽な形式は, 複雑であるのでここでは明記しない. しかし,  $y_0 = 0$  の特別な場合にはその対称性により, 特殊解は比較的簡単な形式をもつ. よって,  $y_0 = 0$  の場合の (3.1.37) の特殊解およびそれと関係した変数の解を以下に示す. 初めに流線関数は,

$$\begin{aligned} \psi(y) = & -\left(\frac{a_0}{2} + a_2/\text{Re}\right) y^2 - \left(\frac{a_1}{6} + a_3/\text{Re}\right) y^3 - \frac{a_2}{12} y^4 - \frac{a_3}{20} y^5 \\ & + \frac{a_0 + a_2(1 + 2/\text{Re})}{\text{Re} \cosh(\sqrt{\text{Re}})} \cosh(\sqrt{\text{Re}} y) + \frac{a_1 + a_3(1 + 6/\text{Re})}{\text{Re} \sinh(\sqrt{\text{Re}})} \left[ \sinh(\sqrt{\text{Re}} y) - \sqrt{\text{Re}} y \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

と求まる. したがって,  $O(1)$  の東西流速は,

$$u_0(y) = (a_0 + 2a_2/\text{Re})y + \frac{a_1}{2}y^2 + \frac{a_2}{3}y^3 + \frac{a_3}{4}y^4 \\ - \frac{a_0 + a_2(1 + 2/\text{Re})}{\sqrt{\text{Re}} \cosh(\sqrt{\text{Re}})} \sinh(\sqrt{\text{Re}} y) - \frac{a_1 + a_3(1 + 6/\text{Re})}{\sqrt{\text{Re}} \sinh(\sqrt{\text{Re}})} \left[ \cosh(\sqrt{\text{Re}} y) - 1 \right] \quad (\text{A.6})$$

と得られる. また, 内部領域の  $O(\varepsilon)$  の弱い子午面循環は, 次のように求めることができる.  $v_1$  は (3.1.29a) を用いることによって,

$$v_1 = -\text{Re}^{-1}(a_1 + 2a_2y + 3a_3y^2) \\ + \frac{a_0 + a_2(1 + 2/\text{Re})}{\sqrt{\text{Re}} \cosh(\sqrt{\text{Re}})} \sinh(\sqrt{\text{Re}} y) + \frac{a_1 + a_3(1 + 6/\text{Re})}{\sqrt{\text{Re}} \sinh(\sqrt{\text{Re}})} \cosh(\sqrt{\text{Re}} y) \quad (\text{A.7})$$

と得られる. したがって, 大きなレイノルズ数に対して, 内部領域の南北速度は  $O(\varepsilon)$  よりもずっと小さい. しかし, (3.1.16), (3.1.23) から, 上下端の境界層において  $O(1)$  の南北速度が存在することに気をつける必要がある. 一方,  $w_1$  は上で求めた  $v_1$  と (3.1.29d), (3.1.17) を使って,

$$w_1(y, z) = \frac{r}{2}\zeta_0(y) + z \left[ \text{Re}^{-1}(2a_2 + 6a_3y) \right. \\ \left. + \frac{a_0 + a_2(1 + 2/\text{Re})}{\cosh(\sqrt{\text{Re}})} \cosh(\sqrt{\text{Re}} y) + \frac{a_1 + a_3(1 + 6/\text{Re})}{\sinh(\sqrt{\text{Re}})} \sinh(\sqrt{\text{Re}} y) \right] \quad (\text{A.8})$$

と求まる.

変数の最低次において  $z = 0, 1$  での境界条件を満足させるためには, 上で求めた内部領域における  $O(1)$  の解に, (3.1.15), (3.1.23) の修正項を加える必要がある. よって, 東西速度は,

$$u(y, z) = u_0(y) + \frac{\tau_x(y)}{\sqrt{2}} e^{-(1-z)/E_V^{1/2}} \cos\left(\frac{1-z}{\sqrt{E_V}} + \frac{\pi}{4}\right) \\ - u_0(y) \exp^{-z/E_V^{1/2}} \cos\left(\frac{z}{\sqrt{E_V}}\right) \quad (\text{A.9})$$

となる. 一方, 南北速度は,

$$v(y, z) = -\frac{\tau_x(y)}{\sqrt{2}} e^{-(1-z)/E_V^{1/2}} \sin\left(\frac{1-z}{E_V^{1/2}} + \frac{\pi}{4}\right) \\ - u_0(y) e^{-z/E_V^{1/2}} \sin\left(z/E_V^{1/2}\right) + \varepsilon v_1(y) \quad (\text{A.10})$$

となる<sup>\*1</sup>. 最後に鉛直速度は,

$$\begin{aligned}
 w(y, z) = & \left\{ \frac{E_V^{1/2}}{2} \zeta_0 \left[ 1 - \sqrt{2} e^{-z/E_V^{1/2}} \sin \left( \frac{z}{E_V^{1/2}} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \varepsilon \left[ \text{Re}^{-1} (2a_2 + 6a_3 y) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{a_0 + a_2(1 + 2/\text{Re})}{\cosh(\sqrt{\text{Re}})} \cosh(\sqrt{\text{Re}} y) + \frac{a_1 + a_3(1 + 6/\text{Re})}{\sinh(\sqrt{\text{Re}})} \sinh(\sqrt{\text{Re}} y) \right] z \right\} \\
 & \times \left\{ 1 - e^{-(1-z)/E_V^{1/2}} \cos \left( \frac{1-z}{\sqrt{E_V}} \right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{A.11}$$

と書ける.

---

<sup>\*1</sup> $u_0$  と同じように  $O(\varepsilon)$  の項を打ち切るならば, 右辺の三項目を書くべきではないが, 内部領域では ( $v_0 = 0$  のために) 主要な項となるため残しておく.

## 付録 B: 赤道近傍における上側・下側エクマン層内の解の導出

上側エクマン層内の解  $P_{e1}$  の導出

$$\frac{\partial^2 P_{e1}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial^2 P_{e1}}{\partial y^2} - iyP_{e1} = 0 \quad (4.1.17)$$

の解を導出する. ただし, 求める解は次の境界条件,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{e1}}{\partial \tilde{z}} &\rightarrow -1 & \text{as } \tilde{z} &\rightarrow -0, \\ P_{e1} &\rightarrow 0 & \text{as } \tilde{z} &\rightarrow -\infty, \\ P_{e1} &\sim \frac{-1 \pm i}{2\sqrt{|y|}} \exp\left[\tilde{z}(1+i)\sqrt{|y|/2}\right] & \text{as } |y| &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

を満たすものとする.

今, 境界条件 (4.1.18) の 2 つ目を満たすような解として,

$$P_{e1} = \int_C F(y, k) e^{k\tilde{z}} dk \quad (B.1)$$

を考える. ただし,  $C$  は複素  $k$  平面上の経路であり, 後ほど決定する. また,

$$\operatorname{Re}(k) \geq 0 \quad \text{on } C \quad (B.2)$$

でなければならない.

次に, 核  $F$  が満たす方程式を求める. (B.1) を (4.1.17) に代入すれば,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (k^2 - iy)F = B(k, y) \quad (B.3)$$

を得る. ここで,

$$\int_C B(k, y) dk = 0. \quad (B.4)$$

さらに,

$$F(y, k) = \int_D \tilde{F}(l, k) e^{-ily} dl \quad (B.5)$$

なる形式の  $F(y, k)$  を求める. ここで,  $D$  は複素  $l$  面上の経路であり後ほど決定される. (??) を (B.3) に代入し, 部分積分を実行すれば,

$$\int_D [(-l^2 + k^2)\tilde{F} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial l}] e^{-ily} dl = -[\tilde{F} e^{-ily}]_D + B(k, y) \quad (B.6)$$

を得る. 今, 右辺がゼロとなるように, 経路  $D$  を取ることにすれば,

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial l} = (k^2 - l^2) \tilde{F} \quad (\text{B.7})$$

を得る. ただし,

$$\left[ \tilde{F} e^{-ily} \right]_D = B(k, y) \quad (\text{B.8})$$

でなければならない.

(B.7) を解けば,

$$\tilde{F} = C(k) \exp \left[ -\frac{l^3}{3} + k^2 l \right]. \quad (\text{B.9})$$

ここで,  $C(k)$  は  $k$  の任意関数である. これを, B.8 に代入すれば,

$$C(k) \left[ \exp \left( -\frac{l^3}{3} + k^2 l - ily \right) \right]_D = B(k, y) \quad (\text{B.10})$$

を得る. さらに,

$$\left[ \exp \left( -\frac{l^3}{3} + k^2 l - ily \right) \right]_D = 1 \quad (\text{B.11})$$

を満たすように, 経路  $D$  を選ぶことによって, 任意関数  $C(k)$  は,

$$C(k) = B \quad (\text{B.12})$$

と決まる. したがって,  $B$  は  $y$  には依存しない. なお, (B.11) を満たす  $D$  は正の実軸である. 以上より,

$$P_{e1} = - \int_C \int_{l=0}^{\infty} B(k) \exp \left( -\frac{l^3}{3} + k^2 l - ily + k\tilde{z} \right) dl dk \quad (\text{B.13})$$

を得る.

次に, 境界条件 (4.1.18) の 3 つ目を考慮することを考える. (B.13) に対して,  $\tilde{z}$  の一階微分をとり, さらに部分積分を実行すれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{e1}}{\partial \tilde{z}} &= - \int_C \int_{l=0}^{\infty} kB(k) \exp \left( -\frac{l^3}{3} + k^2 l - ily + k\tilde{z} \right) dl dk \\ &= \int_C \left\{ \left[ \frac{kB(k)e^{k\tilde{z}}}{iy - k^2 + l^2} \exp \left( -\frac{l^3}{3} + k^2 l - ily \right) \right]_{l=0}^{\infty} \right\} dk + O(y^{-2}) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

を得る. 今,  $|y| \rightarrow \infty$  かつ  $C$  上で  $\text{Re}(k^2) < 0$  の場合を考えると, (B.14) は,

$$- \int_C \frac{kB(k)e^{k\tilde{z}}}{iy - k^2} dk \quad (\text{B.15})$$

と漸近的に等しくなる. (B.15) をさらに変形すれば,

$$- \int_C \frac{kB(k)e^{k\tilde{z}}}{iy - k^2} dk = \int_C \left[ \frac{1}{\sqrt{iy} + k} - \frac{1}{\sqrt{iy} - k} \right] \frac{B(k)e^{k\tilde{z}}}{2} dk \quad (\text{B.16})$$

である. したがって, 今, 経路  $C$  は  $\text{Re}(k^2) < 0$  かつ  $\text{Re}(k) \geq 0$

## 関連図書

JM Dowden.

An equatorial boundary layer.

*Journal of Fluid Mechanics*, 56(02):193–200, 1972.

A.E. Gill.

The equatorial current in a homogenous ocean.

*Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, 18(4):421 – 431, 1971.

ISSN 0011-7471.

doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0011-7471\(71\)90103-3](http://dx.doi.org/10.1016/0011-7471(71)90103-3).

URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0011747171901033>.

W.D. McKee.

The wind-driven equatorial circulation in a homogeneous ocean.

*Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, 20(10):889 – 899, 1973.

ISSN 0011-7471.

doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0011-7471\(73\)90107-1](http://dx.doi.org/10.1016/0011-7471(73)90107-1).

URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0011747173901071>.

J. Pedlosky.

*Geophysical Fluid Dynamics*.

Springer study edition. Springer-Verlag, 1987.

ISBN 9780387963877.

URL <http://books.google.co.jp/books?id=FXs-uRSDBFYC>.