湿潤大気における 2 次元非静力学モデルの定式化

山下 達也, 杉山 耕一朗, 石渡 正樹

2010 年 4 月 28 日

目 次

第1章　基礎方程式系

本数値モデルは水平・鉛直の 3 次元モデルである. 水平方向の座標変数を x, y, 鉛直方向の座標変数を z と表し, 時間方向の変数は t と表す.

1.1　考えている系

考えている系では, 以下のことが成り立つと仮定する.

- 任意の物理量は基本場成分と擾乱場成分の和で記述できる.
- 基本場は z のみに依存し, 静水圧平衡の状態にある.
- 基本場には雲や雨粒・氷粒が存在しない.
- 大気中の各気体分子は理想気体とみなせる.
- 大気中の各気体分子の気体定数, 定積比熱, 定圧比熱は一定である.
- 大気中の大気組成は大きく変化しない.

1.2　運動方程式・圧力方程式・熱の式・比湿の保存式

力学的な枠組みは, 準圧縮方程式系 (Klemp and Wilhelmson,1978) を用いる. この方程式系では, 予報変数を水平一様な基本場とそこからのずれに分離し, 方程式の線形化を行っている. 基本場は静水圧平衡の状態にあるものと仮定する. また気体は理想気体とみなせるものとする. 準圧縮方程式系の導出は付録 A に示す. 方程式中の変数は付録 D に示す.

Klemp and Wilhelmson(1978) では凝結性気体や凝結物を混合比で表現しているのに対し, 本モデルでは比湿で表現している. 但し本ドキュメントにおける比湿とは, 通常の気象学で用いられている比湿を拡張し, 全密度に対する任意の気体や凝結物の密度の比を指すものとする. 主成分が凝結する惑星大気を扱う際, 非凝結気体の密度を分母とする混合比を用いると数値計算上の困難が生じる可能性がある. このことは様々な惑星大気を扱うことを目的とする本モデルにとって大きな問題となりうる. そこで本モデルでは微量成分が凝結する系だけでなく, 主成分が凝結する系での計算も行なえるよう, 凝結気体や凝結物を比湿で表現することにする.

本モデルでは非凝結性気体, 凝結性気体, 雲水, 雨水 (氷) の 4 つのカテゴリーを想定している.

記号	意味	内容
q_d	非凝結性気体の比湿	
q_v	凝結性気体の比湿	
q_c	雲水比湿	落下速度がゼロである粒子に関する比湿. 大気中の雲粒に対応.
q_r	雨水比湿	有意な落下速度を持つ粒子に関する比湿. 大気中の雨粒または氷粒に対応.

ρ_d, ρ_v, ρ_c, ρ_r, ρ をそれぞれ非凝結成分の密度, 凝結成分の密度, 雲水の密度, 雨水の密度, 全密度とすると,

$$\rho = \rho_d + \sum \rho_v + \sum \rho_c + \sum \rho_r \tag{1.1}$$

が成り立ち, 各カテゴリーの比湿は以下のように定義される.

$$q_d = \frac{\rho_d}{\rho}, \tag{1.2}$$

$$q_v = \frac{\rho_v}{\rho}, \tag{1.3}$$

$$q_c = \frac{\rho_c}{\rho}, \tag{1.4}$$

$$q_r = \frac{\rho_r}{\rho}. \tag{1.5}$$

比湿に関して

$$q_d + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r = 1 \tag{1.6}$$

の関係が成り立つので, 非凝結性気体の比湿 q_d については診断的に求めることとする.

各変数を基本場と擾乱場に分け, 基本場の風速, 雲水比湿と雨水比湿がゼロであるとみなす. また基本場は水平一様であり, 静水圧平衡が成り立つと仮定する. 基本場の物理量に $^{-}$ を付し, 擾乱場の物理量に $'$ を付すことにすると, 各変数は以下のように書ける.

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= u'(x,y,z,t), \\
v(x,y,z,t) &= v'(x,y,z,t), \\
w(x,y,z,t) &= w'(x,y,z,t), \\
\theta(x,y,z,t) &= \overline{\theta}(z) + \theta'(x,y,z,t), \\
\Pi(x,y,z,t) &= \overline{\Pi}(z) + \Pi'(x,y,z,t), \\
\langle c_s \rangle^2(x,y,z,t) &= \overline{\langle c_s \rangle^2}(z) + \langle c_s \rangle^{2\prime}(x,y,z,t) \\
q_d(x,y,z,t) &= \overline{q_d}(z) + {q_d}'(x,y,z,t), \\
q_v(x,y,z,t) &= \overline{q_v}(z) + {q_v}'(x,y,z,t), \\
q_c(x,y,z,t) &= {q_c}'(x,y,z,t), \\
q_r(x,y,z,t) &= {q_r}'(x,y,z,t).
\end{aligned}
$$

θ, Π, $\langle c_s \rangle$ はそれぞれ温位, エクスナー関数, 音速であり,

$$
\Pi \equiv \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\langle R \rangle_0 / \langle c_p \rangle_0} \tag{1.7}
$$

$$
\theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\langle R \rangle_0 / \langle c_p \rangle_0} = \frac{T}{\Pi} \tag{1.8}
$$

$$
\langle c_s \rangle^2 \equiv \frac{\langle c_p \rangle_0 \langle R \rangle_0 \Pi \theta_v}{\langle c_v \rangle_0} \tag{1.9}
$$

である. 但し

$$
\langle R \rangle_0 \equiv \frac{q_{d0} R_d + \sum q_{v0} R_v}{q_{d0} + \sum q_{v0}} \tag{1.10}
$$

$$
\langle c_p \rangle_0 \equiv \frac{q_{d0} c_{pd} + \sum q_{v0} c_{pv}}{q_{d0} + \sum q_{v0}} \tag{1.11}
$$

$$
\langle c_v \rangle_0 \equiv \frac{q_{d0} c_{vd} + \sum q_{v0} c_{vv}}{q_{d0} + \sum q_{v0}} \tag{1.12}
$$

である. q_{d0}, q_{v0} はそれぞれ非凝結性気体, 凝結性気体の比湿の代表値, c_{pd}, c_{pv} はそれぞれ非凝結性気体, 凝結性気体の定圧比熱, c_{vd}, c_{vv} はそれぞれ非凝結性気体, 凝結性気体の定積比熱, R_d, R_v はそれぞれ非凝結性気体, 凝結性気体の気体定数である. q_{d0}, q_{v0}, c_{pd}, c_{pv}, R_d, R_v は定数である. 代表値 q_{d0}, q_{v0} は $q_{d0} + \sum q_{v0} = 1$ を満たすよう, 実験に応じて決める. (1.10), (1.11), (1.12) に現れる和は各凝結性成分について取るものとする. $\langle c_p \rangle_0$, $\langle R \rangle_0$ は非凝結性気体と凝結性気体の密度を重

みとする定圧比熱及び気体定数の平均値であり, 本文書では平均定圧比熱, 平均気体定数と呼ぶことにする. 本モデルでは $\langle c_p\rangle_0$, $\langle R\rangle_0$ は一定値である[1]. また状態方程式は

$$\rho = \frac{p}{\langle R\rangle_0 \Pi \theta_v} = \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v\rangle_0/\langle R\rangle_0}}{\langle R\rangle_0 \theta_v} \tag{1.13}$$

と表される. ここで

$$\theta_v \equiv \left(\frac{\langle M\rangle_0}{M_d} q_d + \sum \frac{\langle M\rangle_0}{M_v} q_v \right) \theta, \tag{1.14}$$

$$\langle M\rangle_0 \equiv \frac{q_{d0} + \sum q_{v0}}{q_{d0}/M_d + \sum q_{v0}/M_v} \tag{1.15}$$

である. 但し M_d, M_v はそれぞれ非凝結性気体, 凝結性気体の分子量である. $\langle M\rangle_0$ を平均分子量と呼び, 一定値とみなす.

以下, 基本場が満たす式を一覧する. 状態方程式は

$$\overline{\rho} = \frac{\overline{p}}{\langle R\rangle_0 \overline{\Pi} \overline{\theta_v}} = \frac{p_0 \overline{\Pi}^{\langle c_v\rangle_0/\langle R\rangle_0}}{\langle R\rangle_0 \overline{\theta_v}} \tag{1.16}$$

となる. 但し

$$\overline{\theta_v} \equiv \left(\frac{\langle M\rangle_0}{M_d} \overline{q_d} + \sum \frac{\langle M\rangle_0}{M_v} \overline{q_v} \right) \overline{\theta}, \tag{1.17}$$

$$\overline{\Pi} \equiv \left(\frac{\overline{p}}{p_0} \right)^{\langle R\rangle_0/\langle c_p\rangle_0}, \tag{1.18}$$

$$\overline{\theta} \equiv \overline{T} \left(\frac{p_0}{\overline{p}} \right)^{\langle R\rangle_0/\langle c_p\rangle_0} = \frac{\overline{T}}{\overline{\Pi}} \tag{1.19}$$

である. $\overline{q_d}$, $\overline{q_v}$ は

$$\overline{q_d} + \sum \overline{q_v} = 1 \tag{1.20}$$

を満たす. 静水圧平衡の式は

$$\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial z} = - \frac{g}{\langle c_p\rangle_0 \overline{\theta_v}} \tag{1.21}$$

と表される. 音波は

$$\overline{\langle c_s\rangle^2} \equiv \frac{\langle c_p\rangle_0 \langle R\rangle_0 \overline{\Pi} \overline{\theta_v}}{\langle c_v\rangle_0} \tag{1.22}$$

[1] $\langle R\rangle$, $\langle c_p\rangle$, $\langle M\rangle$ が大きく変化する系では物理的に意味のある計算が保証されない.

を満たす. 各実験では $\overline{T}$, $\overline{q_d}$, $\overline{q_v}$ を与え, (1.16) – (1.19), (1.21), (1.22) を用いてその他の基本場成分を決める.

以下に準圧縮方程式系の時間発展方程式を一覧する. 本モデルにおける予報変数は u', w', θ', Π', q'_a $(a = v, c, r)$ である. 密度の式では乾燥成分と湿潤成分の分子量の差を考慮するが, 熱の式では考慮しない. 凝結量は気相質量に比べて十分少ないと仮定する.

運動方程式

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -u'\frac{\partial u'}{\partial x} - v'\frac{\partial u'}{\partial y} - w'\frac{\partial u'}{\partial z} - \langle c_p\rangle_0 \overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial x} + D_u \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -u'\frac{\partial v'}{\partial x} - v'\frac{\partial v'}{\partial y} - w'\frac{\partial v'}{\partial z} - \langle c_p\rangle_0 \overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial y} + D_v \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial w'}{\partial x} - v'\frac{\partial w'}{\partial y} - w'\frac{\partial w'}{\partial z} - \langle c_p\rangle_0 \overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial z} \\ &\quad +\frac{\theta'}{\overline{\theta}}g + \frac{\sum(R_v/R_d - 1)q'_v - \sum(q'_c + q'_r)}{1 + \sum(R_v/R_d - 1)\overline{q_v}}g + D_{w'}\end{aligned} \tag{1.25}$$

圧力方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi'}{\partial t} &= -\frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle_0 \bar{\rho}\bar{\theta}_v^{\,2}}\nabla\cdot\left(\bar{\rho}\bar{\theta}_v \boldsymbol{u}'\right) \\ &\quad +\frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle_0 \overline{\theta_v}}\left[\frac{1}{\overline{\theta}}\left\{\frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_\theta\right\}\right. \\ &\quad +\frac{1}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}} \\ &\quad \left.\left\{-\sum(D_{q_v} + D_{q_c} + D_{q_r}) + \sum\frac{R_v}{R_d}\left[M_{src}(q_v) + D_{q_v}\right]\right\}\right]\end{aligned} \tag{1.26}$$

熱の式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial \theta'}{\partial x} - v'\frac{\partial \theta'}{\partial y} - w'\frac{\partial \theta'}{\partial z} - w'\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) \\ &\quad +D_{\overline{\theta}} + D_{\theta'}\end{aligned} \tag{1.27}$$

比湿の保存式

$$\begin{aligned}\frac{\partial q'_a}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q'_a}{\partial x} - v'\frac{\partial q'_a}{\partial y} - w'\frac{\partial q'_a}{\partial z} - w'\frac{\partial \overline{q_a}}{\partial z} \\ &\quad +\frac{1}{\rho}M_{fall}(\rho'_a) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho'_a) - \frac{\overline{q_a}}{\rho}\sum M_{fall}(\rho'_r) + D_{\overline{q_a}} + D_{q'_a}.\end{aligned} \tag{1.28}$$

このとき (1.28) は $a = v, c, r$ の 3 相に関する式となる. Q_{cond}, Q_{rad}, Q_{dis} はそれぞれ凝結加熱, 放射加熱, 散逸加熱による温度変化率を表し, M_{src}, M_{fall} はそれぞれ生成項, 落下項を表す. M_{src}, M_{fall}, Q_{cond} の定式化については 1.2 節で詳述する. Q_{rad} の定式化については 1.3 節で詳述する. Q_{dis}, D_* の定式化については 1.4 節で詳述する.

1.3　雲微物理過程のパラメタリゼーション

本モデルでは Kessler(1969) のパラメタリゼーションと Tobie et al.(2003) に基づくパラメタリゼーションの 2 種類が用意されている[2].

1.3.1　Kessler(1969) の雲微物理パラメタリゼーション

Kessler(1969) のパラメタリゼーションでは 4 つのカテゴリーを想定し, 微物理素過程として以下を考慮する. ただし, これらの量は全て正の値として定義され, 水蒸気が直接雨水に凝結する過程は無視されている.

記号	内容
CN_{vc}	凝結による水蒸気から雲水への変換 (condensation)
EV_{cv}	蒸発による雲水から水蒸気への変換 (evaporation)
EV_{rv}	蒸発による雨水から水蒸気への変換 (evaporation)
CN_{cr}	併合成長による雲水から雨水への変換. 併合や水蒸気拡散により, 雲粒子が雨粒の大きさにまで成長する (autocondensation)
CL_{cr}	衝突併合による雲水から雨水への変換. 大水滴が小水滴を衝突併合する (collection)
PR_r	雨水の重力落下に伴う雨水混合比の変化率 (precipitation)

この微物理素過程を用いると, 生成項, 落下項, 凝結加熱項は以下のように表される.

$$
\begin{aligned}
M_{src}(\rho'_v) &= -\overline{\rho}(CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}), & (1.29)\\
M_{src}(\rho'_c) &= \overline{\rho}(CN_{vc} - EV_{cv} - CN_{cr} - CL_{cr}), & (1.30)\\
M_{src}(\rho'_r) &= \overline{\rho}(CN_{cr} + CL_{cr} - EV_{cv}), & (1.31)\\
M_{fall}(\rho'_v) &= 0, & (1.32)
\end{aligned}
$$

[2]現在, 本モデルで用意されている Tobie et al.(2003) のパラメタリゼーションは火星大気計算でのみ使用可能である.

$$
\begin{aligned}
M_{fall}(\rho_c') &= 0, & (1.33)\\
M_{fall}(\rho_r') &= PR_r, & (1.34)\\
Q_{cond} &= -\frac{L_v}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle_0} M_{src}(\rho_v'). & (1.35)
\end{aligned}
$$

(1.27), (1.28) を書き直すと, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \theta'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial \theta'}{\partial x} - v'\frac{\partial \theta'}{\partial y} - w'\frac{\partial \theta'}{\partial z} - w'\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} + \frac{L_v}{\langle c_p\rangle_0 \overline{\Pi}}(CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}) \\
&\quad + \frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{rad} + Q_{dis}) + D_{\bar{\theta}} + D_{\theta'} & (1.36)\\
\frac{\partial q_v'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_v'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_v'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_v'}{\partial z} - w'\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial z} - \frac{\overline{q_v}}{\overline{\rho}}\sum PR_r \\
&\quad - (CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}) + D_{\overline{q_v}} + D_{q_v'}, & (1.37)\\
\frac{\partial q_c'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_c'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_c'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_c'}{\partial z} - \frac{\overline{q_c}}{\overline{\rho}}\sum PR_r \\
&\quad + CN_{vc} - EV_{cv} - CN_{cr} - CL_{cr} + D_{q_c'}, & (1.38)\\
\frac{\partial q_r'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_r'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_r'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_r'}{\partial z} + \frac{1}{\overline{\rho}} PR_r + CN_{cr} + CL_{cr} - EV_{rv} + D_{q_r'} & (1.39)
\end{aligned}
$$

ここで, L_v は水の蒸発の潜熱 [J kg^{-1}], $\langle c_p\rangle$ は定圧比熱 [J K kg^{-1}] である.

微物理素過程は以下のように定式化する.

水蒸気と雲水の間の変換: $-CN_{vc} + EV_{cv}$

雲水は粒が小さく, 水蒸気との間で瞬間的に飽和調節が起こるものとする. すなわち, 移流などの項を計算した後の温度と水蒸気量が過飽和状態となっている場合には, ちょうど飽和になる量の水蒸気を凝結させる. 一方, 移流などの項を計算した後に, 雲水が存在するにも拘わらず未飽和になっている場所では, ちょうど飽和になる量の雲水を蒸発させる.

雲水の併合成長: CN_{cr}

Kessler (1969) に従って, 以下のように与える.

$$
CN_{cr} = (q_c' - q_{c0})/\tau_{ac} \tag{1.40}
$$

ただし, q_{c0}, τ_{ac} は併合成長に関する閾値, 時間スケールであり, それぞれ 0, 100 [s] とする.

雲水の衝突併合: CL_{cr}

Kessler (1969) に従って, 以下で定式化する.

$$
CL_{cr} = 10.344 g^{1/2}\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_w}\right)^{0.375} q_c' {q_r'}^{0.875} \tag{1.41}
$$

雨水の蒸発: EV_{rv}

Kessler (1969) に従って, 以下で定式化する.

$$EV_{rv} = 4.85 \times 10^{-2} \left(q_{vsw} - q'_v\right) \left(\bar{\rho} q'_r\right)^{0.65} \tag{1.42}$$

ただし q_{vsw} は飽和比湿を表す.

雨水のフラックス: PR_r

雨水の重力落下による混合比の変化率は,

$$PR_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho} q'_r V_{term}\right). \tag{1.43}$$

であり, 雨水の終端落下速度 V_{term} [m s^{-1}] は

$$V_{term} = 0.3224 g^{1/2} \left(\frac{\rho_w}{\overline{\rho}}\right)^{0.375} {q'_r}^{0.125} \tag{1.44}$$

で与える. ただし ρ_w は液相の密度である.

各々の微物理過程の導出については, 付録 C を参照されたい.

1.3.2 Tobie et al.(2003) の雲微物理パラメタリゼーション

Tobie et al.(2003) は火星大気での CO_2 の雲物理の定式化について述べている. Tobie et al.(2003) では雲水を除く 3 つのカテゴリーを考える ($q_c = 0$). 雲粒は拡散成長のみによって成長すると仮定し, 雲粒の併合成長は考慮しない. 微物理過程として以下を考慮する.

記号	内容
CN_{vr}	凝結による水蒸気から氷への変換 (condensation)
PR_r	氷粒の重力落下に伴う氷比湿の変化率 (precipitation)

この微物理素過程を用いると, 生成項, 落下項, 凝結加熱項は以下のように表される.

$$\begin{aligned}
M_{src}(\rho'_v) &= -\overline{\rho} CN_{vr}, & (1.45)\\
M_{src}(\rho'_r) &= \overline{\rho} CN_{vr}, & (1.46)\\
M_{fall}(\rho'_v) &= 0, & (1.47)\\
M_{fall}(\rho'_r) &= PR_r, & (1.48)\\
Q_{cond} &= -\frac{L_s}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle_0} M_{src}(\rho'_v). & (1.49)
\end{aligned}$$

(1.27), (1.28) を書き直すと, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \theta'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial \theta'}{\partial x} - v'\frac{\partial \theta'}{\partial y} - w'\frac{\partial \theta'}{\partial z} - w'\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{L_s}{\langle c_p \rangle_0 \overline{\Pi}} CN_{vr} \\
&\quad + \frac{1}{\overline{\Pi}}\left(Q_{rad} + Q_{dis}\right) + D_{\bar{\theta}} + D_{\theta'} \qquad (1.50) \\
\frac{\partial q_v'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_v'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_v'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_v'}{\partial z} - w'\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial z} - \frac{\overline{q_v}}{\overline{\rho}} \sum PR_r(\rho_r') \\
&\quad - CN_{vr} + D_{\overline{q_v}} + D_{q_v'}, \qquad (1.51) \\
\frac{\partial q_r'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_r'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_r'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_r'}{\partial z} + \frac{1}{\overline{\rho}} PR_r - CN_{vr} + D_{q_r'}. \qquad (1.52)
\end{aligned}
$$

ここで L_s は CO_2 の昇華の潜熱 [J K^{-1} kg^{-1}] である.

以下, CN_{vr} の取り扱いについて述べる. 本モデルでは単位質量の気相に含まれる凝結核の個数及び半径は空間的・時間的に一様と仮定する. また雲粒の半径は各格子内において空間的に一定であると仮定する. 更に雲粒は球形の凝結核を核として形成され, 雲粒自身も球形となると仮定する. このとき

$$\frac{4}{3}\rho_I \pi (r_d^3 - r_{aero}^3) N = q_r' \overline{\rho} \qquad (1.53)$$

という関係式が成り立つ. ここで ρ_I は CO_2 氷の密度, r_d は雲粒半径, r_{aero} は凝結核の半径, N は単位体積当たりの凝結核の数密度である. 本モデルでは $\rho_I = 1.565 \times 10^3$ [kg/m^3] と与え, r_{aero}, N は実験に応じて与える. 雲粒の雲粒が拡散によって成長する場合の単位時間単位体積当たりの凝結量 CN_{vr} は以下のように表される.

$$CN_{vr} = \frac{4\pi r_d N}{\overline{\rho}(R_h + R_m)}(S - 1). \qquad (1.54)$$

ここで R_h, R_m, S はそれぞれ熱輸送に関する定数, 質量輸送に関する定数, 飽和比であり

$$
\begin{aligned}
R_h &= \frac{L_s^2}{kR_v T^2} = \frac{L_s^2}{kR_v \theta^2 \Pi^2}, \qquad (1.55) \\
R_m &= \frac{R_v T}{D p_*} = \frac{R_v \theta \Pi}{D p_*}, \qquad (1.56) \\
S &= \frac{p}{p_*} = \frac{p_0{}^{\frac{c_p}{R}} \Pi}{p_*} \qquad (1.57)
\end{aligned}
$$

と表される. 但し k, D, p_* はそれぞれ熱拡散係数, 分子拡散係数, CO_2 の飽和蒸気圧である. 本モデルでは Tobie et al. (2003) 同様に主成分凝結系では $R_h \gg R_m$ として

$$CN_{vr} = \frac{4\pi r_d N}{R_h}(S - 1). \qquad (1.58)$$

と表す. CO_2 の飽和蒸気圧については半経験式である Antoine の式

$$p_* = \exp\left(A - \frac{B}{T - C}\right) \tag{1.59}$$

を用いて定める (Antoine, 1888). ここで A, B, C は実験により定まる係数であり, CO_2 の場合 $A = 27.4$, $B = 3103$, $C = -0.16$ である (化学工学会, 1999). 火星大気環境における凝結を想定すると $O(T) \sim 150$[K] であるので, $T \gg C$ と近似して

$$p_* \approx \exp\left(A - \frac{B}{T}\right) \tag{1.60}$$

とする.

以下, 単位時間体積当たりの雲粒落下量 PR_r の取り扱いについて述べる. Tobie et al.(2003) では雲粒落下を無視しているが, 本パラメタリゼーションでは考慮する. PR_r は Kessler(1969) と同様に, 雲粒の終端速度 V_{term} での移流として表現する. 即ち

$$PR_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_r V_{term}\right) \tag{1.61}$$

と表す. 終端速度 V_{term} については球形粒子に関する Stokes 則を適用して

$$V_{term} = C_{sc}\frac{2r_d^2 g\rho_I}{9\eta} \tag{1.62}$$

と表す. ここで C_{sc} は微小な粒子における Stokes 則からのずれを補正する係数 (Cunningham 補正係数) であり,

$$C_{sc} = 1 + 1.255\frac{\lambda}{r_d} \tag{1.63}$$

と表される (Cunningham, 1910). λ は CO_2 の平均自由行程であり,

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p_{CO_2}} \tag{1.64}$$

と表される. k_B は Boltzmann 定数, σ は CO_2 分子の直径, p_{CO_2} は CO_2 の分圧であり, $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ [$\mathrm{m^2\ kg\ s^{-2}\ K^{-1}}$], $\sigma = 3.3 \times 10^{-10}$ [m] である (Golden and Sircar, 1994). η は粘性係数であり, Sutherland の公式

$$\eta = \eta_{ref}\left(\frac{T_{ref} + C_{CO_2}}{T + C_{CO_2}}\right)\left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{3/2} \tag{1.65}$$

で表現する (Sutherland, 1893). η_{ref}, T_{ref}, C_{CO_2} はそれぞれ粘性係数の基準値, 温度の基準値, CO_2 に関する Sutherland 定数であり, $\eta_{ref} = 1.47 \times 10^{-5}$ [Pa · s], $T_{ref} = 293$ [K], $C_{CO_2} = 240$ [K] と与える (理科年表, 2004).

1.4 放射加熱項の表現

放射加熱項 Q_{rad} は正味の上向き放射フラックス F_{net} を用いて以下のように表される.

$$Q_{rad} = -\frac{1}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle_0}\frac{dF_{net}}{dz}$$

本モデルでは F_{net} は陽に計算せず, Q_{rad} は高度のみに依存するパラメタとして与える.

1.5 乱流混合のパラメタリゼーション

1.5.1 運動方程式中の拡散項

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いることで粘性拡散項は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} D_{u_i} &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{(u'_i u'_j)} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[-K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{2}{3}\delta_{ij}E_{turb}\right] \end{aligned} \tag{1.66}$$

ここで K_m は運動量に対する乱流拡散係数であり, E_{turb} はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー

$$E_{turb} = \frac{1}{2}\overline{(u')^2+(v')^2+(w')^2} = \frac{{K_m}^2}{C_m^2 l^2} \tag{1.67}$$

である. Deardorff(1975) に従い, $C_m = 0.2$ とする.

1.5.2 熱力学の式の拡散項

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いて温位の粘性拡散項を表現する. 雲が存在しない場合,

$$\begin{aligned} D_\theta &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u'_j\theta'} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_h\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\right) \end{aligned} \tag{1.68}$$

と表し, 雲が存在する場合,

$$\begin{aligned} D_\theta &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j'\theta'} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(1+\sum\frac{L^2\overline{q_v}}{\langle c_p\rangle_0 R_v \overline{\Pi}^2\overline{\theta}^2}\right)^{-1} K_h\frac{\partial\theta_e}{\partial x_j}\right] \end{aligned} \tag{1.69}$$

と表す. ここで K_h は温位に対する乱流拡散係数, θ_e は相当温位である.

1.5.3 乱流運動エネルギーの式

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いて, 乱流エネルギーの時間発展方程式を表現する[3]. 雲が存在しない場合,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{turb}}{\partial t} &= -u\frac{\partial E_{turb}}{\partial x} - v\frac{\partial E_{turb}}{\partial y} - w\frac{\partial E_{turb}}{\partial z} \\ &\quad -3gC_m l E_{turb}^{1/2}\frac{K_h}{\overline{\theta}}\frac{\partial\theta}{\partial z} - 3gC_m l E_{turb}^{1/2}\frac{\sum\frac{R_v}{R_d}\frac{\partial q_v}{\partial z} - \sum\frac{\partial q_L}{\partial z}}{1+\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum\overline{q_L}} \\ &\quad +2C_m l E_{turb}^{1/2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\ &\quad +C_m l E_{turb}^{1/2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \\ &\quad -\frac{2}{3}E_{turb}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &\quad +\frac{\partial}{\partial x}\left(C_m l E_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(C_m l E_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial y}\right) \\ &\quad +\frac{\partial}{\partial z}\left(C_m l E_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\right) - \left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right)E_{turb}^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{1.70}$$

となる. また雲が存在する場合,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{turb}}{\partial t} &= -u\frac{\partial E_{turb}}{\partial x} - v\frac{\partial E_{turb}}{\partial y} - w\frac{\partial E_{turb}}{\partial z} \\ &\quad -3gC_m l E_{turb}^{1/2}\left(1+\sum\frac{L^2\overline{q_v}}{\langle c_p\rangle_0 R_v\overline{\theta}^2\overline{\Pi}^2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

[3] 乱流運動エネルギーの時間発展方程式の導出に関しては, 付録 B を参照されたい.

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{\overline{\theta}} + \frac{1}{R_d \overline{\Pi} \overline{\theta}^2}\left(1 + \sum \frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum \overline{q_L}\right)^{-1}\left(\sum L \overline{q_v}\right)\right]\frac{\partial \theta_e}{\partial z} \\
&+3gC_m l E_{turb}^{1/2}\left(1 + \sum \frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum \overline{q_L}\right)^{-1}\frac{\partial \left(\sum q_L\right)}{\partial z} \\
&+2C_m l E_{turb}^{1/2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&+C_m l E_{turb}^{1/2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&-\frac{2}{3}E_{turb}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(C_m l E_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(C_m l E_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial y}\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left(C_m l E_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\right) - \left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right)E_{turb}^{\frac{3}{2}}. \qquad (1.71)
\end{aligned}
$$

となる．ここで $C_m = 0.2$, 混合距離 $l = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ とする．ただし $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ は格子間隔である.

1.5.4　散逸加熱項の表現

散逸加熱項 Q_{dis} は, 乱流運動エネルギーの散逸項をもとに, 以下のように与える.

$$
Q_{dis} = \frac{1}{\langle c_p \rangle_0}\frac{C_\varepsilon}{l}\frac{K_m^3}{(C_m l)^3}. \qquad (1.72)
$$

ここで $C_\varepsilon = 0.2$, $l = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ である.

第2章 参考文献

Antoine, C., 1888: Tensions des vapeurs: nouvelle relation entre les tensions et les températures. Les Comptes Rendus de l′ Acadèmie des Sciences, **107**, 681 – 684

浅井 富雄, 1983: 大気対流の科学, 気象学のプロムナード 14, 東京堂出版.

Browning, K. A., 1964: Airflow and percipitation within severe local storms which travel to the right of the winds. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 634-639

Cunningham, E., 1910: On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, **83**, 357 – 365

Curic, M., Janc, D., Vujovic, D., Vuckovic, V., 2003: The effects for a river valley on an isolated cumulonimbus cloud development. *Atmos. Res.*, **66**, 123-139.

Das, P., 1969: The thermodynamic equation in cumulus dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **26**, 399-409.

Deardorff, J. W., 1975: The development of boundary-layer turbulence models for use in studying the severe storm environment. *Proc. SESAME Meeting*, Boulder, NOAA-ERL, 251-261.

Golden, T. C., Sircar, S., 1994: Gas adsorption on silicate. Journal of Colloid and Interface Science, **162**, 182 – 188

Houze, R. A., 1993: Cloud dynamics. Academic Press.

化学工学会編, 1999: 化学工学便覧, 丸善, 1339 pp

Kessler, E., 1969: On the Distribution and Continuity of Water Substance in Atmospheric Circuration. Meteor. Monogr., *Amer. Meteor.Soc.*, **32**, 84 pp.

Kinzer, G. D., Gunn, R., 1951: The evaporation, temperarute and thermal relaxation-time of freely falling waterdrops. *J. Meteor.*, **8**, 71 – 83.

Klemp J. B. and Robert B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070-1096.

Landau, L. D., E. M. Lifshitz, 1987: Fluid Mechanics 2nd edition, Butterworth Heinemann, 539 pp.

Marshall, J. and W. Palmer, 1948: The distribution of raindrops with size. *J. Meteorol.*, **5**, 165–166.

Mellor, G. L., 1973: Analytic prediction of the properties of stratified planetary surface layers. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 1061-1069.

Mellor, G., and T. Yamada, 1974: A hierarchy of turbulence closure models for atmospheric boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1791-1806.

中野満寿男, 2003: 鉛直シアーが台風初期渦形成に及ぼす影響. 九州大学大学院理学府 地球惑星科学専攻 修士論文.

Ogura, Y. and M. Yoshizaki, 1988: Numerical study of orographic-convective precipitation over the eastern Arabic Sea and the Ghats Mountains during the summer monsoon. *J. Atoms. Sci.*, **45**, 2097-2122.

Ogura, Y., and T. Takahashi, 1971: Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell. *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 895-911.

大宮司久明, 三宅裕, 吉澤徴, 1998: 乱流の数値流体力学—モデルと計算法. 東京大学出版会, 652.

斉藤和雄 編, 1999: 非静力学モデル. 気象研究ノート 第 196 号, 日本気象学会.

Satoh, M., 2004: Atmospheric circulation dynamics and general circulation models. Springer, 643 pp.

Saunders, P. M., 1957: The thermodynamics of saturated air: A contribution to the classical theory. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **83**, 342-350.

Schemm, C. E., and F. Lipps, 1976: Some results from a simplified three-dimensional numerical model of atmospheric turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1021-1041.

Skamarock, W. C. and J. B. Klemp, 1992: The stability of time-split methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equation. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109-2127.

Soong, S-T., and Y. Ogura, 1973: A comparison between axi-symmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893

Sutherland, W., 1893: The viscosity of gases and molecular force. Philosophical Magazine, S. 5, **36**, 507 – 531

Tapp, M. C., and P. W. White, 1976: A nonhydrostatic mesoscale model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **102**, 277-296.

Tobie, G., Forget, F., Lott, F., 2003: Numerical simulation of winter polar wave clouds observed by Mars Global Surveyor Mars Orbiter Laser Altimeter. Icarus, **164**, 33 – 49

坪木和久, 榊原篤志, 2001: CReSS ユーザーズガイド 第 2 版. http://www.tokyo.rist.or.jp/CReSS_Fujin/CReSS.top.html

Wilhelmson, R. B., 1977: On the thermodyanmics equation for deep convection. *Mon. Wea. Rev.*, **105**, 545-547.

Wilhelmson, R. B., and Y. Ogura, 1972: The pressure perturbation and the numerical modeling of a cloud. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1295-1307.

付 録A　準圧縮方程式系の導出

A.1　温位 θ, エクスナー関数 Π, 風速 u, v, w を予報変数とする場合の方程式系

地球大気における湿潤対流の定式化同様, 大気の乾燥成分と湿潤成分の分子量の差を密度の式には考慮するが, 熱の式には考慮しないような系を考える. また気体は理想気体みなせるものとする. このような系では温位 θ が非凝結時の保存量として使える.

A.1.1　元となる方程式系

3 次元大気の状態を気温 T, 圧力 p, 風速 u, v, w, 密度 ρ で表現する場合, 一般的な圧縮性流体の方程式系は以下のようになる.

運動方程式

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + D_u \tag{A.1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + D_v \tag{A.2}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + D_w \tag{A.3}$$

熱力学第一法則

$$\hat{c_p}\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = \hat{c_p}\left(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}\right) \tag{A.4}$$

状態方程式

$$p_d = \rho_d R_d T, \tag{A.5}$$

$$p_v = \rho_v R_v T. \tag{A.6}$$

密度の時間発展方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_d u_j) &= D_{\rho_d}, &\text{(A.7)}\\
\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_v u_j) &= M_{src}(\rho_v) + D_{\rho_v}, &\text{(A.8)}\\
\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_c u_j) &= M_{src}(\rho_c) + D_{\rho_c}, &\text{(A.9)}\\
\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_r u_j) &= M_{src}(\rho_r) + M_{fall}(\rho_r) + D_{\rho_r} &\text{(A.10)}
\end{aligned}
$$

ここで $\hat{c_p}$ は凝結物も含んだ単位質量の気塊の定圧比熱, Q は非断熱加熱による温度変化率, q_v は凝結性気体の比湿, q_c は雲水比湿, q_r は雨水比湿である．q_v, q_r, q_c は, 凝結成分の数だけ存在する．D_*, M_{src}, M_{fall} はそれぞれ乱流拡散項, 生成消滅項, 落下項を意味する．以下では, 温位 θ, エクスナー関数 Π, 風速 u, v, w を予報変数とする場合の基礎方程式系を導出する.

A.1.2　密度の時間発展方程式の書き換え – 比湿の時間発展方程式の導出 –

$D_{\rho_d} + \sum D_{\rho_v} + \sum D_{\rho_c} + \sum D_{\rho_r} = 0$ となると仮定して (A.7) – (A.10) の和をとると,

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = \sum M_{fall}(\rho_r) \tag{A.11}
$$

が得られる．但し $M_{src}(\rho_v) + M_{src}(\rho_c) + M_{src}(\rho_r) = 0$ となることを用いた．(A.7) – (A.10) 及び (A.11) より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_d}{\rho}\right) &= -\frac{\rho_d}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho_d}{\partial t}\\
&= -\frac{\rho_d}{\rho^2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) + \sum M_{fall}(\rho_r)\right] + \frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_d u_j) + D_{\rho_d}\right]\\
&= -u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho_d}{\rho}\right) - \frac{\rho_d}{\rho^2}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}D_{\rho_d}, &\text{(A.12)}\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\right) &= -\frac{\rho_v}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\\
&= -\frac{\rho_v}{\rho^2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) + \sum M_{fall}(\rho_r)\right]\\
&\quad + \frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_v u_j) + M_{src}(\rho_v) + D_{\rho_v}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\right) - \frac{\rho_v}{\rho^2}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_v) + \frac{1}{\rho}D_{\rho_v}, \qquad \text{(A.13)}\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_c}{\rho}\right) &= -\frac{\rho_c}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho_c}{\partial t}\\
&= -\frac{\rho_c}{\rho^2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) + \sum M_{fall}(\rho_r)\right]\\
&\quad +\frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_c u_j) + M_{src}(\rho_c) + D_{\rho_c}\right]\\
&= -u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho_c}{\rho}\right) - \frac{\rho_c}{\rho^2}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_c) + \frac{1}{\rho}D_{\rho_c}, \qquad \text{(A.14)}\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_r}{\rho}\right) &= -\frac{\rho_r}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho_r}{\partial t}\\
&= -\frac{\rho_r}{\rho^2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) + \sum M_{fall}(\rho_r)\right]\\
&\quad +\frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_r u_j) + M_{src}(\rho_r) + M_{fall}(\rho_r) + D_{\rho_r}\right]\\
&= -u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho_r}{\rho}\right) - \frac{\rho_r}{\rho^2}\sum M_{fall} + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}D_{\rho_r}. \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}
$$

(A.12) – (A.15) を比湿で表現すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{dq_d}{dt} &= -\frac{q_d}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}D_{\rho_d}, \qquad \text{(A.16)}\\
\frac{dq_v}{dt} &= -\frac{q_v}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_v) + \frac{1}{\rho}D_{\rho_v}, \qquad \text{(A.17)}\\
\frac{dq_c}{dt} &= -\frac{q_c}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_c) + \frac{1}{\rho}D_{\rho_c}, \qquad \text{(A.18)}\\
\frac{dq_r}{dt} &= -\frac{q_r}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}D_{\rho_r}. \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

となる. 但し, $q_d + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r = 1$ の関係が成り立つので, q_d については時間発展方程式を解かずに, 診断的に求めることとする.

A.1.3　熱の式の導出

A.1.3 節では, Satoh(2004) に従い, Clausius-Clapeyron の式, 各カテゴリーの比エンタルピーと比内部エネルギーの導出, 比内部エネルギーの時間発展方程式の導出を行なう. 更にそれらの結果を用いて, 熱の式の導出を行なう. A.1.3 節において

は, 雨粒または氷粒の存在を無視する. 凝結性気体と凝結物は相平衡状態にあるとする. また各気体と凝結物の定圧比熱の温度・圧力依存性を無視する. 凝結性気体は非凝結性気体に比べて圧倒的に多いか, 或いは圧倒的に少ないものとする.

Clausius-Clapeyron の式の導出

各カテゴリーの比エンタルピー, 比内部エネルギー, 比エントロピー, 比容, 化学ポテンシャルをそれぞれ H_i, U_i, S_i, v_i, μ_i とする. また飽和蒸気圧を p^* と表すことにする. 相平衡状態が実現されているとき,

$$\mu_c(p^*, T) = \mu_v(p^*, T), \quad \text{(A.20)}$$

$$\mu_c(p^* + dp^*, T + dT) = \mu_v(p^* + dp^*, T + dT), \quad \text{(A.21)}$$

が成り立つ. (A.20), (A.21) の差をとると,

$$\mu_c(p^* + dp^*, T + dT) - \mu_c(p^*, T) = \mu_v(p^* + dp^*, T + dT) - \mu_v(p^*, T) \quad \text{(A.22)}$$

となる. $\mu_v(p^* + dp^*, T + dT)$ 及び $\mu_c(p^* + dp^*, T + dT)$ に関する (p^*, T) 近傍での 1 次の Taylor 展開を考えると,

$$\mu_c(p^* + dp^*, T + dT) \simeq \mu_c(p^*, T) + \left(\frac{\partial \mu_c}{\partial p^*}\right)_T dp^* + \left(\frac{\partial \mu_c}{\partial T}\right)_{p^*} dT,$$

$$\mu_c(p^* + dp^*, T + dT) \simeq \mu_v(p^*, T) + \left(\frac{\partial \mu_v}{\partial p^*}\right)_T dp^* + \left(\frac{\partial \mu_v}{\partial T}\right)_{p^*} dT \quad \text{(A.23)}$$

となる. (A.23), (A.23) を (A.22) に代入すると,

$$\left(\frac{\partial \mu_c}{\partial p^*}\right)_T dp^* + \left(\frac{\partial \mu_c}{\partial T}\right)_{p^*} dT = \left(\frac{\partial \mu_v}{\partial p^*}\right)_T dp^* + \left(\frac{\partial \mu_v}{\partial T}\right)_{p^*} dT \quad \text{(A.24)}$$

となる. ここで

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_p = -S_i, \quad \text{(A.25)}$$

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p}\right)_T = v_i, \quad \text{(A.26)}$$

となることに注意すると,

$$v_c dp^* - s_c dT = v_v dp^* - s_v dT,$$

すなわち

$$\frac{dp^*}{dT} = \frac{s_v - s_c}{v_v - v_c} \tag{A.27}$$

となる. 潜熱 L を

$$L \equiv T(s_v - s_c) \tag{A.28}$$

と定義すると,

$$\frac{dp^*}{dT} = \frac{L}{T(v_v - v_c)} \tag{A.29}$$

となる. ここで $v_v \gg v_c$ であることを用い, さらに理想気体の状態方程式を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{dp^*}{dT} &\simeq \frac{L}{Tv_v} \\ &= \frac{Lp^*}{R_v T^2} \end{aligned} \tag{A.30}$$

となり, Clausius-Clapeyron の式が得られる.

比エンタルピーの導出

定圧比熱の定義

$$c_{pi} = T\left(\frac{\partial S_i}{\partial T}\right)_p \tag{A.31}$$

及び Maxwell の関係式

$$-\left(\frac{\partial S_i}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial v_i}{\partial T}\right)_p \tag{A.32}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} c_{pi}(p,T) &= c_{pi}(p_0,T) + \int_{p_0}^{p}\left(\frac{\partial c_{pi}}{\partial p'}\right)_T dp' \\ &= c_{pi}(p_0,T) + \int_{p_0}^{p}\left\{\frac{\partial}{\partial p'}\left[T\left(\frac{\partial S_i}{\partial T}\right)_{p'}\right]_T\right\} dp' \\ &= c_{pi}(p_0,T) + T\int_{p_0}^{p}\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S_i}{\partial p'}\right)_T\right]_{p'} dp' \\ &= c_{pi}(p_0,T) - T\int_{p_0}^{p}\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial T^2}\right)_{p'} dp' \end{aligned} \tag{A.33}$$

となる．但し p_0 は圧力の基準値である．特に理想気体の場合, 状態方程式より $(\partial^2 v_i/\partial T^2)_p = 0$ となるので,

$$c_{pi}(p,T) \;\; = \;\; c_{pi}(p_0,T) \tag{A.34}$$

となる. (A.34) より理想気体の比熱は圧力に依存しないことが分かる.

エンタルピーに関して

$$\begin{aligned} dH_i &= TdS_i + v_i dp + \mu_i dq_i \\ &= T\left[\left(\frac{\partial S_i}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S_i}{\partial p}\right)_T dp\right] + v_i dp + \mu_i dq_i \\ &= T\left(\frac{\partial S_i}{\partial T}\right)_p dT + \left[T\left(\frac{\partial S_i}{\partial p}\right)_T dp + v_i\right] dp + \mu_i dq_i \end{aligned} \tag{A.35}$$

より

$$\left(\frac{\partial H_i}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial S_i}{\partial T}\right)_p, \tag{A.36}$$

$$\left(\frac{\partial H_i}{\partial p}\right)_T = T\left(\frac{\partial S_i}{\partial p}\right)_T dp + v_i \tag{A.37}$$

が成り立つ. T_0 を温度の基準値とすると, (A.31), (A.32), (A.36), (A.37) より

$$\begin{aligned} H_i(p,T) &= H_i(p_0,T_0) + \int_{T_0}^{T}\left(\frac{\partial H_i}{\partial T'}\right)_{p_0} dT' + \int_{p_0}^{p}\left(\frac{\partial H_i}{\partial p'}\right)_T dp' \\ &= H_i(p_0,T_0) + \int_{T_0}^{T} T'\left(\frac{\partial S_i}{\partial T'}\right)_{p_0} dT' + \int_{p_0}^{p}\left[T\left(\frac{\partial S_i}{\partial p'}\right)_T + v_i\right] dp' \\ &= H_i(p_0,T_0) + \int_{T_0}^{T} c_{pi}(p_0,T')dT' + \int_{p_0}^{p}\left[-T\left(\frac{\partial v_i}{\partial T}\right)_{p'} + v_i\right] dp' \\ &= H_i(p_0,T_0) + \int_{T_0}^{T} c_{pi}(p_0,T')dT' - T^2\int_{p_0}^{p}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial T}\right)_{p'} - \frac{v_i}{T^2}\right] dp' \\ &= H_i(p_0,T_0) + \int_{T_0}^{T} c_{pi}(p_0,T')dT' - T^2\int_{p_0}^{p}\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{v_i(p',T)}{T}\right]_{p'}\right\} dp' \end{aligned} \tag{A.38}$$

となる. 特に理想気体の場合, 状態方程式より $\partial(v_i/T)_p/\partial T = 0$ となるので,

$$H_i(p,T) \;\; = \;\; H_i(p_0,T_0) + \int_{T_0}^{T} c_{pi}(p_0,T')dT' \tag{A.39}$$

となる.

以下, 相平衡時における H_c と H_v の関係式を求める. H_c はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
H_c(p,T) &= \mu_c(p,T) + TS_c(p,T), && \text{(A.40)}\\
H_v(p,T) &= \mu_v(p,T) + TS_v(p,T) && \text{(A.41)}
\end{aligned}
$$

と表される. (A.40), (A.41) の差をとると,

$$
H_c(p,T) - H_v(p,T) = \mu_c(p,T) - \mu_v(p,T) + T\left[S_c(p,T) - S_v(p,T)\right] \quad \text{(A.42)}
$$

となる. (A.42) に

$$
S_i(p,T) = -\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_p \quad \text{(A.43)}
$$

を用いると,

$$
H_c(p,T) - H_v(p,T) = \mu_c(p,T) - \mu_v(p,T) - T\frac{\partial}{\partial T}\left[\mu_c(p,T) - \mu_v(p,T)\right]_p \quad \text{(A.44)}
$$

となる. (A.25) において $i = v, c$ とし, p^* から p まで積分すると,

$$
\begin{aligned}
\mu_c(p,T) &= \mu_c(p^*,T) + \int_{p^*}^{p} v_c(p',T)dp', && \text{(A.45)}\\
\mu_v(p,T) &= \mu_v(p^*,T) + \int_{p^*}^{p} v_v(p',T)dp' && \text{(A.46)}
\end{aligned}
$$

となる. (A.45), (A.46) の差をとり, $\mu_c(p^*,T) = \mu_v(p^*,T)$ となることを用いると,

$$
\mu_c(p,T) - \mu_v(p,T) = -\int_{p^*}^{p}\left[v_v(p',T) - v_c(p',T)\right]dp' \quad \text{(A.47)}
$$

となる. (A.47) を (A.44) に代入し, μ_v, μ_c を消去すると,

$$
\begin{aligned}
H_c(p,T) - H_v(p,T) &= -\int_{p^*}^{p}\left[v_v(p',T) - v_c(p',T)\right]dp' \\
&\quad + T\frac{\partial}{\partial T}\left[\int_{p^*}^{p}\left[v_v(p',T) - v_c(p',T)\right]dp'\right]_p \\
&\simeq -\int_{p^*}^{p} v_v(p',T)dp' + T\frac{\partial}{\partial T}\left[\int_{p^*}^{p} v_v(p',T)dp'\right]_p \\
&= -\int_{p^*}^{p} v_v(p',T)dp' + T\int_{p^*}^{p}\frac{\partial v_v(p',T)}{\partial T}dp' - T\frac{dp^*}{dT}v_v(p^*,T) \\
&= -\int_{p^*}^{p} v_v(p',T)dp' + \int_{p^*}^{p} v_v(p',T)dp' - L(T) \\
&= -L(T) && \text{(A.48)}
\end{aligned}
$$

が得られる.

さらに相平衡時における c_{pc} と c_{pv} の関係式を求める．(A.31) に (A.39), (A.40), (A.43), (A.48) を適用すると，

$$
\begin{aligned}
c_{pc}(p,T) &= T\left(\frac{\partial S_c}{\partial T}\right)_p \\
&= T\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{H_c(p,T)-\mu_c(p,T)}{T}\right]\right\}_p \\
&= T\left[-\frac{S_c}{T}+\frac{1}{T}\left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)_p+\frac{1}{T}\left(\frac{\partial \mu_c}{\partial T}\right)_p\right] \\
&= \left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)_p \\
&= \frac{\partial}{\partial T}\left[H_v(p,T)-L(T)\right]_p \\
&= \frac{\partial}{\partial T}\left[H_v(p_0,T_0)+\int_{T_0}^{T} c_{pv}(p_0,T')dT'-L(T)\right] \\
&= c_{pv}(p_0,T)-\frac{dL}{dT} \qquad \text{(A.49)}
\end{aligned}
$$

が得られる．特に定圧比熱が温度に依存しない場合, (A.49) を T について積分することにより，

$$
\begin{aligned}
L(T) &= L(T_0)+(c_{pv}-c_{pc})(T-T_0) \\
&= L_{00}+(c_{pv}-c_{pc})T \qquad \text{(A.50)}
\end{aligned}
$$

が得られる．但し

$$
L_{00} = L(T_0)-(c_{pv}-c_{pc})T_0 \qquad \text{(A.51)}
$$

である．

(A.39), (A.48), (A.49), (A.50) を用いて定圧比熱が温度に依存しない場合の比エンタルピーを求めると，

$$
\begin{aligned}
H_d(p,T) &= H_d(p_0,T_0)+\int_{T_0}^{T} c_{pd}(p_0,T_0)dT' \\
&= H_d(p_0,T_0)+c_{pd}(T-T_0) \\
&= c_{pd}T, \qquad \text{(A.52)} \\
H_c(p,T) &= H_v(p,T)-L(T) \\
&= H_v(p_0,T_0)+\int_{T_0}^{T} c_{pv}(p_0,T')dT'-L(T) \\
&= H_v(p_0,T_0)+\int_{T_0}^{T}\left[c_{pc}(p_0,T')+\frac{dL}{dT'}\right]dT'-L(T)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= H_v(p_0, T_0) - L(T_0) + c_{pc}(T - T_0) \\
&= H_c(p_0, T_0) - c_{pc}T_0 + c_{pc}T \\
&= c_{pc}T && \text{(A.53)} \\
H_v(p, T) &= H_c(p, T) + L(T) \\
&= c_{pc}T + L_{00} + (c_{pv} - c_{pc})T \\
&= c_{pv}T + L_{00} && \text{(A.54)}
\end{aligned}
$$

となる.

比内部エネルギーの導出

エンタルピーの定義より

$$
U_i(p, T) = H_i(p, T) - pv_i(p, T) \quad \text{(A.55)}
$$

となる. 従って, 定圧比熱が温度に依存しない場合の比内部エネルギーを求めると, (A.52), (A.53), (A.54) より

$$
\begin{aligned}
U_d(p, T) &= H_d(p, T) - pv_d(p, T) \\
&= c_{pd}T - R_dT \\
&= c_{vd}T, && \text{(A.56)} \\
U_v(p, T) &= H_v(p, T) - pv_v(p, T) \\
&= c_{pv}T + L_{00} - R_vT \\
&= c_{vv}T + L_{00}, && \text{(A.57)} \\
U_c(p, T) &= U_v(p, T) + H_c(p, T) - H_v(p, T) - p(v_c - v_v) \\
&\simeq U_v(p, T) + H_c(p, T) - H_v(p, T) + pv_v \\
&= H_c(p, T) \\
&= c_{pc}T && \text{(A.58)}
\end{aligned}
$$

となる.

熱の式の導出

Satoh(2004) と Landau and Lifshitz(1987) を参考にして熱の式 (A.4) を導出する.

比内部エネルギー U の時間発展方程式は

$$\rho\frac{dU}{dt} + \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} + \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{therm} = -p\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \varepsilon \tag{A.59}$$

と表される．ここで F_i^{rad}, F_i^{therm}, ε はそれぞれ放射フラックス, 熱拡散フラックス, 消散率であり,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^{therm} &= H_d\boldsymbol{i}_d + \sum H_v\boldsymbol{i}_v - \kappa\nabla T \\
&= c_{pd}T\boldsymbol{i}_d + \sum\left(c_{pv}T + L_{00}\right)\boldsymbol{i}_v - \kappa\nabla T, \qquad (A.60)\\
\varepsilon &= \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)^2 + \zeta\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)^2 \qquad (A.61)
\end{aligned}$$

である．H_d, H_v はそれぞれ非凝結性気体と凝結性気体の比エンタルピー, $\boldsymbol{i}_d$, $\boldsymbol{i}_v$ はそれぞれ非凝結性気体と凝結性気体の拡散流束密度, κ は熱伝導率, η, ζ は第一粘性係数, 第二粘性係数である．L_{00} は潜熱 $L(T)$ の定数部分であり,

$$L_{00} = L(T) - (c_{pv} - c_{pc})T \tag{A.62}$$

である．U は比エンタルピー H を用いて

$$U = H - \frac{p}{\rho} \tag{A.63}$$

と表される．(A.63) を (A.59) に代入し, dH/dt について整理すると,

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{dH}{dt} + \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} - \frac{dp}{dt} + \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} + \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{therm} + p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \varepsilon \\
=\ &\rho\frac{dH}{dt} - p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{dp}{dt} + \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} + \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{therm} + p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \varepsilon \\
=\ &\rho\frac{dH}{dt} - \frac{dp}{dt} + \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} + \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{therm} - \varepsilon \\
=\ &0, \qquad (A.64)
\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dt} - \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} - \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{therm} + \varepsilon\right) \tag{A.65}$$

となる．比エンタルピーを各カテゴリーの比エンタルピーの和で表現すると

$$\begin{aligned}
H &= q_dH_d + \sum q_vH_v + \sum q_cH_c \\
&= q_dc_{pd}T + \sum q_v\left(c_{pv}T + L_{00}\right) + \sum q_cc_{pc}T \qquad (A.66)
\end{aligned}$$

となる．(A.66) のラグランジュ微分をとると,

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \left(q_dc_{pd} + \sum q_vc_{pv} + \sum q_cc_{pc}\right)\frac{dT}{dt} \\
&\quad + c_{pd}T\frac{dq_d}{dt} + \sum\left(c_{pv}T + L_{00}\right)\frac{dq_v}{dt} + \sum c_{pc}T\frac{dq_c}{dt} \\
&= \hat{c_p}\frac{dT}{dt} + c_{pd}T\frac{dq_d}{dt} + \sum\left(c_{pv}T + L_{00}\right)\frac{dq_v}{dt} + \sum c_{pc}T\frac{dq_c}{dt} \qquad (A.67)
\end{aligned}$$

となる. 但し

$$\hat{c_p} = q_d c_{pd} + \sum q_v c_{pv} + \sum q_c c_{pc} \tag{A.68}$$

と置いた. (A.65) を (A.67) に代入し, $\hat{c_p} dT/dt$ について整理すると,

$$\begin{aligned} \hat{c_p}\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dt} - \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} - \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{therm} + \varepsilon\right) \\ &\quad -c_{pd}T\frac{dq_d}{dt} - \sum\left(c_{pv}T + L_{00}\right)\frac{dq_v}{dt} - \sum c_{pc}T\frac{dq_c}{dt} \end{aligned} \tag{A.69}$$

雨粒又は氷粒の存在を無視する場合, 比湿の時間発展方程式は

$$\frac{dq_d}{dt} = \frac{1}{\rho}D_{\rho_d}, \tag{A.70}$$

$$\frac{dq_v}{dt} = \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_v) + \frac{1}{\rho}D_{\rho_v}, \tag{A.71}$$

$$\frac{dq_c}{dt} = -\frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_v) + \frac{1}{\rho}D_{\rho_c}, \tag{A.72}$$

と表される. D_{ρ_d}, D_{ρ_v}, D_{ρ_c} はそれぞれ

$$D_{\rho_d} = -\nabla\cdot\boldsymbol{i}_d, \tag{A.73}$$

$$D_{\rho_v} = -\nabla\cdot\boldsymbol{i}_v, \tag{A.74}$$

$$D_{\rho_c} = 0 \tag{A.75}$$

と表されるので, (A.70), (A.71), (A.72) は

$$\frac{dq_d}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{i}_d, \tag{A.76}$$

$$\frac{dq_v}{dt} = \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_v) - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{i}_v, \tag{A.77}$$

$$\frac{dq_c}{dt} = -\frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_v) \tag{A.78}$$

となる. (A.76), (A.77), (A.78) を (A.69) に代入すると,

$$\begin{aligned} \hat{c_p}\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dt} - \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} - \nabla\cdot\boldsymbol{F}^{therm} + \varepsilon\right) \\ &\quad +\frac{1}{\rho}c_{pd}T\nabla\cdot\boldsymbol{i}_d - \frac{1}{\rho}\sum\left(c_{pv}T + L_{00}\right)\left[M_{src}(\rho_v) - \nabla\cdot\boldsymbol{i}_v\right] \\ &\quad +\frac{1}{\rho}\sum c_{pc}TM_{src}(\rho_v) \end{aligned} \tag{A.79}$$

となる. $\boldsymbol{i}_d$, $\boldsymbol{i}_v$ に関して

$$\boldsymbol{i}_d + \sum\boldsymbol{i}_v = 0 \tag{A.80}$$

$$\boldsymbol{i}_v = -\rho D_v\left(\nabla q_v + \frac{k_T}{T}\nabla T + \frac{k_p}{p}\nabla p\right) \tag{A.81}$$

が成り立つ. 但し D_v, k_T, k_p はそれぞれ拡散係数, 熱拡散比, barodiffusion 係数である. $q_v \rightarrow 0$ 又は $q_v \rightarrow 1$ の極限において k_T, k_p はゼロに収束することが知られている. 即ち,

$$\boldsymbol{i}_v \simeq -\rho D_v \nabla q_v \tag{A.82}$$

となる. (A.60) 及び (A.82) を用いて, (A.79) から $\boldsymbol{F}^{therm}$, $\boldsymbol{i}_d$, $\boldsymbol{i}_v$ を消去すると,

$$\begin{aligned}
\hat{c_p}\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{F}^{therm} + \frac{\varepsilon}{\rho} \\
&\quad + \frac{1}{\rho}c_{pd}T\nabla\cdot\boldsymbol{i}_d + \frac{1}{\rho}\sum\left(c_{pv}T + L_{00}\right)\nabla\cdot\boldsymbol{i}_v \\
&\quad - \frac{1}{\rho}\sum\left[L_{00} + \left(c_{pv} - c_{pc}\right)T\right]M_{src}(\rho_v) \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} + \frac{\varepsilon}{\rho} \\
&\quad - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left[c_{pd}T\boldsymbol{i}_d + \sum\left(c_{pv}T + L_{00}\right)\boldsymbol{i}_v - \kappa\nabla T\right] \\
&\quad + \frac{1}{\rho}c_{pd}T\nabla\cdot\boldsymbol{i}_d + \frac{1}{\rho}\sum\left(c_{pv}T + L_{00}\right)\nabla\cdot\boldsymbol{i}_v \\
&\quad - \frac{1}{\rho}\sum LM_{src}(\rho_v) \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} + \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\kappa\nabla T) \\
&\quad - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{i}_d\cdot\nabla\left(c_{pd}T\right) - \frac{1}{\rho}\sum\boldsymbol{i}_v\cdot\nabla\left(c_{pv}T + L_{00}\right) - \frac{1}{\rho}\sum LM_{src}(\rho_v) \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} + \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\kappa\nabla T) \\
&\quad + \frac{1}{\rho}\sum\boldsymbol{i}_v\cdot\nabla\left(c_{pd}T\right) - \frac{1}{\rho}\sum\boldsymbol{i}_v\cdot\nabla\left(c_{pv}T\right) - \frac{1}{\rho}\sum LM_{src}(\rho_v) \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad} + \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\kappa\nabla T) \\
&\quad - \sum D_v\nabla q_v\cdot\nabla\left[(c_{pd} - c_{pv})T\right] - \frac{1}{\rho}\sum LM_{src}(\rho_v)
\end{aligned} \tag{A.83}$$

となる. ここで

$$\hat{c_p}Q_{rad} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{F}^{rad}, \tag{A.84}$$

$$\hat{c_p}Q_{dis} = \frac{\varepsilon}{\rho}, \tag{A.85}$$

$$\hat{c_p}Q_{cond} = -\frac{1}{\rho}LM_{src}(\rho_v), \tag{A.86}$$

$$\hat{c_p}D_T = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\kappa\nabla T) - \sum D_v\nabla q_v\cdot\nabla\left[(c_{pd} - c_{pv})T\right] \tag{A.87}$$

と置くと,

$$\hat{c_p}\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = \hat{c_p}\left(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}\right) + \hat{c_p}D_T \tag{A.88}$$

が得られる.

A.1.4 状態方程式の書き換え

(A.5), (A.6) より

$$\begin{aligned} p &= p_d + \sum p_v \\ &= \left(\rho_d R_d + \sum \rho_v R_v\right) T \\ &= \left(\rho_d + \sum \rho_v\right) \frac{q_d R_d + \sum q_v R_v}{q_d + \sum q_v} T. \end{aligned} \tag{A.89}$$

ここで

$$\langle R \rangle \equiv \frac{q_d R_d + \sum q_v R_v}{q_d + \sum q_v} \tag{A.90}$$

$$\rho_g \equiv \rho_d + \sum \rho_v \tag{A.91}$$

と置くと,

$$p = \rho_g \langle R \rangle T \tag{A.92}$$

となる. 但し R_d, R_v はそれぞれ非凝結性ガスの気体定数, 凝結性ガスの気体定数である. $\langle R \rangle$ は気体定数の密度の重みつき平均であり, 本文書では平均気体定数と呼ぶことにする.

普遍気体定数を R_* として,

$$\langle M \rangle \equiv \frac{R_*}{\langle R \rangle} = \frac{q_d + \sum q_v}{q_d/M_d + \sum q_v/M_v} \tag{A.93}$$

と置く. 但し M_d, M_v はそれぞれ非凝結性ガスの分子量, 凝結性ガスの分子量を表す. また $\langle M \rangle$ を平均分子量と呼ぶことにする. 本モデルでは $\langle R \rangle$, $\langle M \rangle$ を一定値とみなし, 以降 $\langle R \rangle_0$, $\langle M \rangle_0$ と書くことにする. ここで

$$T_v \equiv \left(\frac{\langle M \rangle_0}{M_d} q_d + \sum \frac{\langle M \rangle_0}{M_v} q_v\right) T \tag{A.94}$$

を導入すると,

$$
\begin{aligned}
p &= \rho_g \langle R \rangle T \\
&\simeq \rho_g \langle R \rangle_0 T \\
&= \rho \langle R \rangle_0 \frac{\rho_g \langle R \rangle_0}{\rho \langle R \rangle_0} T \\
&= \rho \langle R \rangle_0 \frac{\rho_d R_d + \sum \rho_v R_v}{\rho \langle R \rangle_0} T \\
&= \rho \langle R \rangle_0 \left(\frac{\langle M \rangle_0}{M_d} q_d + \sum \frac{\langle M \rangle_0}{M_v} q_v \right) T \\
&= \rho \langle R \rangle_0 T_v
\end{aligned} \tag{A.95}
$$

と近似される[1]. 更に温位

$$
\theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\langle R \rangle_0}{\langle c_p \rangle_0}} \tag{A.96}
$$

及びエクスナー関数

$$
\Pi \equiv \frac{T}{\theta} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\langle R \rangle_0}{\langle c_p \rangle_0}} \tag{A.97}
$$

並びに

$$
\theta_v \equiv \frac{T_v}{\Pi} = \left(\frac{\langle M \rangle_0}{M_d} q_d + \sum \frac{\langle M \rangle_0}{M_v} q_v \right) \theta \tag{A.98}
$$

を導入すると,

$$
p = \rho \langle R \rangle_0 \Pi \theta_v \tag{A.99}
$$

となる. ここで

$$
\langle c_p \rangle = \frac{q_d c_{pd} + \sum q_v c_{pv}}{q_d + \sum q_v} \tag{A.100}
$$

であり, 本文書では $\langle c_p \rangle$ を平均定圧比熱と呼ぶことにする. c_{pd}, c_{pv} はそれぞれ非凝結性ガスの定圧比熱, 凝結性ガスの定圧比熱を表す. また本モデルでは $\langle c_p \rangle$ を一定値とみなし, $\langle c_p \rangle_0$ と表すことにする. (A.99) に (A.97) を代入して p を消去し, ρ について整理すると,

$$
\rho = \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v \rangle_0 / \langle R \rangle_0}}{\langle R \rangle_0 \theta_v} = \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v \rangle_0 / \langle R \rangle_0}}{\langle R \rangle_0 \left(q_d \langle M \rangle_0 / M_d + \sum q_v \langle M \rangle_0 / M_v \right) \theta} \tag{A.101}
$$

となる.

[1](A.95) で行なった近似の精度については現在調査中である.

A.1.5 熱力学第一法則の書き換え – 温位の式の導出 –

(A.4) において, 凝結物が気体に比べて十分少なく, $q_d c_{pd} \gg q_c c_{pc}$, $q_d c_{pv} \gg q_c c_{pc}$ が成り立つとすると, $\hat{c_p} \approx \langle c_p \rangle$ となるので,

$$\langle c_p \rangle \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \approx \langle c_p \rangle (Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) \tag{A.102}$$

と近似される. 平均定圧比熱を定数で近似すると,

$$\langle c_p \rangle_0 \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \approx \langle c_p \rangle_0 (Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) \tag{A.103}$$

となる. さらに凝結物は全密度に比べて十分小さいとみなすと,

$$\langle c_p \rangle_0 \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho_g}\frac{dp}{dt} \approx \langle c_p \rangle_0 (Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) \tag{A.104}$$

と近似される. θ のラグランジュ微分をとると,

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\langle R \rangle_0}{\langle c_p \rangle}} \frac{dT}{dt} - \frac{\langle R \rangle_0}{\langle c_p \rangle_0}\frac{T}{p}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\langle R \rangle_0}{\langle c_p \rangle}} \frac{dp}{dt} \\
&= \frac{\theta}{\langle c_p \rangle_0 T}\left(\langle c_p \rangle_0 \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho_g}\frac{dp}{dt}\right) \\
&= \frac{Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}}{\Pi}
\end{aligned} \tag{A.105}$$

となる. 但し式変形の途中で $p = \rho_g \langle R \rangle_0 T$ を用いた. 乱流拡散を考慮すると,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\Pi}(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_\theta \tag{A.106}$$

が得られる.

予報変数として温位を用いる際には平均気体定数, 平均定圧比熱があまり大きく変化することを許容しないことを前提とするので, 計算の適用範囲に制約が加わることに常に注意しなければならない.

A.1.6 相当温位の導出

(A.106), (A.17) において, 放射加熱・散逸加熱・乱流拡散・雲粒落下を無視すると,

$$d\theta = \frac{1}{\Pi}Q_{cond} = -\sum \frac{L}{\Pi \langle c_p \rangle_0} M_{src}(\rho_v), \tag{A.107}$$

$$dq_v = \frac{1}{\rho} M_{src}(\rho_v) \tag{A.108}$$

となる. ここで $dq_v/q_v \gg d\Pi/\Pi$ であると仮定すると[2], (A.107), (A.108) より

$$d\theta \simeq \sum \frac{Lq_v}{\Pi \langle c_p \rangle_0} \tag{A.109}$$

となる. (A.109) において

$$\theta_e = \theta + \sum \frac{Lq_v}{\Pi \langle c_p \rangle_0} \tag{A.110}$$

と置くと, θ_e は近似的に保存量となる.

A.1.7　圧力方程式の導出

圧力方程式は密度の式と連続の式を組み合わせることで得られる. (A.101) のラグランジュ微分をとると,

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{p_0 \Pi^{\langle c_v \rangle_0/\langle R \rangle}}{\langle R \rangle_0 \left(q_d \langle M \rangle_0 / M_d + \sum q_v \langle M \rangle_0 / M_v\right)\theta}\right] \\
&= \frac{p_0 \Pi^{(\langle c_v \rangle_0 - 1)/\langle R \rangle}}{\langle R \rangle_0 \left(q_d \langle M \rangle_0 / M_d + \sum q_v \langle M \rangle_0 / M_v\right)\theta} \frac{\langle c_v \rangle_0}{\langle R \rangle_0} \frac{d\Pi}{dt} \\
&\quad - \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v \rangle_0/\langle R \rangle}}{\langle R \rangle_0 \left(q_d \langle M \rangle_0 / M_d + \sum q_v \langle M \rangle_0 / M_v\right)\theta^2} \frac{d\theta}{dt} \\
&\quad - \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v \rangle_0/\langle R \rangle}}{\langle R \rangle_0 \left(q_d \langle M \rangle_0 / M_d + \sum q_v \langle M \rangle_0 / M_v\right)^2\theta} \left(\frac{\langle M \rangle_0}{M_d}\frac{dq_d}{dt} + \sum \frac{\langle M \rangle_0}{M_v}\frac{dq_v}{dt}\right) \\
&= \langle c_p \rangle_0 \theta_v \left(\frac{\langle c_v \rangle_0}{\langle c_p \rangle_0 \langle R \rangle_0 \Pi \theta_v}\right) \rho \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\rho}{\theta}\frac{d\theta}{dt} \\
&\quad - \frac{\rho}{q_d \langle M \rangle_0 / M_d + \sum q_v \langle M \rangle_0 / M_v} \left(\frac{\langle M \rangle_0}{M_d}\frac{dq_d}{dt} + \sum \frac{\langle M \rangle_0}{M_v}\frac{dq_v}{dt}\right) \\
&= \frac{\langle c_p \rangle_0 \rho \theta_v}{\langle c_s \rangle^2}\frac{d\Pi}{dt} - \frac{\rho}{\theta}\frac{d\theta}{dt} \\
&\quad - \frac{\rho}{q_d \langle M \rangle_0 / M_d + \sum q_v \langle M \rangle_0 / M_v} \left(\frac{\langle M \rangle_0}{M_d}\frac{dq_d}{dt} + \sum \frac{\langle M \rangle_0}{M_v}\frac{dq_v}{dt}\right).
\end{aligned} \tag{A.111}$$

となる. ここで $\langle c_s \rangle$ は音速であり,

$$\langle c_s \rangle^2 = \frac{\langle c_p \rangle_0 \langle R \rangle_0 \Pi \theta_v}{\langle c_v \rangle_0} \tag{A.112}$$

[2]地球大気ではこの近似が成立するとされているが, 他の惑星大気で成立するかどうかは常に確かめる必要がある.

である. (A.111) に (A.11) を適用すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Pi}{dt} &= \frac{\langle c_s\rangle^2}{\langle c_p\rangle_0\theta_v}\Bigg[\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} \\
&\quad +\frac{1}{q_d\langle M\rangle_0/M_d+\sum q_v\langle M\rangle_0/M_v}\left(\frac{\langle M\rangle_0}{M_d}\frac{dq_d}{dt}+\sum\frac{\langle M\rangle_0}{M_v}\frac{dq_v}{dt}\right)\Bigg] \\
&= \frac{\langle c_s\rangle^2}{\langle c_p\rangle_0\theta_v}\Bigg[-\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{1}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r)+\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} \\
&\quad +\frac{1}{q_d\langle M\rangle_0/M_d+\sum q_v\langle M\rangle_0/M_v}\left(\frac{\langle M\rangle_0}{M_d}\frac{dq_d}{dt}+\sum\frac{\langle M\rangle_0}{M_v}\frac{dq_v}{dt}\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{A.113}
$$

となり, 圧力方程式が得られる.

A.1.8　運動方程式の書き換え

運動方程式の圧力勾配は, 温位とエクスナー関数を用いることで得られる. (A.97), (A.99) より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{\langle R\rangle_0\Pi\theta_v}{p}\frac{\partial\left(p_0\Pi^{\langle c_p\rangle/\langle R\rangle_0}\right)}{\partial x_i} \\
&= \frac{\langle R\rangle_0\Pi\theta_v}{p}\left(\frac{p_0c_{p_d}}{R_d}\Pi^{\langle c_p\rangle/\langle R\rangle_0-1}\right)\frac{\partial\Pi}{\partial x_i} \\
&= \frac{\langle R\rangle_0\Pi\theta_v}{p}\left(\frac{\langle c_p\rangle}{\langle R\rangle_0}p\Pi^{-1}\right)\frac{\partial\Pi}{\partial x_i} \\
&= \langle c_p\rangle\theta_v\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}
\end{aligned} \tag{A.114}
$$

となる. 以上より

$$\frac{du}{dt}=-\langle c_p\rangle\theta_v\frac{\partial\Pi}{\partial x}+D_u \tag{A.115}$$

$$\frac{dv}{dt}=-\langle c_p\rangle\theta_v\frac{\partial\Pi}{\partial y}+D_v \tag{A.116}$$

$$\frac{dw}{dt}=-\langle c_p\rangle\theta_v\frac{\partial\Pi}{\partial z}-g+D_w \tag{A.117}$$

が得られる.

A.1.9 温位 θ, エクスナー関数 Π, 風速 u, v, w を予報変数とする場合の方程式系

以上より, 3 次元大気の状態を温位 θ, エクスナー関数 Π, 風速 u, v, w, 密度 ρ で表現する場合, 基礎方程式系は以下のようになる.

運動方程式

$$\frac{du}{dt} = -\langle c_p \rangle_0 \theta_v \frac{\partial \Pi}{\partial x} + D_u \tag{A.118}$$
$$\frac{dv}{dt} = -\langle c_p \rangle_0 \theta_v \frac{\partial \Pi}{\partial y} + D_v \tag{A.119}$$
$$\frac{dw}{dt} = -\langle c_p \rangle_0 \theta_v \frac{\partial \Pi}{\partial z} - g + D_w \tag{A.120}$$

圧力方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial t} &= \frac{\langle c_s \rangle^2}{\langle c_p \rangle_0 \theta_v} \Bigg[-\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &\quad + \frac{1}{q_d \langle M \rangle_0 / M_d + \sum q_v \langle M \rangle_0 / M_v} \left(\frac{\langle M \rangle_0}{M_d} \frac{dq_d}{dt} + \sum \frac{\langle M \rangle_0}{M_v} \frac{dq_v}{dt} \right) \Bigg]\end{aligned} \tag{A.121}$$

状態方程式

$$\rho = \frac{p}{\langle R \rangle_0 \Pi \theta_v} = \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v \rangle / \langle R \rangle_0}}{\langle R \rangle \theta_v} \tag{A.122}$$

熱の式

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\Pi} (Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_\theta \tag{A.123}$$

凝結性ガスおよび凝結物の比湿の式

$$\frac{dq_v}{dt} = -\frac{q_v}{\rho} \sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho} M_{src}(\rho_v) + D_{q_v} \tag{A.124}$$
$$\frac{dq_c}{dt} = -\frac{q_c}{\rho} \sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho} M_{src}(\rho_c) + D_{q_c} \tag{A.125}$$
$$\frac{dq_r}{dt} = -\frac{q_r}{\rho} \sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho} M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho} M_{src}(\rho_r) + D_{q_r} \tag{A.126}$$

ただし, エクスナー関数 Π は,

$$\Pi \equiv \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\langle R\rangle_0/\langle c_p\rangle_0} \tag{A.127}$$

であり, 音速 $\langle c_s\rangle$ は

$$\langle c_s\rangle^2 = \frac{\langle c_p\rangle_0\langle R\rangle_0\Pi\theta_v}{\langle c_v\rangle_0} \tag{A.128}$$

である.

A.2 準圧縮方程式系の導出

準圧縮方程式系では, 変数を基本場と擾乱場に分離し, 線形化を行う.

A.2.1 基本場と擾乱場の分離

変数を基本場と擾乱場に分離し, 基本場は静水圧平衡にあると仮定する. この時, 変数は以下のように書ける.

$$\begin{aligned}
u(x,z,t) &= u'(x,z,t),\\
v(x,z,t) &= v'(x,z,t),\\
w(x,z,t) &= w'(x,z,t),\\
\theta(x,z,t) &= \overline{\theta}(z) + \theta'(x,z,t),\\
\Pi(x,z,t) &= \overline{\Pi}(z) + \Pi'(x,z,t),\\
q_d(x,z,t) &= \overline{q_d}(z) + {q_d}'(x,z,t),\\
q_v(x,z,t) &= \overline{q_v}(z) + {q_v}'(x,z,t),\\
q_c(x,z,t) &= {q_c}'(x,z,t),\\
q_r(x,z,t) &= {q_r}'(x,z,t).
\end{aligned}$$

ここで基本場の風速 w と雲水比湿と雨水比湿はゼロとみなした. そして基本場には静水圧平衡

$$\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial z} = -\frac{g}{\langle c_p\rangle_0\bar{\theta}_v} \tag{A.129}$$

の関係が成り立つものとする.

A.2.2 水平方向の運動方程式の線形化

水平方向の運動方程式を基本場と擾乱場に分離する.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u^{'}}{\partial t} &= -\left[u^{'}\frac{\partial u^{'}}{\partial x} + v^{'}\frac{\partial u^{'}}{\partial y} + w^{'}\frac{\partial u^{'}}{\partial z}\right] \\
&\quad -\langle c_p\rangle_0\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} + \bar{\theta_v}\frac{\partial \Pi^{'}}{\partial x} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \Pi^{'}}{\partial x}\right) + D_u \\
\frac{\partial v^{'}}{\partial t} &= -\left[u^{'}\frac{\partial v^{'}}{\partial x} + v^{'}\frac{\partial v^{'}}{\partial y} + w^{'}\frac{\partial v^{'}}{\partial z}\right] \\
&\quad -\langle c_p\rangle_0\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} + \bar{\theta_v}\frac{\partial \Pi^{'}}{\partial y} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \Pi^{'}}{\partial y}\right) + D_v.
\end{aligned}
$$

上式において移流項以外の 2 次の微小項を消去し, さらに基本場は x 方向には変化しないことを利用すると, 以下の擾乱成分の式が得られる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u^{'}}{\partial t} &= -u'\frac{\partial u'}{\partial x} - v'\frac{\partial u'}{\partial y} - w'\frac{\partial u'}{\partial z} \\
&\quad -\langle c_p\rangle_0\overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial x} + D_u \qquad (A.130) \\
\frac{\partial v^{'}}{\partial t} &= -u'\frac{\partial v'}{\partial x} - v'\frac{\partial v'}{\partial y} - w'\frac{\partial v'}{\partial z} \\
&\quad -\langle c_p\rangle_0\overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial y} + D_v. \qquad (A.131)
\end{aligned}
$$

A.2.3 鉛直方向の運動方程式の線形化

鉛直方向の運動方程式を基本場と擾乱場に分離する.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w^{'}}{\partial t} &= -\left[u^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial x} + v^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial y} + w^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial z}\right] \\
&\quad -\langle c_p\rangle_0\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} + \bar{\theta_v}\frac{\partial \Pi^{'}}{\partial z} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \Pi^{'}}{\partial z}\right) \\
&\quad -g + D_{w'}
\end{aligned}
$$

上式において移流項以外の 2 次の微小項を消去すると以下となる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w^{'}}{\partial t} &= -u^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial x} - v^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial y} - w^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial z} \\
&\quad -\langle c_p\rangle_0\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} + \bar{\theta_v}\frac{\partial \Pi^{'}}{\partial z} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z}\right) - g + D_{w'}.
\end{aligned}
$$

さらに静水圧の式

$$\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial z} = -\frac{g}{\langle c_p \rangle_0 \overline{\theta_v}} \tag{A.132}$$

を利用すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{'}}{\partial t} &= -u^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial x} - v^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial y} - w^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial z} \\
&\quad + \langle c_p \rangle_0 \bar{\theta_v}\left(\frac{g}{\langle c_p \rangle_0 \bar{\theta_v}}\right) - \langle c_p \rangle_0 \bar{\theta_v}\frac{\partial \Pi^{'}}{\partial z} + \langle c_p \rangle_0 {\theta_v}^{'}\left(\frac{g}{\langle c_p \rangle_0 \bar{\theta_v}}\right) - g + D_{w^{'}} \\
&= -u^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial x} - v^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial y} - w^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial z} - \langle c_p \rangle_0 \bar{\theta_v}\frac{\partial \Pi^{'}}{\partial z} + \frac{{\theta_v}^{'}}{\bar{\theta_v}} g + D_{w^{'}}
\end{aligned}$$

仮温位

$$\theta_v \equiv \frac{T_v}{\Pi} = \left(\frac{\langle M \rangle_0}{M_d} q_d + \sum \frac{\langle M \rangle_0}{M_v} q_v\right)\theta \tag{A.133}$$

を基本場成分と擾乱成分に分けると,

$$\begin{aligned}
\bar{\theta_v} &= \left(\frac{\langle M \rangle_0}{M_d}\bar{q_d} + \sum \frac{\langle M \rangle_0}{M_v}\bar{q_v}\right)\bar{\theta} \\
&= \left[1 + \sum \left(-1 + \frac{R_v}{R_d}\right)\overline{q_v}\right]\bar{\theta} \qquad \text{(A.134)} \\
\theta_v^{\prime} &= \left(\frac{\langle M \rangle_0}{M_d}\overline{q_d} + \sum \frac{\langle M \rangle_0}{M_v}\overline{q_v}\right)\theta^{\prime} + \left(\frac{\langle M \rangle_0}{M_d} q_d^{\prime} + \sum \frac{\langle M \rangle_0}{M_v} q_v^{\prime}\right)\overline{\theta} \\
&= \left[1 + \sum \left(-1 + \frac{R_v}{R_d}\right)\overline{q_v}\right]\theta^{\prime} \\
&\quad + \left[\sum \left(-1 + \frac{R_v}{R_d}\right) q_v^{\prime} - \sum \left(q_c^{\prime} + q_r^{\prime}\right)\right]\overline{\theta} \qquad \text{(A.135)}
\end{aligned}$$

となるので, 浮力項は

$$\frac{\theta_v^{\prime}}{\overline{\theta_v}} g = \frac{\theta^{\prime}}{\overline{\theta}} g + \frac{\sum\left(-1 + \frac{R_v}{R_d}\right) q_v^{\prime} - \sum\left(q_c^{\prime} + q_r^{\prime}\right)}{1 + \sum\left(-1 + \frac{R_v}{R_d}\right)\overline{q_v}} g \tag{A.136}$$

と書き換えられる. 従って線形化された鉛直方向の運動方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{\prime}}{\partial t} &= -u^{\prime}\frac{\partial w^{\prime}}{\partial x} - v^{\prime}\frac{\partial w^{\prime}}{\partial y} - w^{\prime}\frac{\partial w^{\prime}}{\partial z} \\
&\quad - \langle c_p \rangle_0 \overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi^{\prime}}{\partial z} + \frac{\theta^{\prime}}{\overline{\theta}} g + \frac{\sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right) q_v^{\prime} - \sum\left(q_c^{\prime} + q_r^{\prime}\right)}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}} g + D_{w^{\prime}} \qquad \text{(A.137)}
\end{aligned}$$

となる.

A.2.4 圧力方程式の線形化

Klemp and Wilhelmson (1978) では, 非断熱的な加熱による熱膨張と凝結に伴う圧力変化を無視しているが, 本モデルではこれを無視しない. (A.113) に (A.16), (A.17) を代入すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Pi}{dt} &= \frac{\langle c_s\rangle^2}{\langle c_p\rangle_0\theta_v}\Biggl[-\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{1}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r)+\frac{1}{\theta}\left\{\frac{1}{\Pi}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis})+D_\theta\right\}\\
&\quad+\frac{1}{q_d\langle M\rangle_0/M_d+\sum q_v\langle M\rangle_0/M_v}\Biggl\{\frac{\langle M\rangle_0}{M_d}\left(-\frac{q_d}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r)+D_{q_d}\right)\\
&\quad+\sum\frac{\langle M\rangle_0}{M_v}\left(-\frac{q_v}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r)+M_{src}(q_v)+D_{q_v}\right)\Biggr\}\Biggr]\\
&= \frac{\langle c_s\rangle^2}{\langle c_p\rangle_0\theta_v}\Biggl[-\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{1}{\theta}\left\{\frac{1}{\Pi}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis})+D_\theta\right\}\\
&\quad+\frac{1}{q_d+M_d\sum q_v/M_v}\left\{D_{q_d}+M_d\sum\frac{1}{M_v}\left[M_{src}(q_v)+D_{q_v}\right]\right\}\Biggr]
\end{aligned}
\qquad (A.138)
$$

となる. (A.138) の左辺を線形化すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Pi}{dt} &= \frac{\partial\bar{\Pi}+\Pi'}{\partial t}+u'\frac{\partial\bar{\Pi}+\Pi'}{\partial x}+v'\frac{\partial\bar{\Pi}+\Pi'}{\partial y}+w'\frac{\partial\bar{\Pi}+\Pi'}{\partial z}\\
&\approx \frac{\partial\Pi'}{\partial t}+w'\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial z}
\end{aligned}
$$

となる. 乱流拡散項・生成項・雲粒落下項は擾乱成分とみなすと, 圧力方程式を線形化したときの $\langle c_s\rangle^2$, 及び θ_v からの寄与は基本場成分のみとなる. 従って (A.138) の右辺を線形化すると,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\langle c_s\rangle^2}{\langle c_p\rangle_0\theta_v}\Biggl[-\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{1}{\theta}\left\{\frac{1}{\Pi}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis})+D_\theta\right\}\\
&\quad+\frac{1}{q_d+M_d\sum q_v/M_v}\left\{D_{q_d}+M_d\sum\frac{1}{M_v}\left[M_{src}(q_v)+D_{q_v}\right]\right\}\Biggr]\\
\approx\ &\frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle_0\overline{\theta_v}}\Biggl[-\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}+\frac{1}{\bar{\theta}}\left\{\frac{1}{\bar{\Pi}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis})+D_\theta\right\}\\
&\quad+\frac{1}{\overline{q_d}+M_d\sum\overline{q_v}/M_v}\left\{D_{q_d}+M_d\sum\frac{1}{M_v}\left[M_{src}(q_v)+D_{q_v}\right]\right\}\Biggr]\\
=\ &\frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle_0\overline{\theta_v}}\Biggl[-\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}+\frac{1}{\bar{\theta}}\left\{\frac{1}{\bar{\Pi}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis})+D_\theta\right\}\\
&\quad+\frac{1}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}}\left\{-\sum(D_{q_v}+D_{q_c}+D_{q_r})+\sum\frac{R_v}{R_d}\left[M_{src}(q_v)+D_{q_v}\right]\right\}\Biggr]
\end{aligned}
$$

となる. ここで $\overline{q_d} + \overline{q_v} = 1$, $D_{q_d} + D_{q_v} + D_{q_c} + D_{q_r} = 0$ となることを用いた. また

$$\overline{\langle c_s \rangle^2} = \frac{\langle c_p \rangle_0 \langle R \rangle_0 \bar{\Pi} \bar{\theta_v}}{\langle c_v \rangle_0}$$

である. 従って線形化された圧力方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi'}{\partial t} &= -w' \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} - \frac{\overline{\langle c_s \rangle^2}}{\langle c_p \rangle_0 \bar{\theta_v}} \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \\
&\quad + \frac{\overline{\langle c_s \rangle^2}}{\langle c_p \rangle_0 \overline{\theta_v}} \left[\frac{1}{\bar{\theta}} \left\{ \frac{1}{\overline{\Pi}} (Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_\theta \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1 + \sum \left(\frac{R_v}{R_d} - 1 \right) \overline{q_v}} \left\{ -\sum (D_{q_v} + D_{q_c} + D_{q_r}) + \sum \frac{R_v}{R_d} \left[M_{src}(q_v) + D_{q_v} \right] \right\} \right]
\end{aligned} \tag{A.139}$$

と表される. (A.139) の右辺第 1 項, 第 2 項をまとめると,

$$\begin{aligned}
& -w' \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} - \frac{\overline{\langle c_s \rangle^2}}{\langle c_p \rangle_0 \bar{\theta_v}} \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \\
&= -w' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{\rho} \langle R \rangle_0 \bar{\theta_v}}{p_0} \right)^{\langle R \rangle_0 / \langle c_v \rangle_0} - \frac{\overline{\langle c_s \rangle}^2}{\langle c_p \rangle_0 \bar{\theta_v}} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \\
&= -w' \frac{\langle R \rangle_0}{\langle c_v \rangle_0} \bar{\Pi} \frac{1}{\left(\frac{\bar{\rho} \langle R \rangle_0 \bar{\theta_v}}{p_0} \right)} \frac{\langle R \rangle_0}{p_0} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta_v})}{\partial z} - \frac{\overline{\langle c_s \rangle}^2}{\langle c_p \rangle_0 \bar{\theta_v}} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \\
&= -\frac{\overline{\langle c_s \rangle}^2}{\langle c_p \rangle_0 \bar{\rho} \bar{\theta_v}^2} \left\{ w' \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta_v})}{\partial z} + \bar{\rho} \bar{\theta_v} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right\} \\
&= -\frac{\overline{c_s^2}}{\langle c_p \rangle_0 \bar{\rho} \bar{\theta_v}^2} \nabla \cdot \left(\bar{\rho} \bar{\theta_v} \boldsymbol{u'} \right)
\end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi'}{\partial t} &= -\frac{\overline{c_s^2}}{\langle c_p \rangle_0 \bar{\rho} \bar{\theta_v}^2} \nabla \cdot \left(\bar{\rho} \bar{\theta_v} \boldsymbol{u'} \right) \\
&\quad + \frac{\overline{\langle c_s \rangle^2}}{\langle c_p \rangle_0 \overline{\theta_v}} \left[\frac{1}{\bar{\theta}} \left\{ \frac{1}{\overline{\Pi}} (Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_\theta \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1 + \sum \left(\frac{R_v}{R_d} - 1 \right) \overline{q_v}} \left\{ -\sum (D_{q_v} + D_{q_c} + D_{q_r}) + \sum \frac{R_v}{R_d} \left[M_{src}(q_v) + D_{q_v} \right] \right\} \right]
\end{aligned} \tag{A.140}$$

である.

A.2.5 熱の式の線形化

熱の式を平均成分と擾乱成分に分離する.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta')}{\partial t} &= -u'\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta')}{\partial x} - v'\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta')}{\partial y} - w'\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta')}{\partial z} \\
&\quad + \frac{1}{\bar{\Pi}+\Pi'}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) + D_{\bar{\theta}} + D_{\theta'}
\end{aligned}
$$

ここで平均場の量は z の関数であることを用いると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\theta'}{\partial t} &= -\left(u'\frac{\partial\theta'}{\partial x} + v'\frac{\partial\theta'}{\partial y} + w'\frac{\partial\theta'}{\partial z}\right) - w'\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} \\
&\quad + \frac{1}{\bar{\Pi}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) + D_{\bar{\theta}} + D_{\theta'} \qquad \text{(A.141)}
\end{aligned}
$$

となる.

A.2.6 比湿の保存式の線形化

凝結成分の比湿の保存式についても, 変数を平均成分と擾乱成分に分離する. 熱の式と同様に, 以下のように書ける. 但し, 生成項, 落下項は擾乱成分のみ存在すると仮定する. この仮定は平均場では凝結は生じていないと考えることに等しい.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q_v'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_v'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_v'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_v'}{\partial z} - w'\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial z} \\
&\quad - \frac{\overline{q_v}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r') + \frac{1}{\bar{\rho}}M_{src}(\rho_v') + D_{\overline{q_v}} + D_{q_v'}, \qquad \text{(A.142)} \\
\frac{\partial q_c'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_c'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_c'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_c'}{\partial z} \\
&\quad + \frac{1}{\bar{\rho}}M_{src}(\rho_c') + D_{q_c'}, \qquad \text{(A.143)} \\
\frac{\partial q_r'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_r'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_r'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_r'}{\partial z} \\
&\quad + \frac{1}{\bar{\rho}}M_{fall}(\rho_r') + \frac{1}{\bar{\rho}}M_{src}(\rho_r') + D_{q_r'}. \qquad \text{(A.144)}
\end{aligned}
$$

但し雲水量と雨水量は擾乱成分のみの量である.

A.2.7 エネルギー方程式の導出

準圧縮方程式系におけるエネルギー方程式を導出する.

(A.130), (A.131), (A.137) にそれぞれ $\overline{\rho}u'$, $\overline{\rho}v'$, $\overline{\rho}w'$ を掛けて足し合わせると

$$\frac{\partial(\overline{\rho}K)}{\partial t} = -\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla K - \langle c_p\rangle_0\overline{\rho}\overline{\theta_v}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Pi' + \overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D} + g\frac{\theta'_v}{\overline{\theta_v}}\overline{\rho}w' \quad (A.145)$$

となる．但し $\boldsymbol{u} = (u', v', w')$, $\boldsymbol{D} = (D_u, D_v, D_w)$, $K = [u'^2 + v'^2 + w'^2]/2$ と置いた．連続の式

$$\frac{\partial\rho'_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u'\overline{\rho_d}) + \frac{\partial}{\partial z}(w'\overline{\rho_d}) = 0, \quad (A.146)$$

$$\frac{\partial\rho'_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u'\overline{\rho_v}) + \frac{\partial}{\partial z}(w'\overline{\rho_v}) = M_{src}(\rho'_v) \quad (A.147)$$

より

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho'_d + \sum\rho'_v\right) + \nabla\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{u}) = \sum M_{src}(\rho'_v) \quad (A.148)$$

となる．但し $\overline{\rho} = \overline{\rho_d} + \sum\overline{\rho_v}$ であることを用いた．(A.148) を用いると, (A.145) の右辺第 1 項は

$$\begin{aligned}
-\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla K &= -\nabla\cdot(\overline{\rho}K\boldsymbol{u}) + K\nabla\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{u}) \\
&= -\nabla\cdot(\overline{\rho}K\boldsymbol{u}) - K\frac{\partial}{\partial t}(\rho'_d + \rho'_v) + KM_{src}(\rho'_v) \quad (A.149)
\end{aligned}$$

となる．また (A.140) を用いて (A.145) の右辺第 2 項を書き換えると

$$\begin{aligned}
-\langle c_p\rangle_0\overline{\rho}\overline{\theta_v}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Pi' &= -\nabla\cdot[\langle c_p\rangle_0\overline{\rho}\overline{\theta_v}\Pi'\boldsymbol{u}] + \langle c_p\rangle_0\Pi'\nabla\cdot(\overline{\rho}\overline{\theta_v}\boldsymbol{u}) \\
&= -\nabla\cdot[\langle c_p\rangle_0\overline{\rho}\overline{\theta_v}\Pi'\boldsymbol{u}] \\
&\quad +\Pi'\frac{\langle c_p\rangle_0^2\overline{\rho}\overline{\theta_v}^2}{\overline{\langle c_s\rangle}^2} \\
&\quad \Biggl[-\frac{\partial\Pi'}{\partial t} + \frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle_0\overline{\theta_v}}\Biggl[\frac{1}{\overline{\theta}}\left\{\frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_\theta\right\} \\
&\quad + \frac{1}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}}\Biggl\{-\sum(D_{q_v} + D_{q_c} + D_{q_r}) \\
&\quad + \sum\frac{R_v}{R_d}[M_{src}(q_v) + D_{q_v}]\Biggr\}\Biggr]\Biggr] \\
&= -\nabla\cdot[\langle c_p\rangle_0\overline{\rho}\overline{\theta_v}\Pi'\boldsymbol{u}] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\overline{\rho}}{2}\frac{\langle c_p\rangle_0^2\overline{\theta_v}^2\Pi'^2}{\overline{\langle c_s\rangle}^2}\right] \\
&\quad +\langle c_p\rangle_0\overline{\rho}\overline{\theta_v}\Pi' \\
&\quad \Biggl[\frac{1}{\overline{\theta}}\left\{\frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_\theta\right\} \\
&\quad + \frac{1}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}}\Biggl\{-\sum(D_{q_v} + D_{q_c} + D_{q_r}) \\
&\quad + \sum\frac{R_v}{R_d}[M_{src}(q_v) + D_{q_v}]\Biggr\}\Biggr] \quad (A.150)
\end{aligned}$$

となる. (A.148) より任意のスカラー量 ϕ について

$$\overline{\rho}\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\phi\right) + \nabla\cdot\left(\overline{\rho}\phi\boldsymbol{u}\right) + \phi\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_d' + \sum\rho_v'\right) - \phi\sum M_{src}(\rho_v') \tag{A.151}$$

が成り立つ. (A.141) 及び (A.151) を用いて (A.145) の右辺第 4 項を書き換えると,

$$\begin{aligned}
\frac{\theta'}{\overline{\theta}}\overline{\rho}w' &= \frac{\theta'}{\overline{\theta}}\overline{\rho}\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{\overline{\rho}}{\overline{\theta}}\theta'\frac{d}{dt}(gz) + \frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left[\frac{d\theta'}{dt} + w'\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} - \frac{1}{\overline{\Pi}}\left(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}\right) - D_\theta\right] \\
&= \frac{\overline{\rho}}{\overline{\theta}}\frac{d}{dt}(\theta' gz) + \frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left[w'\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} - \frac{1}{\overline{\Pi}}\left(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}\right) - D_\theta\right] \\
&= \frac{1}{\overline{\theta}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\theta' gz\right) + \frac{1}{\overline{\theta}}\nabla\cdot\left(\overline{\rho}\theta' gz\boldsymbol{u}\right) + \frac{\theta' gz}{\overline{\theta}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_d' + \rho_v'\right) - \sum M_{src}(\rho_v')\right] \\
&\quad + \frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left[w'\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} - \frac{1}{\overline{\Pi}}\left(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}\right) - D_\theta\right] \\
&= \frac{1}{\overline{\theta}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\theta' gz\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\overline{\rho}\theta' gz\boldsymbol{u}}{\overline{\theta}}\right) + \frac{\overline{\rho}\theta' gzw'}{\overline{\theta}^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} \\
&\quad + \frac{\theta' gz}{\overline{\theta}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_d' + \rho_v'\right) - \sum M_{src}(\rho_v')\right] \\
&\quad + \frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left[w'\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} - \frac{1}{\overline{\Pi}}\left(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}\right) - D_\theta\right],
\end{aligned} \tag{A.152}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\rho}g}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}}q_v' &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{q_v'\overline{\rho}gz}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}}\right] + \nabla\cdot\left[\frac{q_v'\overline{\rho}gz\boldsymbol{u}}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}}\right] \\
&\quad - q_v' gz\nabla\cdot\left[\frac{\overline{\rho}\boldsymbol{u}}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}}\right] \\
&\quad + gz\left[w'\frac{\partial\overline{q_v}}{\partial z} + \frac{\overline{q_v}}{\overline{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r) - \frac{1}{\overline{\rho}}M_{src}(q_v) - D_{q_v}\right]
\end{aligned} \tag{A.153}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\rho}g}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}}q_c' &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{q_c'\overline{\rho}gz}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}}\right] + \nabla\cdot\left[\frac{q_c'\overline{\rho}gz\boldsymbol{u}}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}}\right] \\
&\quad - q_c' gz\nabla\cdot\left[\frac{\overline{\rho}\boldsymbol{u}}{1 + \sum\left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\overline{q_v}}\right] \\
&\quad + gz\left[-\frac{1}{\overline{\rho}}M_{src}(q_c) - D_{q_c}\right]
\end{aligned} \tag{A.154}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{\rho}g}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}}q_r' &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{q_r'\overline{\rho}gz}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}}\right]+\nabla\cdot\left[\frac{q_r'\overline{\rho}gz\boldsymbol{u}}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}}\right] \\
&\quad -q_r'gz\nabla\cdot\left[\frac{\overline{\rho}\boldsymbol{u}}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}}\right] \\
&\quad +gz\left[-\frac{1}{\overline{\rho}}M_{fall}(\rho_r)-\frac{1}{\overline{\rho}}M_{src}(q_r)-D_{q_r}\right]
\end{aligned}
\tag{A.155}
$$

(A.149), (A.150), (A.152), (A.153), (A.154), (A.155) より (A.145) は以下のように書き換えられる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\overline{\rho}\left[K-\frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}gz+\frac{1}{2}\left(\frac{\langle c_p\rangle_0\overline{\theta_v}\Pi'}{\overline{\langle c_s\rangle}}\right)^2\right]\right\}+\nabla\cdot\left[\overline{\rho}\left(K-\frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}gz+\langle c_p\rangle_0\overline{\theta_v}\Pi'\right)\boldsymbol{u}\right] \\
=\;& -K\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_d'+\rho_v'\right)+\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D}+KM_{src}(\rho_v') \\
&+\langle c_p\rangle_0\overline{\rho}\overline{\theta_v}\Pi' \\
&\left[\frac{1}{\overline{\theta}}\left\{\frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis})+D_\theta\right\}\right. \\
&\left.+\frac{1}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}}\left\{-\sum(D_{q_v}+D_{q_c}+D_{q_r})+\sum\frac{R_v}{R_d}\left[M_{src}(q_v)+D_{q_v}\right]\right\}\right] \\
&+\left[-\sum(q_v'+q_c'+q_r')+\sum(R_v/R_d)q_v'\right]\nabla\cdot\left[\frac{\overline{\rho}\boldsymbol{u}}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}}\right] \\
&-\theta'gz\nabla\cdot\left[\frac{\overline{\rho}\boldsymbol{u}}{\overline{\theta}}\right] \\
&+\frac{\overline{\rho}gz}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}} \\
&\left[\left\{w'\sum\left(-1+R_v/R_d\right)\frac{\partial q_v}{\partial z}\right\}+\left(\sum\frac{\overline{q_v}R_v}{\overline{\rho}R_d}\right)\left(\sum M_{fall}(\rho_r)\right)\right. \\
&\left.+\sum(D_{q_v}+D_{q_c}+D_{q_r})-\sum R_vD_{q_v}/R_d\right] \\
&+\frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left[w'\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{1}{\overline{\Pi}}\left(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}\right)-D_\theta\right]
\end{aligned}
\tag{A.156}
$$

計算領域として矩形領域を想定し, 鉛直方向の境界からの流出は無く, 水平境界の両端では周期的であるとすると, 計算領域境界面でのフラックスはゼロとなる. 従って (A.156) を全計算領域にわたって積分すると,

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int\left\{\overline{\rho}\left[K-\frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}gz+\frac{1}{2}\left(\frac{\langle c_p\rangle_0\overline{\theta_v}\Pi'}{\overline{\langle c_s\rangle}}\right)^2\right]\right\}dV
$$

$$
\begin{aligned}
= & -\int K\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_d' + \rho_v'\right)dV + \int \overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D}dV + \int KM_{src}(\rho_v')dV \\
& + \int \langle c_p\rangle_0 \overline{\rho}\overline{\theta_v}\Pi' \\
& \left[\frac{1}{\overline{\theta}}\left\{\frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_\theta\right\}\right. \\
& \left. + \frac{1}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}}\left\{-\sum(D_{q_v} + D_{q_c} + D_{q_r}) + \sum\frac{R_v}{R_d}\left[M_{src}(q_v) + D_{q_v}\right]\right\}\right]dV \\
& + \int\left[-\sum(q_v' + q_c' + q_r') + \sum(R_v/R_d)q_v'\right]\nabla\cdot\left[\frac{\overline{\rho}\boldsymbol{u}}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}}\right]dV \\
& - \int \theta' gz\nabla\cdot\left[\frac{\overline{\rho}\boldsymbol{u}}{\overline{\theta}}\right]dV \\
& + \int \frac{\overline{\rho}gz}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}} \\
& \left[\left\{w'\sum\left(-1 + R_v/R_d\right)\frac{\partial q_v}{\partial z}\right\} + \left(\sum\frac{\overline{q_v}R_v}{\overline{\rho}R_d}\right)\left(\sum M_{fall}(\rho_r)\right)\right. \\
& \left. + \sum(D_{q_v} + D_{q_c} + D_{q_r}) - \sum R_v D_{q_v}/R_d\right]dV \\
& + \int\frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left[w'\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{1}{\overline{\Pi}}\left(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}\right) - D_\theta\right]dV
\end{aligned}
\tag{A.157}
$$

となり, 準圧縮方程式に関するエネルギー方程式が得られる.

(A.157) の左辺は全エネルギーの時間変化を表している. 左辺の被積分関数の第 1 項, 第 2 項, 第 3 項はそれぞれ運動エネルギー, 浮力による位置エネルギー, 弾性エネルギー (熱エネルギー) を表す. 右辺第 1 項, 第 5 項, 第 6 項は準圧縮近似によって現れる項であり, 一般にゼロとなることはない. 右辺第 2 項は運動量の乱流拡散, 第 3 項は凝結, 第 4 項は非断熱加熱と乱流拡散, 第 7 項は蒸気の勾配・雲粒落下・水蒸気拡散, 第 8 項は温位勾配・非断熱加熱を表す. 非断熱加熱や乱流拡散や基本場の空間変化が存在しなかったとしても, 右辺がゼロとなることは無い. 即ち, 準圧縮方程式では全エネルギーが保存されることはない.

A.3　まとめ

準圧縮方程式系は以下のようにまとめられる.

運動方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial u'}{\partial x} - v'\frac{\partial u'}{\partial y} - w'\frac{\partial u'}{\partial z} \\
&\quad -\langle c_p \rangle_0 \overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial x} + D_u \qquad \text{(A.158)} \\
\frac{\partial v'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial v'}{\partial x} - v'\frac{\partial v'}{\partial y} - w'\frac{\partial v'}{\partial z} \\
&\quad -\langle c_p \rangle_0 \overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial y} + D_v. \qquad \text{(A.159)} \\
\frac{\partial w'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial w'}{\partial x} - v'\frac{\partial w'}{\partial y} - w'\frac{\partial w'}{\partial z} \\
&\quad -\langle c_p \rangle_0 \overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\overline{\theta}}g + \frac{\sum\left(-1+\frac{R_v}{R_d}\right)q'_v - \sum\left(q'_c + q'_r\right)}{1+\sum\left(-1+\frac{R_v}{R_d}\right)\overline{q_v}}g + D_{w'} \\
&\qquad \text{(A.160)}
\end{aligned}
$$

圧力方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi'}{\partial t} &= -\frac{\overline{\langle c_s \rangle}^2}{\langle c_p \rangle_0 \bar{\rho}\bar{\theta}_v^{\,2}}\nabla\cdot\left(\bar{\rho}\bar{\theta}_v \boldsymbol{u'}\right) \\
&\quad +\frac{1}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}} \\
&\quad \left\{-\sum(D_{q_v}+D_{q_c}+D_{q_r}) + \sum\frac{R_v}{R_d}\left[M_{src}(q_v)+D_{q_v}\right]\right\}\Bigg] \\
&\qquad \text{(A.161)}
\end{aligned}
$$

熱の式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \theta'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial \theta'}{\partial x} - v'\frac{\partial \theta'}{\partial y} - w'\frac{\partial \theta'}{\partial z} - w'\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \\
&\quad +\frac{1}{\bar{\Pi}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) + D_{\bar{\theta}} + D_{\theta'} \qquad \text{(A.162)}
\end{aligned}
$$

比湿の保存式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q'_v}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q'_v}{\partial x} - v'\frac{\partial q'_v}{\partial y} - w'\frac{\partial q'_v}{\partial z} - w'\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial z} \\
&\quad -\frac{\overline{q_v}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho'_r) + \frac{1}{\bar{\rho}}M_{src}(\rho'_v) + D_{\overline{q_v}} + D_{q'_v}, \qquad \text{(A.163)} \\
\frac{\partial q'_c}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q'_c}{\partial x} - v'\frac{\partial q'_c}{\partial y} - w'\frac{\partial q'_c}{\partial z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{\overline{\rho}}M_{src}(\rho_c') + D_{q_c'}, & \text{(A.164)}\\
\frac{\partial q_r'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_r'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_r'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_r'}{\partial z} \\
& +\frac{1}{\overline{\rho}}M_{fall}(\rho_r') + \frac{1}{\overline{\rho}}M_{src}(\rho_r') + D_{q_r'}. & \text{(A.165)}
\end{aligned}
$$

エネルギー方程式

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}\int\left\{\overline{\rho}\left[K - \frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}gz + \frac{1}{2}\left(\frac{\langle c_p\rangle_0\overline{\theta_v}\Pi'}{\overline{\langle c_s\rangle}}\right)^2\right]\right\}dV \\
= & -\int K\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_d' + \rho_v'\right)dV + \int\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D}dV + \int KM_{src}(\rho_v')dV \\
& +\int\langle c_p\rangle_0\overline{\rho}\overline{\theta_v}\Pi' \\
& \left[\frac{1}{\overline{\theta}}\left\{\frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_\theta\right\}\right. \\
& \left.+\frac{1}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}}\left\{-\sum(D_{q_v} + D_{q_c} + D_{q_r}) + \sum\frac{R_v}{R_d}\left[M_{src}(q_v) + D_{q_v}\right]\right\}\right]dV \\
& +\int\left[-\sum(q_v' + q_c' + q_r') + \sum(R_v/R_d)q_v'\right]\nabla\cdot\left[\frac{\overline{\rho}\boldsymbol{u}}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}}\right]dV \\
& -\int\theta' gz\nabla\cdot\left[\frac{\overline{\rho}\boldsymbol{u}}{\overline{\theta}}\right]dV \\
& +\int\frac{\overline{\rho}gz}{1+\sum\left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)\overline{q_v}} \\
& \left[\left\{w'\sum\left(-1+R_v/R_d\right)\frac{\partial q_v}{\partial z}\right\} + \left(\sum\frac{\overline{q_v}R_v}{\overline{\rho}R_d}\right)\left(\sum M_{fall}(\rho_r)\right)\right. \\
& \left.+\sum(D_{q_v} + D_{q_c} + D_{q_r}) - \sum R_v D_{q_v}/R_d\right]dV \\
& +\int\frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left[w'\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{1}{\overline{\Pi}}\left(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}\right) - D_\theta\right]dV \qquad \text{(A.166)}
\end{aligned}
$$

付 録B　乱流パラメタリゼーション

B.1　乱流パラメタリゼーション

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS で用いられている 1.5 次のクロージャーを用いる. このとき乱流運動エネルギーの時間発展方程式は,

$$\frac{dE_{turb}}{dt} = B + S + D_E - \left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right) E_{turb}^{\frac{3}{2}} \tag{B.1}$$

と与えられる. l は混合距離で, $l = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ とする. B と S はそれぞれ浮力と流れの変形速度による乱流エネルギー生成項, D_E は乱流エネルギー拡散項, 第 4 項は乱流エネルギーの消散項であり,

$$B = \frac{g_j}{\overline{\theta}_v}\overline{u'_j\theta'_v}, \tag{B.2}$$

$$S = -\overline{(u'_iu'_j)}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \tag{B.3}$$

$$D_E = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial x_j}\right) \tag{B.4}$$

である. ここで

$$\frac{\theta'_v}{\overline{\theta}_v} = \frac{\theta'}{\overline{\theta}} + \frac{\sum\frac{R_v}{R_d}q'_v - \sum q'_L}{1 + \sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum\overline{q_L}} \tag{B.5}$$

$$q_L = q_v + q_c + q_r \tag{B.6}$$

である. 1.5 次のクロージャーでは速度の 2 次相関量を以下のように表す.

$$\overline{(u'_iu'_j)} = -K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2}{3}\delta_{ij}E_{turb}, \tag{B.7}$$

また, $q_c = 0$ の場合,

$$\overline{(u'_i\theta)} = -K_h\frac{\partial\theta}{\partial x_j} \tag{B.8}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{(u_i' q_v)} &= -K_h \frac{\partial q_v}{\partial x_j} && \text{(B.9)}\\
\overline{(u_i' q_L)} &= 0 - K_h \frac{\partial q_L}{\partial x_j} && \text{(B.10)}
\end{aligned}
$$

と表し, $q_c > 0$ の場合,

$$
\begin{aligned}
\overline{(u_i' \theta)} &= -K_h \left(1 + \sum \frac{L^2 \overline{q_v}}{\langle c_p \rangle_0 R_v \overline{\theta}^2 \overline{\Pi}^2} \right)^{-1} \frac{\partial \theta_e}{\partial x_j} && \text{(B.11)}\\
\overline{(u_i' q_v)} &= -K_h \frac{L\overline{q_v}}{R_v \overline{\Pi}\overline{\theta}^2} \left(1 + \sum \frac{L^2 \overline{q_v}}{\langle c_p \rangle_0 R_v \overline{\theta}^2 \overline{\Pi}^2} \right)^{-1} \frac{\partial \theta_e}{\partial x_j} && \text{(B.12)}\\
\overline{(u_i' q_L)} &= -K_h \frac{\partial q_L}{\partial x_j} && \text{(B.13)}
\end{aligned}
$$

と表す. ここで K_m は運動量に対する渦粘性係数, E_{turb} はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー, K_h は渦拡散係数, θ_e は相当温位である. K_m, K_h は E_{turb} を用いて以下のように与えられる.

$$
\begin{aligned}
K_m &= C_m {E_{turb}}^{1/2} l, && \text{(B.14)}\\
K_h &= 3K_m. && \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

パラメータ C_ε, C_m はともに 0.2 である.

B.1.1　乱流運動エネルギー方程式の導出 (雲が存在しない場合)

Klemp and Wilhelmson (1978) では (B.1) について, 「Deardorff (1975), Mellor and Yamada (1974), Schemm and Lipps (1976) で用いられている式と類似のものである」とだけ記述され, その導出の詳細については解説されていない. それゆえ大気大循環モデルでよく用いられている Mellor and Yamada (1974, 1982) のパラメタリゼーションとの対応が不明瞭である. そこで以下では Mellor and Yamada (1973, 1974) の定式化の手順に沿って式 (B.1), (B.7), (B.8) – (B.10) の導出を行う.

考えているサブグリッドスケール内において, 密度は一定, 動粘性係数や拡散係数などの物理定数は一定とする. またサブグリッドスケール内での放射の影響は考慮しない. 出発点となる方程式は, Mellor and Yamada (1973) の式 (7) および (8)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k \overline{u_i' u_j'} + \overline{u_k' u_i' u_j'} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i' u_j'} \right]\\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p u_i'} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p u_j'} + f_k (\varepsilon_{jkl} \overline{u_l' u_i'} + \varepsilon_{ikl} \overline{u_l' u_j'})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\overline{u'_k u'_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{u'_k u'_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \overline{\theta_v}^{-1}(g_j\overline{u'_i\theta_v} + g_i\overline{u'_j\theta_v}) \\
&+ \overline{p\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)} - 2\nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}, \qquad \text{(B.16)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{u'_j\theta'}}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k\overline{\theta' u'_j} + \overline{u'_k u'_j\theta'} - \alpha\overline{u'_j\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}} - \nu\overline{\theta'\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p\theta'} + \varepsilon_{jkl}f_k\overline{u'_l\theta'} \\
&= -\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} - \overline{\theta' u'_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{\theta_v}^{-1}g_j\overline{(\theta')^2} + \overline{p\frac{\partial\theta'}{\partial x_j}} - (\alpha+\nu)\overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}} \qquad \text{(B.17)}
\end{aligned}
$$

および, (B.16) において $i=j$ とした式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q^2}{\partial t} + u_k\frac{\partial q^2}{\partial x_k} &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u'_k u'_j u'_j} - \nu\frac{\partial q^2}{\partial x_k}\right) + 2f_k\varepsilon_{jkl}\overline{u'_l u'_j} \\
&= -2\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - 2\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{pu'_j} + 2g_j\overline{\theta_v}^{-1}\overline{u'_j\theta_v} - 2\nu\overline{\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\right)^2} \qquad \text{(B.18)}
\end{aligned}
$$

である. ここで

$$
\begin{aligned}
q &\equiv \sqrt{\overline{(u'_i)^2}} \\
&= \sqrt{2E_{turb}}
\end{aligned}
$$

で, ν, α はそれぞれ動粘性係数, 拡散係数, g_j は重力加速度ベクトルの第 j 成分である.

(B.16) および (B.17) に現れる圧力に関する相関項および 3 次の相関量については以下の仮定をおく.

1. $\overline{p\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)}$ (圧力による運動エネルギーの再分配)

$$
= -\frac{q}{3l_1}(\overline{u'_i u'_j} - \frac{\delta_{ij}}{3}q^2) + Cq^2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),
$$

   とおく. ここで l_1 は乱流の特徴的なスケール, C は無次元の定数である.

2. $\overline{p\frac{\partial\theta'}{\partial x_j}}$ (圧力による熱エネルギー再分配)

   1. の導出と同様の考察によって,

$$
= -\frac{q}{3l_2}\overline{u'_j\theta'}
$$

   とおく. ここでの乱れのスケールは l_2 とする.

3. $2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$ (粘性による散逸)
粘性に関与するような小スケールの現象は等方的とみて q のみで表現する.

$$= \frac{2}{3}\frac{q^3}{\Lambda_1}\delta_{ij}.$$

ここで Λ_1 は粘性の及ぶ特徴的スケールである.

4. $(\alpha+\nu)\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}$

$$= 0$$

とおく.

5. $\overline{u_k' u_i' u_j'}, \overline{u_k' u_j' \theta'}, \overline{u_k'(\theta')^2}$
速度変動による $\overline{u_k' u_i' u_j'}, \overline{u_k' u_j' \theta'}, \overline{u_k'(\theta')^2}$ と考え次のようにおく.

$$\begin{aligned}
\overline{u_k' u_i' u_j'} &= -q\lambda_1\left(\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j' u_k'}}{\partial x_i}\right), \\
\overline{u_k' u_j' \theta'} &= -q\lambda_2\left(\frac{\partial \overline{u_k' \theta'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j' \theta'}}{\partial x_k}\right), \\
\overline{u_k'(\theta')^2} &= -q\lambda_3\frac{\partial \overline{(\theta')^2}}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

ここで $\lambda_i (i=1,2,3)$ はそれぞれの特徴的スケールである.

6. $\overline{p u_i'}, \overline{p\theta'}$ (圧力変動による拡散)

$$\overline{p u_i'} = \overline{p\theta'} = 0$$

とする. この近似は Deardorff (1975), Schemm and Lipps (1976) でも行われている.

7. $f_k(\varepsilon_{jkl}\overline{u_l' u_i'} + \varepsilon_{ikl}\overline{u_l' u_j'}),\ f_k\varepsilon_{jkl}\overline{u_l'\theta'}$ (コリオリ項)

$$f_k\varepsilon_{jkl}\overline{u_l' u_i'} = f_k\varepsilon_{ikl}\overline{u_l' u_j'} = 0,$$

$$f_k\varepsilon_{jkl}\overline{u_l'\theta'} = 0$$

とする. この近似は Deardorff (1975), Schemm and Lipps (1976) でも行われている.

8. $\alpha\overline{u'_j\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}},\ \nu\overline{\theta'\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$

$$= 0 \tag{B.19}$$

とする.

以上の近似を (B.16), (B.17), (B.18) に対して行うと, 以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{u'_iu'_j}}{dt} &- \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_1\left(\frac{\partial\overline{u'_iu'_j}}{\partial x_k}+\frac{\partial\overline{u'_iu'_k}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u'_ju'_k}}{\partial x_i}\right)-\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u'_iu'_j}\right] \\
&= -\overline{u'_ku'_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}-\overline{u'_ku'_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\overline{\theta_v}^{-1}(g_j\overline{u'_i\theta'_v}+g_i\overline{u'_j\theta'_v}) \\
&\quad -\frac{q}{3l_1}(\overline{u'_iu'_j}-\frac{\delta_{ij}}{3}q^2)+Cq^2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\frac{q^3}{\Lambda_1}\delta_{ij}, \qquad \text{(B.20)} \\
\frac{d\overline{u'_j\theta'}}{dt} &- \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_2\left(\frac{\partial\overline{u'_k\theta'}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u'_j\theta'}}{\partial x_k}\right)\right] \\
&= -\overline{u'_ju'_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}-\overline{\theta'u'_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}-\overline{\theta_v}^{-1}g_j\overline{(\theta')^2}-\frac{q}{3l_2}\overline{u'_j\theta'}, \qquad \text{(B.21)} \\
\frac{dq^2}{dt} &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_1\left(\frac{\partial q^2}{\partial x_k}+2\frac{\partial\overline{u'_ju'_k}}{\partial x_j}\right)-\nu\frac{\partial q^2}{\partial x_k}\right] \\
&= -2\overline{u'_ju'_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+2g_j\overline{\theta_v}^{-1}\overline{u'_j\theta'_v}-2\frac{q^3}{\Lambda_1} \qquad \text{(B.22)}
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+u_k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

である. これらは Mellor and Yamada (1974) の Level 4 モデルの式に対応する式である.

(B.20), (B.21), (B.22) に対し, さらに以下の近似を加える.

- (B.20) では, 右辺の第 4 項と第 5 項だけ考慮する. さらに $C=-1/3$ とする.
- (B.21) では, 右辺の第 1 項と第 4 項だけ考慮する. さらに $\overline{u'_ju'_k}\sim q^2\delta_{jk}/3$ とする.
- (B.22) では, 左辺の λ_1 に比例する項を無視する.

これらの近似を行うと, 式 (B.20), (B.21), (B.22) は

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 - q l_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{(B.23)}$$

$$\overline{u'_j \theta'} = -q l_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad \text{(B.24)}$$

$$\frac{dq^2}{dt} = -2\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + 2 g_j \overline{\theta_v}^{-1} \overline{u'_j \theta'_v} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right] - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} \quad \text{(B.25)}$$

となる. (B.23) は Mellor and Yamada (1974) の Level 1 モデルの $\overline{u'_i u'_j}$ の式である. (B.24) は Mellor and Yamada (1974) の Level 1 モデルの $\overline{u'_j \theta'}$ の式で $\overline{(\theta')^2}$ の項を無視したものに対応する. (B.25) は Mellor and Yamada (1974) の Level 3 モデルの q^2 の式において, 3 次相関項を無視し粘性拡散項を残したものに対応する.

雲が存在しない場合, q_v, q_L は保存量であるので, q_v, q_L は θ と同一形式の時間発展方程式を満たす. 従って, $\overline{u'_j \theta'}$ を導いたのと同様の近似を行なうことにより, 次式を得る.

$$\overline{u'_j q'_v} = -q l_3 \frac{\partial q_v}{\partial x_j}, \quad \text{(B.26)}$$

$$\overline{u'_j q'_L} = -q l_4 \frac{\partial q_L}{\partial x_j} \quad \text{(B.27)}$$

但し l_3, l_4 は各物理量に関する乱れのスケールである.

$q l_1 = K_m, q l_2 = q l_3 = q l_4 = K_h$ とし, q を E_{turb} で表し動粘性係数を乱流拡散係数で置き換えると

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} E_{turb} - K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{(B.28)}$$

$$\begin{aligned} \overline{\theta_v}^{-1} \overline{u'_j \theta'_v} &= \frac{\overline{u'_j \theta'}}{\overline{\theta}} + \frac{\sum \frac{R_v}{R_d} \overline{u'_j q'_v} - \sum \overline{u'_j q'_L}}{1 + \sum \frac{R_v}{R_d} \overline{q_v} - \sum \overline{q_L}} \\ &= -\frac{K_h}{\overline{\theta}} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - K_h \frac{\sum \frac{R_v}{R_d} \frac{\partial q_v}{\partial x_j} - \sum \frac{\partial q_L}{\partial x_j}}{1 + \sum \frac{R_v}{R_d} \overline{q_v} - \sum \overline{q_L}} \end{aligned} \quad \text{(B.29)}$$

$$\frac{dE_{turb}}{dt} = -\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + g_j \overline{\theta_v}^{-1} \overline{u'_j \theta'_v} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[K_m \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right] - \frac{2^{3/2}}{\Lambda_1} E_{turb}^{3/2} \quad \text{(B.30)}$$

となり, (B.30) は散逸項の係数を除き (B.1) に一致する.

以上より, Klemp and Wilhelmson (1978) の乱流パラメタリゼーションは, Mellor and Yamada (1974) の Level 3 モデルと Level 1 モデルとを組みあわせたものと理解することができる. Klemp and Wilhelmson (1978) と同様に乱流運動エネルギー

のみ予報し他の相関量は診断的に求めるモデルとして Mellor and Yamada (1974) の Level 2.5 モデルがある. しかし Level 2.5 モデルは Level 3 モデルと Level 2 モデルとの組合せであることに注意が必要である.

B.1.2 乱流運動エネルギー方程式の導出 (雲が存在する場合)

飽和湿潤過程における熱力学的保存量は θ_e, q_L である. そこで浮力項の中の θ', q_v' を θ_e', q_L' で表す.

飽和状態における物理量には * 印を付すことにする. 飽和比湿 $q_v^*(T,p)$ を基本場近傍で Taylor 展開すると,

$$
\begin{aligned}
q_v^*(T,p) &\simeq q_v^*(\overline{T},\overline{p}) + \left(\frac{\partial q_v^*}{\partial T}\right)_{(\overline{T},\overline{p})} T' + \left(\frac{\partial q_v^*}{\partial p}\right)_{(\overline{T},\overline{p})} p' \\
&= \overline{q_v^*} + \left(\frac{\partial q_v^*}{\partial T}\right)_{(\overline{T},\overline{p})} T' + \left(\frac{\partial q_v^*}{\partial p}\right)_{(\overline{T},\overline{p})} p' \qquad \text{(B.31)}
\end{aligned}
$$

となる. 比湿の定義より,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial q_v^*}{\partial T}\right)_{(\overline{T},\overline{p})} &= \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{p_v^*/R_v}{p/\langle R\rangle_0}\right)_{(\overline{T},\overline{p})} \\
&= \frac{\langle R\rangle_0}{R_v\overline{p}}\left(\frac{\partial p_v^*}{\partial T}\right)_{(\overline{T},\overline{p})} \\
&= \frac{L\langle R\rangle_0}{R_v^2\overline{T}^2}\frac{\overline{p_v}^*}{\overline{p}} \\
&= \frac{L\overline{q_v}^*}{R_v\overline{T}^2}, \qquad \text{(B.32)} \\
\left(\frac{\partial q_v^*}{\partial p}\right)_{(\overline{T},\overline{p})} &= \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p_v^*/R_v}{p/\langle R\rangle_0}\right)_{(\overline{T},\overline{p})} \\
&= -\frac{\overline{q_v^*}}{\overline{p}} \qquad \text{(B.33)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 但し (B.32) の変形の途中で Clausius-Clapeyron の式

$$
\frac{\partial p_v^*}{\partial T} = \frac{Lp_v^*}{R_vT^2} \qquad \text{(B.34)}
$$

を用いた. (B.32), (B.33) を (B.31) に代入すると,

$$
q_v^{*\prime}(T,p) = \frac{L\overline{q_v}^*}{R_v\overline{T}^2}T' - \frac{\overline{q_v^*}}{\overline{p}}p' \qquad \text{(B.35)}
$$

となる. ここで

$$\frac{T'}{\overline{T}} \simeq \frac{\theta'}{\overline{\theta}} + \frac{\langle R\rangle_0}{\langle c_p\rangle_0}\frac{p'}{\overline{p}} \tag{B.36}$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned} q_v^{*\prime}(T,p) &= \frac{L\overline{q_v}^*}{R_v\overline{T}}\left(\frac{\theta'}{\overline{\theta}} + \frac{\langle R\rangle_0}{\langle c_p\rangle_0}\frac{p'}{\overline{p}}\right) - \frac{\overline{q_v^*}}{\overline{p}}p' \\ &= \frac{L\overline{q_v}^*}{R_v\overline{\Pi}\overline{\theta}^2}\theta' + \left(\frac{L\langle R\rangle_0}{R_v\langle c_p\rangle_0\overline{T}} - 1\right)\frac{\overline{q_v^*}}{\overline{p}}p' \end{aligned} \tag{B.37}$$

となる. (B.37) より

$$\overline{u_j' q_v^{*\prime}} = \frac{L\overline{q_v}^*}{R_v\overline{\Pi}\overline{\theta}^2}\overline{u_j'\theta'} + \left(\frac{L\langle R\rangle_0}{R_v\langle c_p\rangle_0\overline{T}} - 1\right)\frac{\overline{q_v^*}}{\overline{p}}\overline{u_j'p'} \tag{B.38}$$

が得られる. B.1.1 節同様, $\overline{u_j'p'} = 0$ とすると,

$$\overline{u_j' q_v^{*\prime}} = \frac{L\overline{q_v}^*}{R_v\overline{\Pi}\overline{\theta}^2}\overline{u_j'\theta'} \tag{B.39}$$

となる. 相当温位の定義より,

$$\begin{aligned} \theta_e' &\simeq \theta' + \sum \frac{L}{\langle c_p\rangle_0\overline{\Pi}} q_v^{*\prime} \\ &= \theta' + \sum \frac{L}{\langle c_p\rangle_0\overline{\Pi}}\left[\frac{L\overline{q_v}^*}{R_v\overline{\Pi}\overline{\theta}^2}\theta' + \left(\frac{L\langle R\rangle_0}{R_v\langle c_p\rangle_0\overline{T}} - 1\right)\frac{\overline{q_v^*}}{\overline{p}}p'\right] \\ &= \theta'\left(1 + \sum \frac{L^2\overline{q_v}^*}{\langle c_p\rangle_0 R_v\overline{\Pi}^2\overline{\theta}^2}\right) + \sum \frac{L}{\langle c_p\rangle_0\overline{\Pi}}\left(\frac{L\langle R\rangle_0}{R_v\langle c_p\rangle_0\overline{T}} - 1\right)\frac{\overline{q_v^*}}{\overline{p}}p' \end{aligned} \tag{B.40}$$

となる. (B.40) より

$$\overline{u_j'\theta'} = \left(1 + \sum \frac{L^2\overline{q_v}^*}{\langle c_p\rangle_0 R_v\overline{\Pi}^2\overline{\theta}^2}\right)^{-1}\overline{u_j'\theta_e'} \tag{B.41}$$

となる. (B.39), (B.41) より

$$\overline{u_j' q_v^{*\prime}} = \frac{L\overline{q_v}^*}{R_v\overline{\Pi}\overline{\theta}^2}\left(1 + \sum \frac{L^2\overline{q_v}^*}{\langle c_p\rangle_0 R_v\overline{\Pi}^2\overline{\theta}^2}\right)^{-1}\overline{u_j'\theta_e'} \tag{B.42}$$

θ_e', q_L' は保存量なので, B.1.1 節での θ と同一形式の時間発展方程式を満たす. 従って,

$$\overline{u_j'\theta_e'} = -ql_5\frac{\partial\theta_e}{\partial x_j}, \tag{B.43}$$

$$\overline{u_j'q_L'} = -ql_6\frac{\partial q_L}{\partial x_j} \tag{B.44}$$

を得る. 但し l_5, l_6 は各物理量に関する乱れのスケールである.

$ql_5 = ql_6 = K_h$ とし, q を E_{turb} で表すと,

$$\overline{u_i'u_j'} = \frac{2}{3}\delta_{ij}E_{turb} - K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{B.45}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\theta_v}^{-1}\overline{u_j'\theta_v'} &= \frac{\overline{u_j'\theta'}}{\overline{\theta}} + \frac{\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{u_j'q_v'} - \sum\overline{u_j'q_L'}}{1+\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum\overline{q_L}} \\
&= -K_h\left(1+\sum\frac{L^2\overline{q_v}}{\langle c_p\rangle_0 R_v\overline{\theta}^2\overline{\Pi}^2}\right)^{-1} \\
&\quad \left[\frac{1}{\overline{\theta}} + \frac{1}{R_d\overline{\Pi}\overline{\theta}^2}\left(1+\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum\overline{q_L}\right)^{-1}\left(\sum L\overline{q_v}\right)\right]\frac{\partial\theta_e}{\partial x_j} \\
&\quad + K_h\left(1+\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum\overline{q_L}\right)^{-1}\frac{\partial\left(\sum q_L\right)}{\partial x_j},
\end{aligned} \tag{B.46}$$

$$\frac{dE_{turb}}{dt} = -\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + g_j\overline{\theta_v}^{-1}\overline{u_j'\theta_v'} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[K_m\frac{\partial q^2}{\partial x_k}\right] - \frac{2^{3/2}}{\Lambda_1}E_{turb}^{3/2} \tag{B.47}$$

となる.

B.1.3　3 次元の場合の表現

3 次元の場合の (B.1) 式の各項を書き下す. 先ず浮力による乱流エネルギー生成項を書き下す. 雲が存在しない場合,

$$\begin{aligned}
B &= \frac{g_j}{\overline{\theta_v}}\overline{u_j'\theta'} \\
&= \frac{g}{\overline{\theta}}\overline{w'\theta'} \\
&= -g\frac{K_h}{\overline{\theta}}\frac{\partial\theta}{\partial z} - gK_h\frac{\sum\frac{R_v}{R_d}\frac{\partial q_v}{\partial z} - \sum\frac{\partial q_L}{\partial z}}{1+\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum\overline{q_L}}
\end{aligned} \tag{B.48}$$

である. また雲が存在する場合,

$$\begin{aligned}
B &= \frac{g_j}{\overline{\theta_v}}\overline{u_j'\theta'} \\
&= \frac{g}{\overline{\theta}}\overline{w'\theta'} \\
&= -gK_h\left(1+\sum\frac{L^2\overline{q_v}}{\langle c_p\rangle_0 R_v\overline{\theta}^2\overline{\Pi}^2}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\left[\frac{1}{\overline{\theta}} + \frac{1}{R_d\overline{\Pi}\overline{\theta}^2}\left(1+\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum\overline{q_L}\right)^{-1}\left(\sum L\overline{q_v}\right)\right]\frac{\partial\theta_e}{\partial z}
$$
$$
+gK_h\left(1+\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum\overline{q_L}\right)^{-1}\frac{\partial\left(\sum q_L\right)}{\partial z} \tag{B.49}
$$

となる. 次に流れの変形速度による乱流エネルギー生成項 S は,

$$
\begin{aligned}
S &= -\overline{(u_i'u_j')}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= -\left\{-K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{2}{3}\delta_{ij}E_{turb}\right\}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= \left\{K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}E_{turb}\right\}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= \left\{K_m\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\delta_{1j}E_{turb}\right\}\frac{\partial u}{\partial x_j} \\
&\quad +\left\{K_m\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\delta_{2j}E_{turb}\right\}\frac{\partial v}{\partial x_j} \\
&\quad +\left\{K_m\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\delta_{3j}E_{turb}\right\}\frac{\partial w}{\partial x_j} \\
&= \left\{2K_m\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}E_{turb}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}+K_m\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+K_m\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z} \\
&\quad +K_m\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\left\{2K_m\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}E_{turb}\right\}\frac{\partial v}{\partial y}+K_m\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial z} \\
&\quad +K_m\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+K_m\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\left\{2K_m\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}E_{turb}\right\}\frac{\partial w}{\partial z} \\
&= 2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad +K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad -\frac{2}{3}E_{turb}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{B.50}
$$

である. 乱流エネルギー拡散項 D_E は,

$$
\begin{aligned}
D_E &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial x_j}\right), \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{B.51}
$$

である. 以上の (B.48), (B.50), (B.51) 式を (B.1) 式に代入することで雲が存在しない場合の乱流エネルギーの式を得る.

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_{turb}}{dt} = & -g\frac{K_h}{\overline{\theta}}\frac{\partial\theta}{\partial z} - gK_h\frac{\sum \frac{R_v}{R_d}\frac{\partial q_v}{\partial z} - \sum \frac{\partial q_L}{\partial z}}{1+\sum \frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum \overline{q_L}} \\
& +2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
& +K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \\
& -\frac{2}{3}E_{turb}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
& +\frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\right) \\
& -\left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right)E_{turb}^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{B.52}
$$

(B.14) を用いて K_m を E_{turb} で書き換えると, 以下の式が得られる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_{turb}}{\partial t} = & -u\frac{\partial E_{turb}}{\partial x} - v\frac{\partial E_{turb}}{\partial y} - w\frac{\partial E_{turb}}{\partial z} \\
& -3gC_mlE_{turb}^{1/2}\frac{K_h}{\overline{\theta}}\frac{\partial\theta}{\partial z} - 3gC_mlE_{turb}^{1/2}\frac{\sum \frac{R_v}{R_d}\frac{\partial q_v}{\partial z} - \sum \frac{\partial q_L}{\partial z}}{1+\sum \frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum \overline{q_L}} \\
& +2C_mlE_{turb}^{1/2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
& +C_mlE_{turb}^{1/2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \\
& -\frac{2}{3}E_{turb}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
& +\frac{\partial}{\partial x}\left(C_mlE_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(C_mlE_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial y}\right) \\
& +\frac{\partial}{\partial z}\left(C_mlE_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\right) - \left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right)E_{turb}^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{B.53}
$$

また (B.49), (B.50), (B.51) 式を (B.1) 式に代入することで雲が存在する場合の乱流エネルギーの式を得る.

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_{turb}}{dt} = & -gK_h\left(1+\sum\frac{L^2\overline{q_v}}{\langle c_p\rangle_0 R_v\overline{\theta}^2\overline{\Pi}^2}\right)^{-1} \\
& \left[\frac{1}{\overline{\theta}} + \frac{1}{R_d\overline{\Pi}\overline{\theta}^2}\left(1+\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v} - \sum\overline{q_L}\right)^{-1}\left(\sum L\overline{q_v}\right)\right]\frac{\partial\theta_e}{\partial z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+gK_h\left(1+\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v}-\sum\overline{q_L}\right)^{-1}\frac{\partial\left(\sum q_L\right)}{\partial z}\\
&+2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&+K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&-\frac{2}{3}E_{turb}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\right)\\
&-\left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right)E_{turb}^{\frac{3}{2}}. \qquad \text{(B.54)}
\end{aligned}
$$

(B.14) を用いて K_m を E_{turb} で書き換えると, 以下の式が得られる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_{turb}}{\partial t} = & -u\frac{\partial E_{turb}}{\partial x}-v\frac{\partial E_{turb}}{\partial y}-w\frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\\
&-3gC_m lE_{turb}^{1/2}\left(1+\sum\frac{L^2\overline{q_v}}{\langle c_p\rangle_0 R_v\overline{\theta}^2\overline{\Pi}^2}\right)^{-1}\\
&\left[\frac{1}{\overline{\theta}}+\frac{1}{R_d\overline{\Pi}\overline{\theta}^2}\left(1+\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v}-\sum\overline{q_L}\right)^{-1}\left(\sum L\overline{q_v}\right)\right]\frac{\partial\theta_e}{\partial z}\\
&+3gC_m lE_{turb}^{1/2}\left(1+\sum\frac{R_v}{R_d}\overline{q_v}-\sum\overline{q_L}\right)^{-1}\frac{\partial\left(\sum q_L\right)}{\partial z}\\
&+2C_m lE_{turb}^{1/2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&+C_m lE_{turb}^{1/2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&-\frac{2}{3}E_{turb}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(C_m lE_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(C_m lE_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial y}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left(C_m lE_{turb}^{1/2}\frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\right)-\left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right)E_{turb}^{\frac{3}{2}}. \qquad \text{(B.55)}
\end{aligned}
$$

付 録C　雲微物理過程

Kessler(1969) に基づく雲微物理パラメタリゼーションの, 終端速度 V_D, 雲水の衝突併合による雨水比湿の変化率 CL_{cr}, 平均終端速度 V_{term}, 蒸発による雨水比湿の変化率 EV_{rv} について解説する[1].

C.1　雨粒の終端速度

Newton の抵抗法則より球体の抵抗力 F_D は

$$F_D = \frac{1}{8}\rho V_D^2 C_D D^2 \tag{C.1}$$

と表される. ここで C_D は抵力係数であり, 一般にレイノルズ数の関数である. 雨滴の落下のようにレイノルズ数が大きい現象の場合, レイノルズ数の定義により, 粘性力は流れ場にほとんど寄与しなくなる. このとき C_D はレイノルズ数に依存しない定数となる. 抵抗力と重力の釣合いを考えると

$$\frac{1}{6}\pi\rho_w D^3 g = \frac{1}{8}\rho V_D^2 C_D D^2 \tag{C.2}$$

となる. (C.2) を V_D について解くと,

$$V_D = \left(\frac{4\rho_w g D}{3C_D\rho}\right)^{1/2} \tag{C.3}$$

となる. Kessler(1969) では $\rho_w = 10^3$[kg/m^3], $g = 9.8$[m/s^2], $\rho_0 = 1.2$ [kg/m^3], $C_D = 0.644$ として

$$V_D = 130\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{0.5} D^{0.5} \tag{C.4}$$

[1] 本章の内容は Ogura and Takahashi (1971), 浅井 (1983) を参考にした.

としている[2]. 但し ρ_0 は地表面での大気密度である. 他の惑星大気においても $C_D = 0.644$ であるとみなすと,

$$V_D = 1.4389 \left(\frac{\rho_w g D}{\rho}\right)^{1/2} \tag{C.5}$$

が得られる.

C.2 雲水の衝突併合

雲水の衝突併合による雨水混合比の変化率 CL_{cr} は, 直径 D の単一の雨粒の衝突併合による質量変化率 $(dm(D)/dt)_{cr}$ と D から $D + dD$ の範囲の直径を持つ雨粒の数 N_D を用いて

$$CL_{cr} = \frac{1}{\rho}\int_0^\infty \left(\frac{dm}{dt}\right)_{cr} N_D \, dD \tag{C.6}$$

と表される. $(dm(D)/dt)_{cr}$ は,

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{cr} = \frac{\pi}{4} D^2 V_D E \rho q_c \tag{C.7}$$

と表される. ここで V_D は雨粒の落下速度, E は雨粒と衝突した雲粒のうち雨粒に併合される割合を表す係数 (捕捉係数) である.

雨粒のサイズ分布関数と雨粒の落下速度 V_D を以下のように仮定する.

$$N_D = N_0 \exp(-\lambda D), \tag{C.8}$$

$$V_D = 1.4389 \left(\frac{\rho_w g D}{\rho}\right)^{1/2}. \tag{C.9}$$

ここで N_0, λ はパラメータである. 式 (C.9) の分布は一般にマーシャル・パルマー型分布 (Marshall and Palmer, 1948) と呼ばれる. Kessler (1969) では $N_0 = 10^7$ とする. これを式 (C.6) に代入すると,

$$\begin{aligned} CL_{cr} &= \frac{1.4389\pi}{4}\left(\frac{\rho_w g D}{\rho}\right)^{1/2} E N_0 q_c \int_0^\infty D^{2.5}\exp(-\lambda D)\, dD \qquad (C.10) \\ &= \frac{1.4389\pi}{4}\left(\frac{\rho_w g D}{\rho}\right)^{1/2} E N_0 q_c \frac{3.75}{\lambda^3}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \end{aligned}$$

[2]Kessler(1969) では C_D をどのように決めたのかについては書かれていない. Gunn and Kinzer(1949) によると, レイノルズ数が 3000 程度である雨粒の C_D の値は 0.66 となるので, Kessler(1969) は系の特徴的なレイノルズ数が 3000 程度であると想定して C_D の値を決めたのかも知れない.

$$= \frac{1.4389 \times 3.75\pi^{3/2}}{8} \left(\frac{\rho_w g D}{\rho}\right)^{1/2} E N_0 q_c \lambda^{-3.5} \qquad \text{(C.11)}$$

を得る. ここで E は D によらないと仮定した. Kessler (1969) では $E = 1$ とする.

雨粒のサイズ分布曲線の傾きを表すパラメータ λ は, 以下の式を用いて雨水比湿 q_r で置き換える.

$$\begin{aligned} q_r &= \frac{1}{\rho}\int_0^\infty \rho_w \frac{\pi}{6} D^3 N_D \, dD \\ &= \frac{\pi N_0 \rho_w}{6\rho}\int_0^\infty D^3 \exp(-\lambda D)\, dD \\ &= \frac{\pi N_0 \rho_w}{6\rho}\frac{6}{\lambda^4} \\ &= \frac{\pi N_0 \rho_w}{\rho}\lambda^{-4}. \end{aligned} \qquad \text{(C.12)}$$

ここで ρ_w は液相の密度である. これを λ について解き, 式 (C.11) に代入すると,

$$\begin{aligned} CL_{cr} &= \frac{1.4389 \times 3.75\pi^{3/2}}{8} \left(\frac{\rho_w g D}{\rho}\right)^{1/2} E N_0 q_c \left(\frac{\rho q_r}{\pi N_0 \rho_w}\right)^{0.875} \\ &= \frac{1.4389 \times 3.75\pi^{5/8}}{8} E N_0^{1/8} g^{1/2} \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{0.375} q_c q_r^{0.875} \\ &= 10.344 g^{1/2} \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{0.375} q_c q_r^{0.875} \end{aligned} \qquad \text{(C.13)}$$

となる. 最後の式変形では, $N_0 = 10^7, E = 1$ を代入した.

C.3　平均終端速度

平均終端速度 V_{term} は雨滴の鉛直フラックス F_r, 雨滴密度 ρ_r により

$$V_{term} = \frac{F_r}{\rho_r} \qquad \text{(C.14)}$$

と表される. ρ_r, F_r はそれぞれ以下のように表される.

$$\rho_r = \int_0^\infty N_D m dD, \qquad \text{(C.15)}$$

$$F_r = \int_0^\infty N_D m V_D dD. \qquad \text{(C.16)}$$

ここで m は直径 D の雨滴の質量であり,

$$m = \frac{\pi}{6} D^3 \rho_w \tag{C.17}$$

と書ける. (C.8), (C.9), (C.17) を (C.15), (C.16) に適用すると,

$$\begin{aligned}
\rho_r &= \int_0^\infty N_0 \exp(-\lambda D) \frac{\pi}{6} \rho_w D^3 dD \\
&= \frac{\pi \rho_w N_0}{\lambda^4} && \text{(C.18)} \\
F_r &= \int_0^\infty N_0 \exp(-\lambda D) \frac{\pi}{6} \rho_w D^3 1.4389 \left(\frac{\rho_w g D}{\rho} \right)^{1/2} dD \\
&= \frac{1.4389 \times 105 \pi^{3/2}}{96} \rho_w^{3/2} g^{1/2} \rho^{-1/2} N_0 \lambda^{-9/2} && \text{(C.19)}
\end{aligned}$$

となる. (C.18) を (C.19) に代入して λ を消去すると,

$$\begin{aligned}
F_r &= \frac{1.4389 \times 105 \pi^{3/2}}{96} \rho_w^{3/2} g^{1/2} \rho^{-1/2} N_0 \left(\frac{\rho_r}{\pi N_0 \rho_w} \right)^{9/8} \\
&= \frac{1.4389 \times 105 \pi^{3/8}}{96} \rho_w^{3/8} g^{1/2} \rho^{-1/2} N_0^{-1/8} \rho_r^{9/8} && \text{(C.20)}
\end{aligned}$$

となる. (C.14) に (C.20) を代入すると

$$\begin{aligned}
V_{term} &= \frac{1.4389 \times 105 \pi^{3/8}}{96} \rho_w^{3/8} g^{1/2} \rho^{-1/2} N_0^{-1/8} \rho_r^{1/8} \\
&\approx 0.3224 g^{1/2} \left(\frac{\rho_w}{\rho} \right)^{0.375} q_r^{0.125} && \text{(C.21)}
\end{aligned}$$

が得られる.

C.4　雨水の蒸発

蒸発による雨水混合比の変化率 EV_{rv} は, 式 (C.6) と同様に

$$EV_{rv} = \frac{1}{\rho_d} \int_0^\infty \left(\frac{dm}{dt} \right)_{ev} N_D \, dD \tag{C.22}$$

と表される. ここで $(dm(D)/dt)_{ev}$ は直径 D の単一の雨粒の蒸発による質量変化率である.

雨水の蒸発は雨粒の表面からの水蒸気の拡散によって律速されると仮定する. 雨粒周囲の水蒸気フラックスを F とすると, 雨粒の質量の変化率は

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} = -4\pi r_d^2 F(r_d) \tag{C.23}$$

と表される. ここで r は雨粒中心からの距離, r_d は雨粒の半径で, F は

$$F = -K_d \frac{d\rho_v}{dr}$$

と表される. ρ_v は水蒸気の密度, K_d は水蒸気の拡散係数である. 雨粒の周囲では水蒸気フラックスの収束発散はないと仮定すると,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F\right) = 0$$

が成り立つ. これを積分し

$$\rho_v = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

境界条件 $r = r_d$ で $\rho_v = \rho_{v,s}$, $r = \infty$ で $\rho_v = \rho_{v,\infty}$ を適用すると,

$$C_1 = (\rho_{v,\infty} - \rho_{v,s}) r_d, \quad C_2 = \rho_{v,\infty}$$

これより, 雨粒表面での拡散による水蒸気フラックスは

$$\begin{aligned} F(r_d) &= -K_d \left.\frac{d\rho_v}{dr}\right|_{r=r_d} \\ &= K_d \frac{\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}}{r_d} \end{aligned} \tag{C.24}$$

よって,

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} = -4\pi r_d K_d (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}) \tag{C.25}$$

と表される. 雨粒が落下しながら蒸発する場合には, K_d に補正項のついた

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} = -4\pi r_d \left(1 + \frac{Fr}{s}\right) K_d (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}) \tag{C.26}$$

が用いられる. ここで F は換気因子, s は雨粒表面でのクヌーセン層の厚さである[3].

Kessler (1969) では, (C.26) の右辺の項を以下のように近似する.

$$\begin{aligned} 4\pi r_d \left(1 + \frac{Fr}{s}\right) &\sim 2.24 \times 10^3 D^{1.6}, \\ K_d (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}) &\sim 10^{-5} (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}). \end{aligned}$$

[3](C.26) は Kinzer and Gunn(1951) で導出されている. 導出方法については要確認である.

このとき (C.26) は

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} \sim -2.24\times10^{-2}(\rho_{v,s}-\rho_{v,\infty})D^{1.6} \tag{C.27}$$

となる. これを式 (C.22) に代入し, 雨粒のサイズ分布として (C.8) を仮定すると,

$$\begin{aligned}
EV_{rv} &= -\frac{1}{\rho_d}2.24\times10^{-2}(q_{v,s}-q_{v,\infty})\int_0^\infty D^{1.6}N_D\,dD, \\
&= -2.24\times10^{-2}(q_{v,s}-q_{v,\infty})\int_0^\infty D^{1.6}N_0\exp(-\lambda D)\,dD \\
&= -2.24\times10^{-2}(q_{v,s}-q_{v,\infty})N_0\frac{\Gamma(2.6)}{\lambda^{13/5}} \\
&= -2.24\times10^{-2}\Gamma(2.6)(\pi\rho_w)^{-0.65}N_0^{0.35}(q_{v,s}-q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65} \\
&= -1.7\times10^{-4}N_0^{0.35}(q_{v,s}-q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65} \\
&= -4.81\times10^{-2}(q_{v,s}-q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65}
\end{aligned} \tag{C.28}$$

最後の式変形を行う際には (C.12) 式の関係を用いて λ を消去し, $\Gamma(2.6)=1.4296245$, $N_0=10^7$ とした[4].

[4] Kessler (1969) では最終的には

$$EV_{rv} = 4.85\times10^{-2}(q_{v,s}-q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65}$$

としている.

付 録D　変数リスト

C_ε	:	乱流拡散係数のための定数
C_m	:	乱流拡散係数のための定数
c_s	:	音波
$\bar{c_s}$	:	基本場の音波
$\langle c_p \rangle$	:	平均定圧比熱
$\langle c_v \rangle$	:	定積比熱
D_*	:	サブグリッドスケールの乱流拡散項
E_{turb}	:	サブグリッドスケールの運動エネルギー
f	:	コリオリパラメータ
g	:	重力加速度
K_h	:	熱に対する乱流拡散係数
K_m	:	運動量に対する乱流拡散係数
l	:	混合距離
p	:	圧力
$\overline{p}$	:	基本場の圧力
p_0	:	地表面での基準圧力
Π	:	エクスナー関数
$\overline{\Pi}$	:	基本場のエクスナー関数
q_v	:	比湿
q_c	:	雲水比湿
q_r	:	雨水比湿
R_d	:	乾燥成分の気体定数
R_v	:	湿潤成分の気体定数
$\langle R \rangle$	:	平均気体定数
$\overline{\rho}$	:	基本場の密度
ρ_0	:	地表面での密度
S	:	飽和比
t	:	時間座標
$\overline{T}$	:	基本場の温度
$\overline{\theta}$	:	基本場の温位
θ'	:	温位偏差
u_i	:	速度, $i = 1, 3$ $(u_1, u_3) = (u, w)$
x_i	:	空間 z 座標, $i = 1, 3$ $(x_1, x_3) = (x, z)$

謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

http://www.gfd-dennou.org/arch/deepconv/

において公開されているものである. ©山下 達也, 杉山 耕一朗, 北守 太一, 小高正嗣 (T. Yamashita, K. Sugiyama, T. Kitamori, M. Odaka) 2009. 本資源は, 著作者の諸権利に抵触しない (迷惑をかけない) 限りにおいて自由に利用していただいて構わない. なお, 利用する際には今一度自ら内容を確かめることをお願いする (無保証無責任原則).

本資源に含まれる元資源提供者 (図等の版元等を含む) からは, 直接的な形での WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが, 勝手ながら, 「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ, 学術標準の引用手順を守ることで諸手続きを略させていただいている. 本資源の利用者には, この点を理解の上, 注意して扱っていただけるようお願いする. 万一, 不都合のある場合には

dcstaff@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いである.