GFD セミナー 2006 夏: 位相依存性のない 波の活動度フラックス

講演者: 高谷康太郎
書記: 小高正嗣, 佐々木洋平

2006 年 9 月 21 日

1 波の活動度とそのフラックス – 入門編

1.1 水平二次元 β 平面上の非発散流体の場合

簡単のため水平二次元 β 面上の非発散流体を考える. 基礎方程式系は以下の通りである:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

ここで $f = f_0 + \beta y$ である. 非発散流体であるから, u, v は流線関数 ψ を用いて

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

と表わされる.

渦度方程式は $\dfrac{\partial}{\partial x}(2) - \dfrac{\partial}{\partial y}(1)$ から得られる:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta v = 0. \tag{4}$$

定常東西一様な基本場中の擾乱を考え, 物理量を定常な基本場と, それよりも振幅の小さい時間変化する擾乱に分ける. 振幅展開の係数を $\varepsilon(\ll 1)$ として,

$$\begin{array}{rcccc}
\text{order}: & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \\
u = & \overline{u}(y) & +u' & +u^{(2)} & +\cdots \\
v = & & +v' & +v^{(2)} & +\cdots \\
\psi = & \overline{\psi} & +\psi' & +\psi^{(2)} & +\cdots \\
\zeta = & \overline{\zeta}(y) & +\zeta' & +\zeta^{(2)} & +\cdots .
\end{array} \tag{5}$$

ここで右肩の添字はそれぞれ, 任意の物理量 a について $O(a') = \varepsilon,\ O(a^n) = \varepsilon^n$ を表わすとする.

これらを渦度方程式 (4) に代入し $O(\varepsilon)$ を取りだすことで, 線型化された渦度方程式が得られる:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \beta_e v' = 0. \tag{6}$$

ここで β_e は

$$\beta_e \equiv \beta - \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} \tag{7}$$

とした. β_e が y にしか依存しない事に注意されたい.

1.2 Rossby 波のおさらい

擾乱の解として平面波解を仮定する. ψ_0 を定数として,

$$\psi' = \psi_0 \exp\{i(kx + ly - \omega t)\} \tag{8}$$

を線型化した渦度方程式 (6) に代入する:

$$\begin{aligned}
-i\omega\zeta' + ik\overline{u}\zeta' + \beta_e\frac{\partial \psi'}{\partial x} &= 0 \\
-i\omega\{-(k^2 + l^2)\psi'\} + ik\overline{u}\{-(k^2 + l^2)\psi'\} + \beta_e ik\psi' &= 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

ここで流線関数と渦度の定義より

$$\zeta' = \nabla^2\psi' = -(k^2 + l^2)\psi'$$

であることを用いた. (9) を ω について解くことで, Rossby 波の分散関係式が得られる:

$$\omega = k\overline{u} - \frac{\beta_e k}{k^2 + l^2}. \tag{10}$$

右辺第 1 項は基本場の移流を, 右辺第 2 項が波の構造を表している.

(10) より位相速度は

$$C_x = \frac{\omega}{k} = \overline{u} - \frac{\beta_e}{k^2 + l^2}, \tag{11}$$

$$C_y = \frac{\omega}{l} = \left(\overline{U} - \frac{\beta_e}{k^2 + l^2}\right)\frac{k}{l}, \tag{12}$$

群速度は

$$C_{gx} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \overline{u} + \frac{\beta_e(k^2 - l^2)}{k^2 + l^2}, \tag{13}$$

$$C_{gy} = \frac{\partial\omega}{\partial l} = \frac{2\beta_e kl}{k^2 + l^2} \tag{14}$$

となる[*1]. $\beta_e > 0$ の場合には, 位相速度 C_x は基本場の流速 $\overline{u}$ よりも常に遅い. それに対して群速度 C_{gx} と $\overline{u}$ の関係は k と l の大小関係に依存する.

1.3 波の活動度とそのフラックスの導出

ここで擾乱場のエンストロフィーを考えよう. 線型化した渦度方程式 (6) の両辺に ζ' をかけて

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta'^2}{2} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\zeta'^2}{2} + \beta_e v'\zeta' = 0. \tag{15}$$

(7) より β_e は y にのみ依存するので, 両辺を β_e で割って微分の中に入れると

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta'^2}{2\beta_e} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\zeta'^2}{2\beta_e} + v'\zeta' = 0. \tag{16}$$

[*1] 波の活動度フラックス $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{C}_g A$ と定義される. 本節と次節では, 東西平均した場でのフラックスを考えるので C_{gy} (と C_{gz}) に注目されたい.

この式の東西平均を取る. 任意の物理量 a の東西平均を $[a]$ で表わすとする:

$$[a] \equiv \frac{1}{x_0}\int_0^{x_0} a\,dx. \tag{17}$$

二次元 β 面とはいえ, もともと球面を考えたいので平均を取ると元に戻ってくる, とする (すなわち周期境界を考える). よって $[\overline{u}] = 0$ であるから,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\zeta'}{2\beta_e}\right] + [v'\zeta'] = 0. \tag{18}$$

さらに $v'\zeta'$ に 連続の式と u' の積 (= 0) を付与し変形すると

$$\begin{aligned}
v'\zeta' - u'\Big(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\Big) &= v'\Big(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\Big) - u'\Big(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{2}v'^2\Big) - v'\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{2}u'^2\Big) - u'\frac{\partial v'}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v'^2 - u^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(-u'v')
\end{aligned}$$

であるから, 結局

$$[v'\zeta'] = \frac{\partial}{\partial y}[-u'v']. \tag{19}$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\zeta'}{2\beta_e}\right] + \frac{\partial}{\partial y}[-u'v'] = 0 \tag{20}$$

が得られた. ここで

$$A \equiv \Big[\frac{1}{2}\zeta'^2\Big] \tag{21}$$

$$\boldsymbol{F} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -[u'v'] \end{pmatrix} \tag{22}$$

と定義すると,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0 \tag{23}$$

と表わせる. A は**波の活動度** (wave activity), $\boldsymbol{F}$ は**波の活動度フラックス** (wave activity flux) と呼ばれる.

1.4 波の活動度フラックスとロスビー波の群速度との関係

$[-u'v']$ が, ロスビー波の群速度と A の積となっている事を示す. 擾乱の解として平面波解 (8) を仮定しているので,

$$A = \left[\frac{\zeta'}{2\beta_e}\right] = \frac{(k^2+l^2)\psi_0^2}{4\beta_e}. \tag{24}$$

また,

$$\begin{aligned}[u'v'] &= \left[\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right] = [k\psi_0\cos(\cdots)\cdot l\psi_0\cos(\cdots)] = \frac{kl\psi'^2}{2} \\ &= \frac{2\beta_e kl}{k^2+l^2}\cdot\frac{(k^2+l^2)\psi^2}{4\beta_e} \\ &= C_{gy}[A]. \end{aligned} \tag{25}$$

よって

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{gy}A \end{pmatrix} \tag{26}$$

である.

1.5 波の活動度による東西風加速 (減速)

波の活動度 A の時間変化と, 東西風の時間変化との関係について考える. 東西風 u の $O(\varepsilon^2)$ の式は

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + u'\frac{\partial u'}{\partial x} + u^{(2)}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x} + v'\frac{\partial u'}{\partial y} + v^{(2)}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} - fv^{(2)} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x}. \tag{27}$$

この式の東西平均を取る. この時

$$[v^{(2)}] = \left[\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x}\right] = 0 \tag{28}$$

$$\left[\overline{u}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\overline{u}u^{(2)}\right\}\right] = 0 \tag{29}$$

であるから, 結果として

$$\frac{\partial}{\partial t}[u^{(2)}] = -\frac{\partial}{\partial y}[u'v'] = \nabla\cdot\boldsymbol{F} = [v'\zeta'] \tag{30}$$

が得られる. (30) と波の活動度の保存則 (23) を合わせる事で以下の式が得られる:

$$\frac{\partial}{\partial t}[u^{(2)} + A] = 0 \tag{31}$$

1.6 波の活動度と東西風加速 (31) の解釈

東西風加速の式 (31) は, 波の活動度 A が減少 (増加) すると, 西風が加速 (減速) することを表わしている.

また, 波の活動度保存則 (23) と東西風加速 (31) は, それぞれ独立に保存形となっている:

$$\frac{\partial[A]}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial[u^{(2)}]}{\partial t} - \nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0. \tag{33}$$

よってある y において A が減少 ($u^{(2)}$ が増加) しているならば, 別の y において A が増加 ($u^{(2)}$ が減少) していおり, この時, A の減少域から A の増加域へと A が輸送されている. そのフラックスは $\boldsymbol{F}$ によって表現されている (図 1)

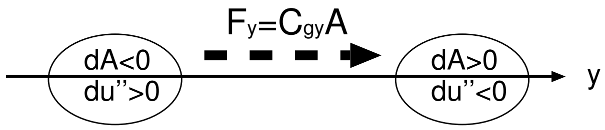

図 1 $\boldsymbol{F}$ が A の移流を表わしている図.
y 軸左側が A の減少域 ($u^{(2)}$ の増加域), y 軸右側が A の増加域 ($u^{(2)}$ の減少域) を示す.
A の増加 (減少) は $\boldsymbol{F}$ の収束 (発散) であるから, 図の左から右へ, Rossby 波によって A が移流されている.

また $\boldsymbol{F} = [v'\zeta'] = -\frac{\partial}{\partial y}[u'v']$. であるから,

$$\frac{\partial}{\partial t}[u^{(2)}] + \frac{\partial}{\partial y}[u'v'] = 0$$

となる. $\dfrac{\partial}{\partial y}[u'v']$ は南北風による西風運動量の移流であるから, 西風運動量フラックスの収束 (発散) によって西風加速 (減速) が生じている, とも解釈される (図 2).

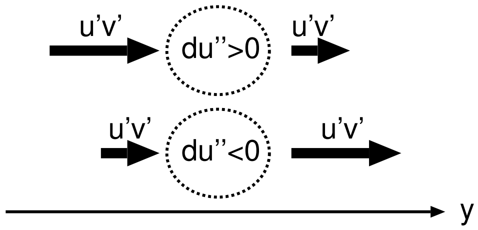

図 2　西風加速 (減速) の $\dfrac{\partial}{\partial y}[u'v']$ による解釈.
$[u'v']$ を南北で比較すると, $[u'v']$ の減少域では西風加速 ($du^{(2)} > 0$) が生じており (上), $[u'v']$ の増加域では西風減速 ($du^{(2)} < 0$) が生じている (下).

1.7 閑話休題: 西風加速 (減速) に $[v'\zeta']$ が直接効くのは何故か?

ちょっと考えると不思議ですね. 絵で解釈できませんか? と言う議論が紛糾した. 以下の説は, そこで登場した絵と, 議論の内容である. フォローできていない所も多々あるので, ビデオ画像とともに眺められたい.

1.7.1 高谷さんの問題提起

数式で眺めると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + fv = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{p}{\rho_0}\Big), \\ &\quad \to \frac{\partial u}{\partial t} - (f+\zeta)v = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{p}{\rho_0} + K\right\}, \quad K = \frac{1}{2}(u^2+v^2) \end{aligned} \tag{34}$$

となっている. 最初に定常だとすれば, ベルヌイ関数の勾配が $-(f+\zeta)v$ と等しくなってる. だから ζv が加速 (減速) に効く (正しいか?). また, この事を絵で解釈できるだろうか.

- 西澤さん説: 渦が移流される事による東西風加速
- 中島さん説: 渦のペアが北と南に移動することによる東西風加速
- 石岡さん説 (1):
- 石岡さん説 (2):ケルビンインパルスで考えると

$$\int_a^b \Delta\overline{u}\, dy = [y\Delta\overline{u}]_a^b + \int_a^b y\Delta\overline{\zeta}\, dy$$

1.7.2 林さんの解説

波の活動度フラックスの御利益: 渦度 ζ が陽に出てこないのに, 東西風加速を語れる所.

$u^{(2)}$ の増減を考える場合には, $\zeta^{(2)}$ の増分を渦度方程式と一緒にして考え, $\zeta^{(2)}$ から $u^{(2)}$ を逆解きする作業が必要になる. 渦から速度場を逆解きする場合には, 境界条件を知っていな

ければならない. 境界条件については暗黙の了解 (境界で 0 とか) が存在する. これを意識せずに, 絵で解釈しようとすると, 誤解と混乱が生じる恐れがあるので注意しよう (図 3).

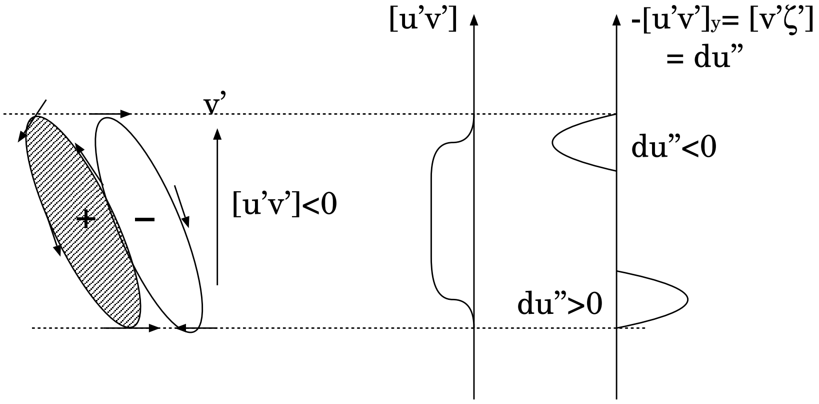

図 3　議論の末に, ホワイトボード上で完成した図.
(左) 波束が北へ移動していく場合の, $[u'v']$ の分布 (中) と (右) 運動量フラックス (東西風加速).

2 子午面循環場での波の活動度フラックス.

前節では, 水平二次元で波の活動度を考えた. 以下では成層流体の場合を考え, 東西平均を取ることで子午面循環場での波の活動度フラックスを導出する.

2.1 β 平面上の成層流体の場合

β 平面上の成層流体を考える. 鉛直座標として対数圧力座標

$$z \equiv -H \ln\left(\frac{P}{P_s}\right) \tag{35}$$

をとり, 準地衡流方程式系 (以下, QG 方程式系) から話を始める:

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} - f(v_g + v_a) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} + f(u_g + v_a) = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_g \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_g \frac{\partial \theta}{\partial y} + w_a \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w_a) = 0. \tag{39}$$

ここで (u_g, v_g) は地衡流成分, (u_a, v_a) は非地衡流成分であり, $(u_g, v_g) \gg (u_a, v_a)$ である. また,

$$u_g = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{40}$$

$$\psi \equiv \frac{\phi - \phi_0}{f_0}, \psi_0 = \psi_0(z) \tag{41}$$

$$\theta = \frac{H}{R} f_0 e^{\kappa z/H} \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{42}$$

$$\theta_0 = \theta_0(z), \tag{43}$$

$$\rho_0 = \rho_s e^{-z/H} \tag{44}$$

である.

渦度方程式は $\dfrac{\partial}{\partial x}(37)-\dfrac{\partial}{\partial y}(36)$ より得られる:

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial x}+v_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial y}+\beta(v_g+v_a)=\frac{f}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w_a). \tag{45}$$

ポテンシャル渦度 (以下, PV) 保存則は, 温位の式 (38) を変形し[*2], 渦度方程式と合わせることで得られる:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)q=0 \tag{46}$$

$$q\equiv f_0+\beta y+\psi_{xx}+\psi_{yy}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \tag{47}$$

以降は地衡流成分を表わす添字 $_g$ を省略する. また, 下つき添字 $_{x}$,$_{y}$,$_{z}$ は各々 x 微分, y 微分, z 微分を表わすこととする.

[*2] 先ず準地衡風の温度の式 (38) の両辺を $\theta_{0z}\equiv\partial\theta_0/\partial z$ で割り, ρ_0 をかけることで,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\rho_0\frac{\theta}{\theta_{0z}}\right)+\rho_0 w_a=0.$$

この式を z で微分し, 以下の関係式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_g}{\partial z}&=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z}=-\frac{Re^{-\kappa z/H}}{Hf_0}\frac{\partial \theta}{\partial y},\\
\frac{\partial u_g}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial z}=\frac{Re^{-\kappa z/H}}{Hf_0}\frac{\partial \theta}{\partial x},\\
\frac{\theta}{\theta_{0z}}&=\frac{(HR^{-1}f_0e^{\kappa z/H}\psi_z)}{\theta_{0z}}=\frac{f_0}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}
\end{aligned}$$

を用いて変形することで,

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w_a)=-\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{f_0}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right).$$

これを渦度方程式の右辺へ代入し, 整理する.

2.2 波の活動度とその flux の導出

前節と同様に, 渦位と平均流を振幅展開し代入する事で, PV 保存則 (47) を線型化する. 基本場は x に依存しないとする:

$$\begin{array}{rcccc} \text{order}: & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \\ q = & \overline{q}(y,z,t) & +q' & +q^{(2)} & +\cdots \\ u = & \overline{u}(y,z,t) & +u' & +u^{(2)} & +\cdots \\ \psi = & \overline{\psi} & +\psi' & +\psi^{(2)} & +\cdots \end{array} \tag{48}$$

線型化された PV の擾乱の式は

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{\partial \overline{q}}{\partial y}v' = 0 \tag{49}$$

となる. これに q' をかけて整理すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{q'^2}{2} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{q'^2}{2} + \overline{q}_y v' q' = 0 \tag{50}$$

が得られる.

波の活動度 A を

$$A \equiv \frac{q'^2}{2\overline{q}_y} \tag{51}$$

とすることで,

$$\frac{\partial}{\partial t}A + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u}A) + v'q' = 0 \tag{52}$$

が得られる. さらに $v'q'$ を変形すると,

$$\begin{aligned} v'q' &= v'\left\{\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\left(\rho_0 \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(v'^2 - u'^2)}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(-u'v') + \frac{\psi'_x}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\rho_0 \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(v'^2 - u'^2)}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(-u'v') + \left\{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{f_0^2}{N^2}\psi'_x\psi'_z\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{f_0^2}{N^2}\psi'^2_z\right)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\left(v^2 - u^2 - \frac{1}{2}\frac{f^2}{N^2}\psi'^2_z\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}(-u'v') + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\rho\frac{f^2}{N^2}\psi'_x\psi'_z\right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\left(v^2 - u^2 - \frac{1}{2}\frac{f^2}{N^2}\psi_z'^2\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}(-u'v') + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\rho_0 f_0 \frac{v'\theta'}{\theta_{0z}}\right\} \tag{53}$$

となる. 最後の式変形では

$$N^2 = \frac{g}{\theta}\theta_{0z}$$

を用いた. この式はフラックス形式となっている.

右辺第 1 項の $\psi_z'^2$ は, $\psi_z' \propto \theta$ より有効位置エネルギーに比例する量である. よって波のエネルギー

$$e = \frac{1}{2}\left\{\psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \frac{f_0^2}{N^2}\psi_x'^2\right\} \tag{54}$$

を用いて式変形を行なうと,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v'^2 - u'^2 - \frac{f^2}{N^2}\psi_z') &= v'^2 - \frac{1}{2}(v'^2 + u'^2 + \frac{f^2}{N^2}\psi_z') \\ &= v'^2 - e \end{aligned} \tag{55}$$

となる.

以上の事から波の活動度 A の保存則が得られた[*3]:

$$\frac{\partial}{\partial t}A + \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix} v'^2 - e \\ -u'v' \\ \rho_0 f_0(v'\theta'/\theta_{0z}) \end{pmatrix} = 0. \tag{56}$$

さらに (56) の zonal mean を取ることで,

$$\frac{\partial}{\partial t}[A] + \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0. \tag{57}$$

ここで $\boldsymbol{F}$ は子午面循環場での波の活動度フラックスであり, 次式で定義される:

$$\boldsymbol{F} \equiv \rho_0\begin{pmatrix} 0, \\ -[u'v'], \\ f_0[v'\theta']/\theta_{0z} \end{pmatrix} \tag{58}$$

[*3] A は **pesudo momentum**(擬運動量) と呼ばれる. 一般に pesudo momentum のフラックスを**エリアッセン–パームフラックス** (Eliassen–Palm flux) と言う.

2.3 TEM(Transform Eulerian Mean) 方程式系

以下では Transformed Eulerian Mean (以下, TEM) 方程式系を導出する. TEM 方程式系についてはいろいろな説明があるが, 「基本場の東西風加速に対する波の影響を定式化した系」と解釈すれば良い.

基本場の式の zonal mean は

$$\frac{\partial [u]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}[u'v'] - f[v_a] = 0, \tag{59}$$

$$\frac{\partial [\theta]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}[v'\theta'] + \left[w_a \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \right] = 0, \tag{60}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} v_a + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \rho_0 w_a = 0 \tag{61}$$

となる. これらを変形することで TEM 方程式形が得られる:

$$\frac{\partial [u]}{\partial t} - f v_a^* = \nabla \cdot \boldsymbol{F} \tag{62}$$

$$\frac{\partial [\theta]}{\partial t} + \left[w_a^* \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \right] = 0 \tag{63}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} v_a^* + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} w_a^* = 0 \tag{64}$$

ここで v_a^*, w_a^* は残差循環と呼ばれ, 次式で定義される:

$$v_a^* \equiv [v_a] - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{v'\theta'}{\Theta_{0z}} \right) \tag{65}$$

$$w_a^* \equiv [w_a] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{v'\theta'}{\Theta_{0z}} \right] \tag{66}$$

2.4 子午面循環場での flux による東西風加速 (減速)

東西風加速・減速と EP flux の収束・発散との関係は

$$\frac{\partial}{\partial t}[A] + \nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[u] - f v_a^* = \nabla\cdot\boldsymbol{F}$$

となる. この場合の東西風加速についての物理的解釈は以下の通りである.

フラックスの y 成分についての解釈は二次元の場合と変わらない (図 1 参照). すなわちフラックスは南北風による西風運動量の輸送を表現している.

フラックスの z 成分の解釈は温度風の関係式を用いる. 図 4 において $[v'\theta'] > 0$ ならば,

$$\frac{\partial[u']}{\partial z} \propto -\frac{\partial\theta'}{\partial y}$$

であるから, 温度傾度が解消され, 上層で西風減速が生じ, 下層で西風加速が生じる. この時 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ は上層で収束, 下層で発散しており, A が下層から上層へ輸送されていることとなる.

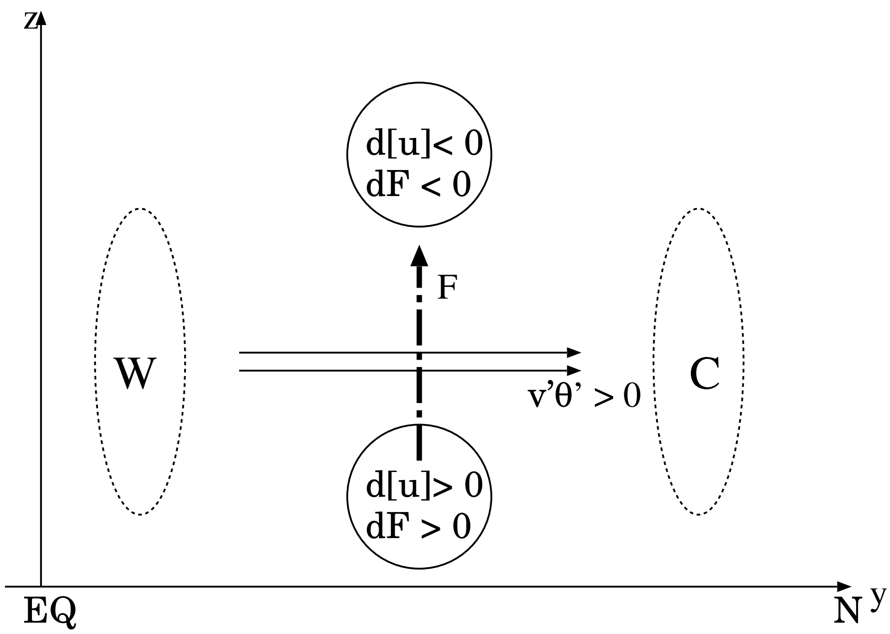

図 4

3 東西平均を取らないフラックス

擾乱が

$$\psi' = \psi_0 \sin(kx + ly - \omega t) = \psi_0 \sin\chi \tag{67}$$

と表わされるとする (位相を χ とした). この時

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y} = -l\psi_0 \cos\chi \tag{68}$$

$$v' = k\psi_0 \cos\chi \tag{69}$$

より

$$-u'v' = kl\psi_0^2 \cos^2\chi \tag{70}$$

となる.

波束の伝播を記述するためには, 流れの擾乱に対してなんらかの位相平均操作が必要になる. 前節までのように zonal mean をとるならば,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-u'v')\, dx \simeq \frac{1}{2}kl\psi_0^2 \tag{71}$$

となる. しかしながら zonal mean をとった波の活動度フラックスでは, フラックスの x 成分が消えるため, 波速の水平伝播を記述できない.

以下では, 東西平均をとらないフラックスの定義を幾つかレビューする[*4].

3.1 Plum(1986) のフラックス

平均操作として, 波の周期が明確な場合には, その周期で平均操作を取る事ができて

$$\frac{1}{T}\int_0^T (-u'v')\, dt \simeq kl\psi_0^2 \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\chi\, dt \to_{T\to\infty} \frac{1}{2}kl\psi_0^2 \tag{72}$$

[*4] 講演者は Trenberth(1986) のレビューも予定していたが, 時間の都合で割愛された.

となる. 時間平均操作について, その計算の詳細は省き, 概略にとどめる. 時間平均について,

$$\int_0^T u'\,dt = 0 \tag{73}$$

と仮定する. 以下では時間平均した量を $[a]$ で表わすとする. 結果として波の活動度フラックスは

$$\frac{\partial}{\partial t}[A] + \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0 \tag{74}$$

$$\boldsymbol{F} = \rho_0 \begin{pmatrix} [u][A] + [v'^2] - [e] \\ -[u'v'], \\ \frac{f^2}{N^2}[\psi'_x\psi'_z] \end{pmatrix} \tag{75}$$

となる.

これが Plumb(1986) の基本的なアイデアである. 移動性擾乱を相手にする場合には, 十分長い時間で平均を取れば波束の伝播を記述できる.

3.1.1 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}_g A$ の証明

Plumb(1986) で導出された波の活動度フラックスと群速度ベクトルが平行であることを確認する. 線型化した PV 保存則

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial q'}{\partial x} + v'\frac{\partial \overline{q}}{\partial y} = 0, \tag{76}$$

$$q' = \psi'_{xx} + \psi'_{yy} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\rho_0\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right\}, \quad \rho_0 = \rho_s\exp\left(-\frac{z}{H}\right) \tag{77}$$

において ψ' として平面波を仮定する:

$$\psi' = \psi_0\sin(kx + ly + mz - \omega t)\exp\left(\frac{z}{2H}\right) \tag{78}$$

これを渦位擾乱 (77) へ代入することで

$$q' = -\left\{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N^2}\left(m^2 + \frac{1}{4H^2}\right)\right\}\psi'. \tag{79}$$

よって分散関係は

$$\omega = k\overline{u} - \frac{k\overline{q}_y}{k^2 + l^2 + (f_0^2/N^2)m^2}. \tag{80}$$

位相速度と群速度は, 波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k \\ l \\ mf_0/N \end{pmatrix}$$

として

$$C_x = \overline{u} - \frac{\overline{q}_y}{\boldsymbol{k}^2}, \tag{81}$$

$$C_{gx} = \overline{u} + \frac{k^2 - l^2 - (f^2/N^2)m^2}{\boldsymbol{k}^4}\overline{q}_y, \tag{82}$$

$$C_{gy} = \frac{2kl}{\boldsymbol{k}^4}\overline{q}_y, \tag{83}$$

$$C_{gz} = \frac{2km}{\boldsymbol{k}^4}\left(\frac{f^2}{N^2}\right)\overline{q}_y. \tag{84}$$

Plumb(1986) における波の活動度フラックスの x 成分 $F_{(x)}$ は[*5]

$$F_{(x)} = [u][A] + [v'^2] - [e] \tag{85}$$

であり,

$$v'^2 = \frac{k^2}{2}\psi_0 \cos^2\chi \quad \rightarrow \quad [v'^2] = \frac{1}{4}\psi_0^2,$$

と

$$[A] = \left[\frac{q'^2}{2\overline{q}_y}\right] = \frac{\boldsymbol{k}^4\psi_0^2}{4\overline{q}_y}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
[v'^2] - [e] &= \frac{1}{2}[v'^2] - \frac{1}{2}[u'^2] - \frac{1}{2}\frac{f_0^2}{N^2}m'^2 \\
&= \frac{(k^2 - l^2 - \frac{f^2}{N^2}m^2)\overline{q}_y}{\boldsymbol{k}^4} \cdot \frac{\boldsymbol{k}^4}{4}\frac{\psi^2}{\overline{q}_y}
\end{aligned}$$

よって,

$$F_x = \left(\overline{u} + \frac{k^2 - l^2 - \frac{f^2}{N^2}m^2}{\boldsymbol{k}^4}\overline{q}_y\right) \cdot \frac{\boldsymbol{k}^4}{4}\frac{\psi_0^2}{\overline{q}_y} = C_{gx} \cdot [A] \tag{86}$$

となる. y, z 成分についても同様である.

[*5] 下付き添字 $_{x,y,z}$ で微分を表わしているので, 成分表示は $_{(x)},_{(y)},_{(z)}$ で表す.

今の場合 $\overline{v} = 0$ で議論したが, $\overline{v} \neq 0$ でもフラックスが群速度に比例 (平行) であることが示せる.

以上, Plumb のフラックスは移動性擾乱 (ストームトラック) の記述には大変便利である. しかしながら停滞性擾乱の記述には向かない. 時間平均をとっても, 停滞性擾乱が強く出てくるため, 波束の伝播を記述できないから.

3.2 停滞性擾乱:Plumb(1985) のフラックス

位相速度が非常にゆっくりとした停滞性擾乱の場合, Trenberth(1986) や Plumb (1986) のフラックスでは位相依存性を消去することができない. 停滞性擾乱への適用を想定し考えられた波の活動度フラックスが, Plumb (1985) のフラックスである.

波の活動度保存則から話を始める:

$$\frac{\partial}{\partial t}A + \nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0. \tag{87}$$

ここで, 渦位強制が存在しない場合に非発散となるベクトル $\boldsymbol{G}$ を導入し, 波の活動度保存則の左辺第二項に付加する:

$$\frac{\partial}{\partial t}A + \nabla\cdot(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = 0. \tag{88}$$

$\boldsymbol{G}$ の具体的な表現として Plumb は以下を与えた[*6]:

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi'^2 + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial \psi'^2}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\psi'^2 \\ -\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\psi'^2 \end{pmatrix}. \tag{89}$$

この時 $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$ は

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_x'^2 - \psi'\psi'_{xx} + \psi' q' + \overline{u}q'^2/\overline{q}_y \\ \psi'_x\psi'_y - \psi'\psi'_{xy} \\ \frac{f^2}{N^2}(\psi'_x\psi'_z - \psi'\psi'_{xz}) \end{pmatrix}. \tag{90}$$

[*6] Plumb が何故このように思いついたのかは不明

さらに停滞性擾乱がターゲットなので

$$\overline{u}\frac{\partial q'}{\partial x} + v'\frac{\partial \overline{q}}{\partial y} = 0$$

とし, さらに $\overline{u}$ は x に依存しないとして,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u}q' + \frac{\partial \overline{q}}{\partial y}\psi'\right) = 0$$

とする. $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$ の x 成分の第 3, 4 項は

$$\psi' q' + \overline{u}q'^2/\overline{q}_y = \frac{q'}{\overline{q}_y}(\psi'\overline{q}_y + \overline{u}q') \tag{91}$$

となり, この x 微分は 0 なので波の活動度に寄与しない. よってこれを無視する. 平面波解を仮定していることから

$$\begin{aligned}
&\psi' \sim \sin\chi \\
&\psi'_{xx} \sim -k^2\sin^2\chi, \\
&\psi'^2_x \sim k^2\cos^2\chi, \\
&-\psi'\psi'_{xx} \sim k^2\sin^2\chi
\end{aligned}$$

であるから, $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$ の x 成分は

$$\frac{\psi'_0}{2}k^2$$

となる.y, z 成分についても同様に計算すると, 結局

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{F}_s = \frac{\psi_0}{2}\begin{pmatrix} k^2 \\ kl \\ \frac{f^2}{N^2}km \end{pmatrix} \tag{92}$$

となり, 位相依存性を消去できた.

波の活動度フラックス $\boldsymbol{F}$ に非発散場 $\boldsymbol{G}$ を加えているため, いままでと異なり $\boldsymbol{F}_s \neq \boldsymbol{C}_g A$ となっている. これを確認する.

Rossby 波の位相速度と群速度について停滞性擾乱を考えているとすれば, 位相速度 $C_x = 0$ となるので,

$$C_x = \overline{u} - \frac{\overline{q}_y}{\boldsymbol{k}^2} = 0 \quad \rightarrow \overline{u} = \frac{\overline{q}_y}{\boldsymbol{k}^2}. \tag{93}$$

よって群速度 C_{gx} は

$$C_{gx} = \frac{2k^2\overline{q}_y}{\boldsymbol{k}^4} \tag{94}$$

となり, $\boldsymbol{F}_s \neq \boldsymbol{C}_g A$ となっている.

さらに, 波の活動度 A は

$$A = \frac{q'^2}{2\overline{q}_y} \propto \sin^2\chi \tag{95}$$

のままであり, 位相依存性を消去できていない.

ここで Plumb(1985) では, 波のエネルギー e を平均流 $\boldsymbol{u}$ で割った量を波の活動度に付加して

$$A_s \equiv A + \frac{e}{\overline{u}} \tag{96}$$

とした. この時

$$\boldsymbol{F}_s \propto \boldsymbol{C}_g \cdot A_s \tag{97}$$

となることは, 直接計算で確かめることができる[*7].

- 停滞性擾乱の解析に良い例: 波数成分が 1〜2 の場合
- 駄目な例: 波数成分が 3〜
  Plumb(1985) では基本場として帯状平均場を用いている. 波数成分が 3 以上になると, 帯状平均場が東西一様である, という仮定が成り立たない.

[*7] 詳細は割愛し, 概略だけ述べるに留める:

$$\begin{aligned}
&A \sim \frac{\boldsymbol{k}^4\psi_0^2}{2\overline{q}_y}\sin^2\chi, \quad (\psi = \psi_0\sin\chi)\\
&e \sim \frac{\boldsymbol{k}^2\psi_0^2}{2}\cos^2\chi,\\
&C_x = \overline{u} - \frac{\overline{q}_y}{\boldsymbol{k}^2},\\
&\frac{e}{\overline{u}-c} \sim \frac{\boldsymbol{k}^4\psi_0^2}{2\overline{q}_y}\cos^2\chi,\\
&\to \frac{1}{2}\left[A + \frac{e}{\overline{u}-c}\right] = \frac{\boldsymbol{k}^4\psi_0^2}{4\overline{q}_y}.
\end{aligned}$$

どんな波でもフーリエ展開すれば sin or cos なんで, 上の結果は適応可能か, といえばそうでも無い. WKBJ が適応できる状況, という条件がつきそう.

3.3 保存則を用いた Plumb(1985) のフラックスの導出

Plum (1985) は

$$A_s \equiv A + \frac{e}{\overline{u}}$$

なる量を定義することで, 位相依存性のない波の活動度の保存則を求めた. ただし, その手法は発見的であり, 物理的な意味を把みづらい. ここでは A と e の保存則を用いて Plumb (1985) のフラックスを演繹的に導出する.

保存則を具体的に求めてみる. 線型化された渦度方程式

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial q'}{\partial x} + \overline{q}_y v' = 0 \tag{98}$$

と流線関数 ψ' と積を取る. 左辺第 1 項, 第 2 項はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\text{第 1 項：}\quad \psi'\frac{\partial q'}{\partial t} &= \psi'\frac{\partial}{\partial t}\left\{\psi'_{xx} + \psi'_{yy} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix}\psi'\psi'_{xt} \\ \psi'\psi'_{yt} \\ \psi'\psi'_{zt}\end{pmatrix} - \frac{\partial e}{\partial t} \\
\text{第 2 項：}\quad \overline{u}\frac{\partial q'}{\partial x} &= \overline{u}\cdot\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix}\psi'\psi'_{xx} \\ \psi\psi'_{xy} \\ \frac{f^2}{N^2}\psi'\psi'_{xz}\end{pmatrix} - \overline{u}\frac{\partial e}{\partial x}
\end{aligned}$$

となる.

ここで

$$\boldsymbol{R}_1 \equiv \rho_0\begin{pmatrix}\psi'\psi'_{xt} \\ \psi'\psi'_{yt} \\ \frac{f^2}{N^2}\psi'\psi'_{zt}\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_2 \equiv \rho_0\begin{pmatrix}\psi'\psi'_{xx} \\ \psi\psi'_{xy} \\ \frac{f^2}{N^2}\psi'\psi'_{xz}\end{pmatrix} \tag{99}$$

として, さらに $1/(\overline{u}-c)$ をかけて整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{e}{\overline{u}-c} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e}{\overline{u}-c} - \frac{1}{\rho_0}\frac{1}{\overline{u}-c}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_1 - \frac{\overline{u}}{\rho_0(\overline{u}-c)}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2 - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overline{q}_y}{2(\overline{u}-c)}\psi'^2\right) = 0 \tag{100}$$

が得られる.

また,

$$
\begin{aligned}
\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e}{\overline{u}-c} &= \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e}{\overline{u}-c} \\
&= c\frac{\partial}{\partial x}\frac{e}{\overline{u}-c} + \frac{\partial}{\partial x}e, \\
\frac{\overline{u}}{\rho_0(\overline{u}-c)}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2 &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{c}{\overline{u}-c}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2 - \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\frac{\partial}{\partial t}\frac{e}{\overline{u}-c}+c\frac{\partial}{\partial x}\frac{e}{\overline{u}-c}+\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix} -\psi'\psi'_{xx} \\ -\psi'\psi'_{xy} \\ -\frac{f^2}{N^2}\psi'\psi'_{xz} \end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}e-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\overline{q}_y\psi'^2}{2(\overline{u}-c)}-\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{\overline{u}-c}(\nabla\cdot\boldsymbol{R}_1+c\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2) = 0 \tag{101}
$$

となる.

また A については

$$
\frac{\partial}{\partial t}A + C\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix} v'^2 - e \\ -u'v' \\ \frac{f^2}{N^2}\psi'_x\psi'_z \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overline{u}-c}{2}\frac{\partial q'^2}{\partial \overline{q}_y}\right) = 0 \tag{102}
$$

となるので, 両辺を足しあわせて

$$
M \equiv \frac{1}{2}\left(A + \frac{e}{\overline{u}-c}\right) \tag{103}
$$

と定義すれば,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}M + c\frac{\partial}{\partial x}M + \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix} \psi'^2_x - \psi'\psi'_{xx} \\ \psi'_x\psi'_y - \psi'\psi'_{xy} \\ \frac{f^2}{N^2}(\psi'_x\psi'_z - \psi'\psi'_{xz}) \end{pmatrix} \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{(\overline{u}-c)q'^2}{4\overline{q}_y} - \frac{\overline{q}_y\psi'^2}{4(\overline{u}-c)}\right\} - \frac{1}{2\rho_0}\frac{1}{\overline{u}-c}(\nabla\cdot\boldsymbol{R}_1 + c\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2) = 0.
\end{aligned} \tag{104}
$$

ここでさらに, 停滞性擾乱を考えているとして

$$
\frac{\partial}{\partial t} \simeq -i\omega \simeq -ick \simeq -c\frac{\partial}{\partial x}
$$

を渦度方程式に適応することで,

$$
\begin{aligned}
&(\overline{u}-c)\frac{\partial}{\partial x}q' + \overline{q}_y v' = 0 \\
&\to \frac{\partial}{\partial x}\left\{(\overline{u}-c)q' + \overline{q}_y\psi'\right\} \simeq 0.
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{(\overline{u}-c)q'^2}{4\overline{q}_y}-\frac{\overline{q}_y\psi'^2}{4(\overline{u}-c)}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\overline{q}_y}{4(\overline{u}-c)}\Big(\frac{\overline{u}-c}{\overline{q}_y}q'+\psi'\Big)\Big(\frac{\overline{u}-c}{\overline{q}_y}q'-\psi'\Big)\right\}=0$$

であり[*8], 同様に

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{R}_1+c\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2)=\Big(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\Big)e+\psi'\Big(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\Big)q'=0$$

となる.

最終的に以下の Plumb(1985) のフラックス $\boldsymbol{W}$ が得られる:

$$\frac{\partial}{\partial t}M+c\frac{\partial}{\partial x}M+\nabla\cdot\boldsymbol{W}=0 \tag{105}$$

$$M\equiv\frac{1}{2}\left(A+\frac{e}{\overline{u}-c}\right) \tag{106}$$

$$\boldsymbol{W}\equiv\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi_x'^2-\psi'\psi'_{xx}\\ \psi'_x\psi'_y-\psi'\psi'_{xy}\\ \frac{f^2}{N^2}(\psi'_x\psi'_z-\psi'\psi'_{xz})\end{pmatrix} \tag{107}$$

この小節でのフラックスの導出が Plumb(1985) よりも良い点は,

- 2 つの保存則を組み合わせた事で導出の見通しが良いこと
- $c\neq 0$ の擾乱についても適用できること

である.

3.4 ここまでのまとめ.

ここまでの話の流れをまとめる.

導出されてきたフラックスについては

*8 正しくは

$$(\overline{u}-c)q'+\psi'\overline{q}_y=const.$$

である. 適切な境界条件を取れば, この値を 0 にすることが可能である.

- 基本場は東西一様
- $c = 0$ の場合: Plumb(1985) で定義されたフラックス
  - 位相依存するので, 停滞性擾乱には使えない.
- $c \neq 0$ の場合: 次式で定義される M の保存則とフラックスを用いる.

$$M \equiv \frac{1}{2}\Big(A + \frac{e}{\overline{u} - c}\Big) \tag{108}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M + \frac{\partial}{\partial x} cM + \nabla\cdot\boldsymbol{W} = 0 \tag{109}$$

$$\boldsymbol{W} \equiv \begin{pmatrix} \psi_x'^2 - \psi'\psi'_{xx} \\ \psi'_x\psi'_y - \psi'\psi'_{xy} \\ \frac{f^2}{N^2}(\psi'_x\psi'_z - \psi'\psi'_{xz}) \end{pmatrix} \tag{110}$$

  - 位相依存しないのは $\sin^2\chi + \cos^2\chi = 1$ となるから.
  - この式は位相平均操作を用いていない.
  - 結果として flux は位相依存しないので, 停滞性擾乱の解析にも使える.

- 林さんの質問:
  WKBJ を用いて, u の時間変化をまじめにやったうまくいくか?
  $\rightarrow$ そうでも無い, らしい (by 高谷さん)
- 森さんの質問:
  $c \neq 0$ でもフラックスの形は変わっていないのでは?
  $\rightarrow$ c の形が決まっているのならば,

$$\boldsymbol{W}_T \equiv \begin{pmatrix} cM + \psi_x'^2 - \psi'\psi'_{xx} \\ \psi'_x\psi'_y - \psi'\psi'_{xy} \\ \frac{f^2}{N^2}(\psi'_x\psi'_z - \psi'\psi'_{xz}) \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}_g \cdot M \tag{111}$$

  となる事が証明できる. ただし, 実際には c の形を決めるのが困難. プロットする時には, 例えば x 方向については

$$cM + \psi_x'^2 - \psi'\psi'_{xx} \tag{112}$$

  を描くことになる.
- オーダの議論 (マニアックネタ?)

$$M = \frac{1}{2}\bigg(\frac{q'^2}{2\overline{q}_y} + \frac{e}{\overline{u} - c}\bigg),$$

$$\psi = A(X,Y,Z)\sin(kx+ly+mz-\omega t),$$
$$M = \frac{\boldsymbol{k}^4}{4}\frac{\psi_0^2}{\overline{q}_y} + O(\varepsilon).$$

結果として $\dfrac{\partial M}{\partial t}$ の位相は時間に依存する. しかしながら

$$\psi_x'^2 - \psi'\psi_{xx}' = k^2\psi_0^2 + O(\varepsilon^2)$$

なので, フラックスの発散の位相は時間に依存しない. ここで M のかわりに,

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x} \equiv \zeta'$$

となる Γ を導入して 次式で定義される $\tilde{M}$ を考えると

$$\tilde{M} \equiv \left(\frac{\zeta'^2}{2\beta} - \frac{\Gamma\zeta' x}{2\beta}\right) = \frac{\boldsymbol{k}^4}{4}\frac{\psi_0^2}{\overline{q}_y} + O(\varepsilon^2)$$

となって, 幸せになれる. しかしながら, その物理的な意味がわからない.

4 東西非一様基本場への拡張:Takaya and Nakamura(2001)

考えている状況によっては, 基本場を東西非一様とした方が都合が良い. ただし, 東西非一様な基本場では, 保存則が成立しないので, 近似的な保存則を求めることとする.

考えている基本場の定義:

$$\overline{\boldsymbol{u}} = (U, V, 0). \tag{113}$$

ただし, 基本場は定常であり, さらに基本場の空間変化は非常にゆっくりとした変化 (準定常) だと仮定する. また, 基本場に沿った方向の位相速度を C_p とする (図 5).

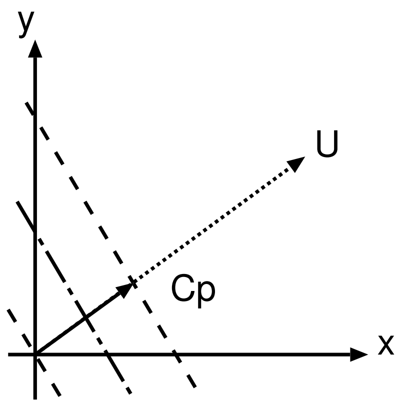

図 5 $\overline{u}$ と C_p

また, 基本場は強制項が存在しない, と仮定する:

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{q}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{q}}{\partial y} = 0. \tag{114}$$

これは基本場が定常解である, という事の数式での表現である (図 6).

線型化された PV 保存則から話を始める:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \overline{U}\frac{\partial q'}{\partial x} + \overline{V}\frac{\partial q'}{\partial y} + \overline{u'}\frac{\partial \overline{q}}{\partial x} + \overline{v'}\frac{\partial \overline{q}}{\partial y} = 0. \tag{115}$$

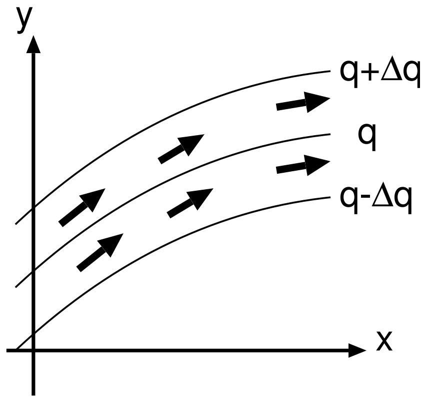

図 6　基本場のポテンシャル渦度と流れの場

東西一様の場合の波の活動度は

$$A \equiv \frac{q'^2}{2\overline{q}_y}$$

であった. 東西非一様な基本場での波の活動度 を Plumb(1985) に従い, 次式で定義する:

$$A \equiv \frac{q'^2}{2|\nabla_h \overline{q}|}. \tag{116}$$

ここで ∇_h は水平勾配である. また, 東西一様な場合の波のエネルギーは

$$\epsilon = \frac{e}{\overline{u} - c} \tag{117}$$

であった. 東西非一様な場合には, 上式を

$$\epsilon \equiv \frac{e}{|\boldsymbol{u}| - C_p} \tag{118}$$

と拡張する.

これらを足し合わせた

$$M \equiv \frac{1}{2}(A + \epsilon) \tag{119}$$

の (近似的な) 保存則を, 以下では導出する.

4.1 A の保存則

線型化された PV 保存則と $q'/|\nabla_h\overline{q}|$ の積を取る:

$$\frac{1}{|\nabla_h\overline{q}|}\Big(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}+V\frac{\partial}{\partial y}\Big)\frac{q'^2}{2}+\frac{1}{|\nabla_h\overline{q}|}u'q'\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}+\frac{1}{|\nabla_h\overline{q}|}v'q'\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}=0. \tag{120}$$

ここで,

$$\frac{1}{|\nabla_h\overline{q}|}\frac{\partial}{\partial t}\frac{q'^2}{2}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{q'^2}{2|\nabla_h\overline{q}|}=\frac{\partial}{\partial t}A \tag{121}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\nabla_h\overline{q}|}\Big(U\frac{\partial}{\partial x}+V\frac{\partial}{\partial y}()\Big)\frac{q'^2}{2}&=\frac{1}{2|\nabla_h\overline{q}|}\Big\{u'q'\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}+v'q'\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}\Big\}\\&\simeq\frac{\partial}{\partial x}(UA)+\frac{\partial}{\partial y}(VA)\end{aligned} \tag{122}$$

最後の式変形では, 基本場が非常にゆっくりと変化するので微分の中に入れることができる, と近似した.

また,

$$u'q'=\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix}u'v'\\ e-u'^2\\ -\frac{f^2}{N^2}\end{pmatrix}\quad,v'q'=\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix}v'^2-e\\ u'v'\\ \frac{f^2}{N^2}\psi'_x\psi'_z\end{pmatrix} \tag{123}$$

$$\rightarrow\frac{1}{|\nabla_h\overline{q}|}u'q'\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}+\frac{1}{|\nabla_h\overline{q}|}v'q'\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}\simeq\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\frac{1}{|\nabla\overline{q}|}\begin{pmatrix}\overline{q}_y(v'^2-e)+\overline{q}_x(u'v')\\ \overline{q}_y(-u'v')+\overline{q}_x(e-u'^2)\\ \overline{q}_y\frac{f^2}{N^2}\psi'_x\psi'_z-\overline{q}_x\frac{f^2}{N^2}\psi'_y\psi'_z\end{pmatrix} \tag{124}$$

ここで基本場の変化がゆっくりであるとして, $|\nabla\overline{q}|$ を微分の中に入れた.

また基本場が定常であるという条件式より,

$$\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}=-\frac{V}{U}\frac{\partial\overline{q}}{\partial y} \tag{125}$$

であるから, 近似的に

$$\frac{\overline{q}_y}{|\nabla_h\overline{q}|}\simeq\frac{U}{|\overline{\boldsymbol{u}}|},\quad\frac{\overline{q}_x}{|\nabla_h\overline{q}|}\simeq-\frac{V}{|\overline{\boldsymbol{u}}|} \tag{126}$$

となるので, 結局

$$\frac{1}{|\nabla_h \overline{q}|}u'q'\frac{\partial \overline{q}}{\partial x} + \frac{1}{|\nabla_h \overline{q}|}v'q'\frac{\partial \overline{q}}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\frac{1}{|\nabla \overline{q}|}\begin{pmatrix} \overline{q}_y(v'^2 - e) + \overline{q}_x(u'v') \\ \overline{q}_y(-u'v') + \overline{q}_x(e - u'^2) \\ \overline{q}_y \frac{f^2}{N^2}\psi'_x\psi'_z - \overline{q}_x \frac{f^2}{N^2}\psi'_y\psi'_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\frac{\rho_0}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\begin{pmatrix} U(v'^2 - e) + V(-u'v') \\ U(-u'v') + V(u'^2 - e) \\ \frac{f^2}{N^2}\{U\psi'_x\psi'_z + V\psi'_y\psi'_z\} \end{pmatrix}. \tag{127}$$

以上をまとめて

$$\frac{\partial}{\partial A} + \nabla\cdot\begin{pmatrix} UA \\ VA \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\frac{\rho_0}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\begin{pmatrix} U(v'^2 - e) + V(-u'v') \\ U(-u'v') + V(u'^2 - e) \\ \frac{f^2}{N^2}\{U\psi'_x\psi'_z + V\psi'_y\psi'_z\} \end{pmatrix} \tag{128}$$

ここで, 後の便利のために

$$\nabla\cdot\begin{pmatrix} UA \\ VA \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}UA + \frac{\partial}{\partial y}VA$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}U + \frac{C_p U}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}A\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}V + \frac{C_p V}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}A\right\}$$

$$= \nabla\cdot\boldsymbol{N} + \nabla\cdot\boldsymbol{C}_v A \tag{129}$$

$$\tag{130}$$

とする. $\boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{C}_U, \boldsymbol{E}$ は以下で定義した:

$$\boldsymbol{N}^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}U \\ \frac{|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}V \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_U \equiv \begin{pmatrix} \frac{U}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}C_p \\ \frac{V}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}C_p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} \equiv \frac{\rho_0}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\begin{pmatrix} U(v'^2 - e) + V(-u'v') \\ U(-u'v') + V(u'^2 - e) \\ \frac{f^2}{N^2}\{U\psi'_x\psi'_z + V\psi'_y\psi'_z\} \end{pmatrix} \tag{131}$$

$\boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{C}_U, \boldsymbol{E}$ を用いると, 東西一様基本場における波の活動度保存則と対応がつきやすい:

$$\text{東西非一様：}\quad \frac{\partial}{\partial t}A + \nabla\cdot\boldsymbol{C}_U A + \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\boldsymbol{E} + \nabla\cdot\boldsymbol{N}^{(1)} = 0, \tag{132}$$

$$\text{東西一様：}\quad \frac{\partial}{\partial t}A + \frac{\partial}{\partial x}cA + \nabla\cdot\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u} - c)\frac{q'^2}{2\overline{q}_y} = 0.$$

4.2 ϵ の保存則

次に

$$\epsilon \equiv \frac{e}{|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p}$$

の保存則を求める. 線型化された PV 保存則と $-\psi'/(\overline{\boldsymbol{u}} - C_p)$ の積をとって

$$-\frac{1}{\overline{\boldsymbol{u}} - C_p}\Big(\psi'\frac{\partial q'}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{u}}\psi'\nabla q' + \boldsymbol{u}'\psi'\nabla\overline{q}\Big) = 0 \tag{133}$$

ここで

$$\psi'\frac{\partial q'}{\partial t} = -\nabla\cdot\begin{pmatrix}\psi'\psi'_{xt}\\ \psi'\psi'_{yt}\\ 0\end{pmatrix} - \frac{\partial e}{\partial t}$$

であるから, 右辺第 1 項は

$$\frac{\partial}{\partial t}\epsilon - \frac{1}{|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p} - \nabla\cdot\begin{pmatrix}\psi'\psi'_{xt}\\ \psi'\psi'_{yt}\\ 0\end{pmatrix} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\epsilon - \frac{1}{|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_1 \tag{134}$$

また第 2 項は

$$\begin{aligned}&-\frac{U}{|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p}\psi\frac{\partial q'}{\partial x} - \frac{V}{|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p}\psi\frac{\partial q'}{\partial y}\\ &\qquad = -\Big(\frac{U}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\frac{C_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p}\frac{U}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\Big)\psi\frac{\partial q'}{\partial x} - \Big(\frac{V}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\frac{C_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p}\frac{V}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\Big)\psi\frac{\partial q'}{\partial y}.\end{aligned} \tag{135}$$

ここで

$$\psi'\frac{\partial q'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix}\psi'\psi'_{xx}\\ \psi'\psi'_{xy}\\ -\frac{f^2}{N^2}\psi'_{xz}\end{pmatrix} - \frac{\partial e}{\partial x} \tag{136}$$

であるから,

$$\begin{aligned}&-\frac{U}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\psi\frac{\partial q'}{\partial x} - \frac{V}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\psi\frac{\partial q'}{\partial y}\\ &\quad = \frac{U}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\Bigg(\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix}-\psi'\psi'_{xx}\\ -\psi'\psi'_{xy}\\ -\frac{f^2}{N^2}\psi'_{xz}\end{pmatrix} + \frac{\partial e}{\partial x}\Bigg) + \frac{V}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\Bigg(\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix}-\psi'\psi'_{xy}\\ -\psi'\psi'_{yy}\\ -\frac{f^2}{N^2}\psi'_{yz}\end{pmatrix} + \frac{\partial e}{\partial x}\Bigg)\\ &\quad \simeq \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\frac{\rho_0}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\begin{pmatrix}eU - U\psi'\psi'_{xx} - V\psi'\psi'_{xx}\\ eV - U\psi'\psi'_{xy} - V\psi'\psi'_{yy}\\ -\frac{f^2}{N^2}(U\psi'\psi'_{xz} + V\psi'\psi'_{yz})\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{H}\end{aligned} \tag{137}$$

最後では, 基本場の変化がゆっくりであると近似し微分の中に入れた*9.

また

$$
\begin{aligned}
&-\frac{C_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\frac{U}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\psi'\frac{\partial q'}{\partial x}-\frac{C_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\frac{V}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\psi'\frac{\partial q'}{\partial y}\\
&\qquad\simeq\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{UC_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\frac{e}{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\right)\frac{C_p}{\rho_0|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\frac{U}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix}-\psi'\psi'_{xx}\\-\psi'\psi'_{xy}\\-\frac{f^2}{N^2}\psi'\psi'_{xz}\end{pmatrix}\\
&\qquad\quad+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{VC_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\frac{e}{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\right)\frac{C_p}{\rho_0|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\frac{V}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix}-\psi'\psi'_{xy}\\-\psi'\psi'_{yy}\\-\frac{f^2}{N^2}\psi'\psi'_{yz}\end{pmatrix}\\
&\qquad=\nabla\cdot\boldsymbol{C}_U\epsilon-\frac{C_p}{\rho_0|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\left\{\frac{U}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2+\frac{V}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_3\right\}.
\end{aligned}\tag{138}
$$

ここで

$$
\boldsymbol{R}_2\equiv\rho_0\begin{pmatrix}-\psi'\psi'_{xx}\\-\psi'\psi'_{xy}\\-\frac{f^2}{N^2}\psi'\psi'_{xz}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}_3\equiv\rho_0\begin{pmatrix}-\psi'\psi'_{xy}\\-\psi'\psi'_{yy}\\-\frac{f^2}{N^2}\psi'\psi'_{yz}\end{pmatrix}\tag{139}
$$

と定義した*10

最後に

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\left\{u'\psi'\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}+v'\psi'\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}\right\}&=-\frac{1}{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\left\{-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}\psi'^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}\psi'^2\right)\right\}\\
&\simeq\nabla\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{\overline{q}_y}{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\psi'^2\\-\frac{1}{2}\frac{\overline{q}_x}{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\psi'^2\\0\end{pmatrix}\\
&=\nabla\cdot\boldsymbol{N}^{(2)}.
\end{aligned}\tag{140}
$$

$\boldsymbol{N}^{(2)}$ は次式で定義される*11.

$$
\boldsymbol{N}^{(2)}\equiv\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{\overline{q}_y}{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\psi'^2\\-\frac{1}{2}\frac{\overline{q}_x}{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\psi'^2\\0\end{pmatrix}\tag{141}
$$

*9 Takaya and Nakamura(2001), (19) 式の変形である.
*10 Takaya and Nakamura(2001), (17) 式の変形である.
*11 Takaya and Nakamura(2001), (21), (22) 式の変形である.

これらの式をまとめることで ϵ の保存則が得られた:

$$\frac{\partial}{\partial t}\epsilon + \nabla\cdot \boldsymbol{C}_U\epsilon + \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\boldsymbol{H} + \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\boldsymbol{N}^{(2)} - \frac{1}{\rho_0|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p}\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{R}_1 + \frac{C_pU}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2 + \frac{C_pV}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_3\right\} = 0 \quad (142)$$

4.3 波の活動度保存則の導出

Takaya & Nakamura(2001) では, 波の活動度として

$$M = \frac{1}{2}(A + \epsilon) \quad (143)$$

を用いている. M についての保存則は, A についての保存則と ϵ についての保存則を足し合わせることで

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}M + \nabla\cdot\boldsymbol{C}_U M \\
&+\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{H}) + \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{N}^{(1)} + \boldsymbol{N}^{(2)}) \\
&-\frac{1}{2\rho_0(|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p)}\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{R}_1 + \frac{C_pU}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2 + \frac{C_pV}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_3\right\} = 0.
\end{aligned} \quad (144)$$

$\boldsymbol{N}^{(1)} + \boldsymbol{N}^{(2)}$ の発散の項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{N}^{(1)} + \boldsymbol{N}^{(2)}) &= \frac{1}{2\rho_0}\nabla\cdot\begin{pmatrix} \frac{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}{|\overline{u}|}UA - \frac{\overline{q}_y}{2|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\psi'^2 \\ \frac{|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}{|\overline{u}|}VA - \frac{\overline{q}_x}{2|\overline{\boldsymbol{u}}|-C_p}\psi'^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
x\,\text{成分} &= \frac{U}{2(|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p)|\nabla\overline{q}|}\left((|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p)^2 q'^2 - |\nabla\overline{q}|^2\psi^2\right) \\
&= \frac{U}{2(|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p)|\nabla\overline{q}|}\left((|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p)q' + |\nabla\overline{q}|\psi\right)\left((|\overline{\boldsymbol{u}}| - C_p)q' - |\nabla\overline{q}|\psi\right).
\end{aligned} \quad (145)$$

ここで, 擾乱の PV 方程式に戻り考察すると図 7 より

$$\frac{\partial}{\partial t}q' + U\cdot\nabla q' + \boldsymbol{u}'\nabla\overline{q} = 0 \quad (146)$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}q' + U\frac{\partial}{\partial X}q' + \frac{\partial\psi'}{\partial X}\frac{\partial\overline{q}}{\partial Y} = 0 \quad \text{(座標の回転, 流線に沿った座標へ)}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial X}\{(|\overline{\boldsymbol{u}} - C_p|)q' + |\nabla_h\overline{q}|\psi'\} = 0 \quad \text{(移流の速度は } C_p \text{ だから)} \quad (147)$$

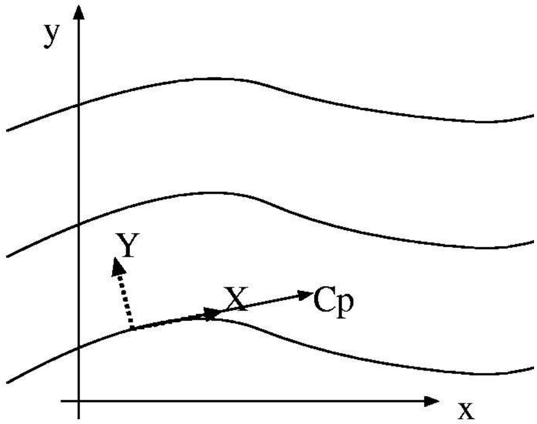

図 7　C_p と (X, Y)

これを代入することで, 結局

$$\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{N}^{(1)}+\boldsymbol{N}^{(2)})=0 \tag{148}$$

となる.

また,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_1+\frac{UC_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2+\frac{VC_p}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_2 &= \Big(\frac{\partial e}{\partial t}+C_p\frac{\partial e}{\partial X}\Big)+\psi'\Big(\frac{\partial q'}{\partial t}+C_p\frac{\partial q'}{\partial X}\Big)\\ &\simeq 0 \qquad \because\ \frac{\partial}{\partial t}\simeq -C_p\frac{\partial}{\partial X}\end{aligned} \tag{149}$$

最後に

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\equiv\frac{\rho_0}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\begin{pmatrix}U(v'^2-e)+V(-u'v')\\ U(-u'v')+V(u'^2-e)\\ \frac{f^2}{N^2}\{U\psi'_x\psi'_z+V\psi'_y\psi'_z\}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}\equiv\frac{\rho_0}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\begin{pmatrix}eU-U\psi'\psi'_{xx}-V\psi'\psi'_{xx}\\ eV-U\psi'\psi'_{xy}-V\psi'\psi'_{yy}\\ -\frac{f^2}{N^2}(U\psi'\psi'_{xz}+V\psi'\psi'_{yz})\end{pmatrix}\\ &\to\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H})=\frac{\rho_0}{|\overline{\boldsymbol{u}}|}\begin{pmatrix}U(\psi'^2_x-\psi'\psi'_{xx})+V(\psi'_x\psi'_y-\psi'\psi'_{xy})\\ V(\psi'_x\psi'_y-\psi'\psi'_{xy})+V(\psi'^2_y-\psi'\psi'_{yy})\\ \frac{f^2}{N^2}\{U(\psi'_x\psi'_z-\psi'\psi'_{xz})+V(\psi'_y\psi'_z-\psi'\psi'_{yz})\}\end{pmatrix}\equiv\boldsymbol{W}_s\end{aligned} \tag{150}$$

$\boldsymbol{W}_s$ の各成分の項は, ψ' の一次微分の積, もしくは ψ' と ψ' の二次微分の積なので, $\psi\sim\psi_0\sin\chi$ とすれば, 位相依存性が消える.

結果をまとめると,

$$M = \frac{1}{2}(A + \epsilon) \tag{151}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}M + \nabla\cdot\boldsymbol{C}_U M + \nabla\cdot\boldsymbol{W}_s = 0 \tag{152}$$

となる. $\boldsymbol{W}$ を

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{C}_U M + \boldsymbol{W}_S \tag{153}$$

と定義すれば, M の保存則として

$$\frac{\partial}{\partial t}M + \nabla\cdot\boldsymbol{W} = 0 \tag{154}$$

となる. また $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{C}_g \cdot M$ となることが示されている (計算の詳細は割愛する).

4.4 W_s の御利益について

- 基本場の構造が小さい (波数が大きい) 場合の解析では良い感じ.
- プロットしているのは $\boldsymbol{W}_s$. $\boldsymbol{C}_U$ を描くのは難しい.
- どこで使えるか, 使えないか?
  - 準定常ならそのまま使えるだろう.
  - 長期間の現象を解析するならば, Plumb(1986)
  - スナップショットを解析するならば, Takaya & Nakamura(2001). ただし C_p を見積もるのが容易では無い. テッドシェファードさん曰く擬エネルギー $\tilde{E}$ を使えば, 例えば

    $$\tilde{E} = e - UA = cA \quad (\text{平均操作をすると}) \quad \rightarrow \frac{[E]}{[A]} = c \tag{155}$$

    と, 位相速度が求められるかも (高谷さんは試していない).
  - 東西一様な場で考えると,

    $$\frac{\partial}{\partial t}M + \frac{\partial}{\partial x}cM + \nabla\cdot\boldsymbol{W}_s = 0 \tag{156}$$

    この場合 cM が擬エネルギーとなっている.
  - Takaya & Nakamura Flux を使って解析する場合の注意点. Takaya & Nakamura Flux は全て流線関数 ψ' で記述されているので, 生データの風速場をそのまま使うのはタタリがある事もある (だいたい良いけれど). ψ' は, つまる所地衡流成分 v_g なので, 非地衡流成分が大きいと駄目. それに注意しましょう.

5 三次元 TEM 方程式系

TEM 方程式系

$$\frac{\partial[A]}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0, \tag{157}$$

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} - f v_a^* = \nabla\cdot\boldsymbol{F}, \tag{158}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -[u'v'] \\ \frac{f_0}{\theta_{0z}}[v'\theta'] \end{pmatrix} = [v'q'] \tag{159}$$

を 3 次元に拡張することを考える[*12].

$$\psi = \Psi(y,z) = \psi'$$

と物理量を平均場と擾乱にわけたときに, 擾乱場については以下のような平均がとれる理想的な系を考える.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \psi\, dt = 0.$$

5.1 Plumb (1986) の場合

3 次元の波の活動度の保存の式は

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u}\overline{A}) + \nabla\cdot\begin{pmatrix} \overline{v'^2} - \overline{e} \\ -\overline{u'v'} \\ \frac{f_0}{\theta_{0z}}\overline{v'\theta'} \end{pmatrix} = 0$$

これは Plumb (1986) の波の活動度の保存の式で $\overline{v} = 0$ とした式に等しい.

平均流の式は右辺に

$$\overline{v'q'} = \nabla\cdot\begin{pmatrix} \overline{v'^2} - \overline{e} \\ -[u'v'] \\ \frac{f_0}{\theta_{0z}}[v'\theta'] \end{pmatrix}$$

[*12] 以下の節はセミナー終了後に, 有志だけで行なわれた内容である

が現れるよう, 以下のように変形を行う.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\overline{u} - f\overline{v}_a &= -\frac{\partial}{\partial x}u^{'2} - \frac{\partial}{\partial y}u'v' + \frac{\partial}{\partial x}v^{'2} - \frac{\partial}{\partial x}v^{'2} + \frac{\partial}{\partial x}e - \frac{\partial}{\partial x}e + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0}{\theta_{0z}}v'\theta' - \frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0}{\theta_{0z}}v'\theta' \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(v^2 - e) + \frac{\partial}{\partial y}(-u'v') + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0}{\theta_{0z}}v'\theta' \\
&= +\left\{\frac{\partial}{\partial x}(e - u^{'2}) - \frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0}{\theta_{0z}}v'\theta'\right\}
\end{aligned}$$

$$v_a^* \equiv v_a - \frac{1}{f_0}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^{'2}}{2} + \frac{v^{'2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{f_0^2}{N^2}\psi_z^{'2}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{f_0^2}{N^2}\overline{\psi'_x\psi'_z}\right)\right\}$$

と定義すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u} - fv_a^* = \overline{v'q'} = \nabla\cdot\begin{pmatrix} \overline{v'^2} - \overline{e} \\ -[u'v'] \\ \frac{f_0}{\theta_{0z}}[v'\theta'] \end{pmatrix}$$

このとき波の活動度の式は

$$\frac{\partial\overline{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u}\overline{A}) + \nabla\cdot\begin{pmatrix} \overline{v'^2} - \overline{e} \\ -\overline{u'v'} \\ \frac{f_0}{\theta_{0z}}\overline{v'\theta'} \end{pmatrix} = 0$$

となる. ここで注意すべきは, 波の活動度の変化 は $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ だけでなく, 移流項にも依存することである.

形式的にフラックスの収束によって波の活動度が変化する, という式にすると,

$$\boldsymbol{M}_T \equiv= \begin{pmatrix} \overline{u}A + \overline{v'^2} - \overline{e} \\ -\overline{u'v'} \\ \frac{f_0}{\theta_{0z}}\overline{v'\theta'} \end{pmatrix}$$

を定義し,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\overline{u} - fv_a^{**} = \nabla\cdot\boldsymbol{M}_T \\
&v_a^{**} = v_a - \frac{1}{f_0}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^{'2}}{2} + \frac{v^{'2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{f_0^2}{N^2}\psi_z^{'2} + \overline{u}A\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{f_0^2}{N^2}\overline{\psi'_x\psi'_z}\right)\right\}
\end{aligned}$$

となる. ただし, フラックスの x 成分に $\overline{u}A$ の任意性が現れることに注意が必要である. これは平均流に乗った座標から見た場合と地面に固定された座標から見た場合でフラックスの大きさが異なることを意味する.

Plumb (1986) では平均流の方程式を導く際には β 面ではなく f 面 を用いている.

どのようなフラックスの表現を用いるのがよいかは, 結局実際に現実大気に適用し図を作成してから考えないとわからないかもしれない.

5.2 Trenberth (1986) の場合

f 面の時間平均した平均場の式として

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}-f\overline{v}=-\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'^2}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'}$$

を得る. これを変形して

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}-fv_T^*=\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\rho_0\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\overline{v'^2-u'^2})\\ -\overline{u'v'}\\ \frac{f_0}{\theta_{0z}}\overline{v'\theta'}\end{pmatrix}$$

$$v_T^*\equiv\overline{v}-\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\phi}+K)-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{f_0}{\theta_{0z}}\overline{v'\theta'}\right)$$

ここで K は運動エネルギーである. 上記の式で

$$\rho_0\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\overline{v'^2-u'^2})\\ -\overline{u'v'}\\ \frac{f_0}{\theta_{0z}}\overline{v'\theta'}\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{C}_gA$$

であることに注意する必要がある.

5.3 Plumb (1985) の場合

Plumb (1985) では TEM 系の方程式の導出は行っていない. 平均場の式

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+U\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}+v^{(2)}\frac{\partial U}{\partial y}-fv_a=-\frac{\partial}{\partial x}u^{'2}-\frac{\partial}{\partial y}u'v'$$

の右辺の項の位相依存性の消去が面倒であったためと想像される.

右辺の変形は以下のようにに行うとよい.

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x}u'^2 - \frac{\partial}{\partial y}u'v' &= -\psi'_y\psi'_{xy} + \psi'_x\psi'_{yy} \\
&= -\psi'_y\psi'_{xy} - \psi'\psi'_{xyy} + \psi'\psi'_{xyy} + \psi'_x\psi'_{yy} \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}(\psi'\psi'_{xy}) + \frac{\partial}{\partial x}(\psi'\psi'_{yy})
\end{aligned}
$$

このとき

$$
\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + U\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + v^{(2)}\frac{\partial U}{\partial y} - fv_a = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi'^2_y - \psi'\psi'_{yy}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi'_x\psi'_y - \psi'\psi'_{xy}\right)
$$

となって, 右辺の位相依存性を消去することができる.

$$
Du^{(2)} - fv_a^{***} = \nabla\cdot\boldsymbol{W}
$$

$$
v_a^{***} = v_a - \frac{1}{f}(\cdots)
$$

のように表すことができる.