

# 温位座標系で表現された波動平均流相互作用

岩崎俊樹

(東北大学大学院・理学研究科)

1. なぜ、MIMか？
2. 形状抵抗
3. EP-Flux 発散と寒気流出

**MIM: 加重付の温位面上の帯状平均 Mass-weighted Isentropic Zonal Mean**

# 1. なぜ、MIMか？

## MIM: Mass-weighted Isentropic zonal Mean

断熱条件では気塊は等温位面上を動きまわる

⇒ 帯状平均は等温位面上で行うのが自然

質量加重は帯状平均場が物理量を保存するのに必要

$$\overline{A^*} \equiv \overline{A(\partial p / \partial p_{\dagger})}$$

# 帯状平均の定義

等温位面上の質量重みつき帯状平均

帯状平均 
$$\overline{A(y, \theta, t)}^* \equiv \frac{1}{Lx} \int A(x, y, \theta, t) \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} / \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) dx$$

偏差 
$$A' \equiv A - \overline{A}^*$$

偏差相関 
$$\overline{(AB)}^* = \overline{A}^* \overline{B}^* + \overline{(A'B')}^*$$

## 鉛直座標の変換

Pressure-Isentropic Hybrid Vertical Coordinate

$$p_{\dagger} \equiv \bar{p}$$

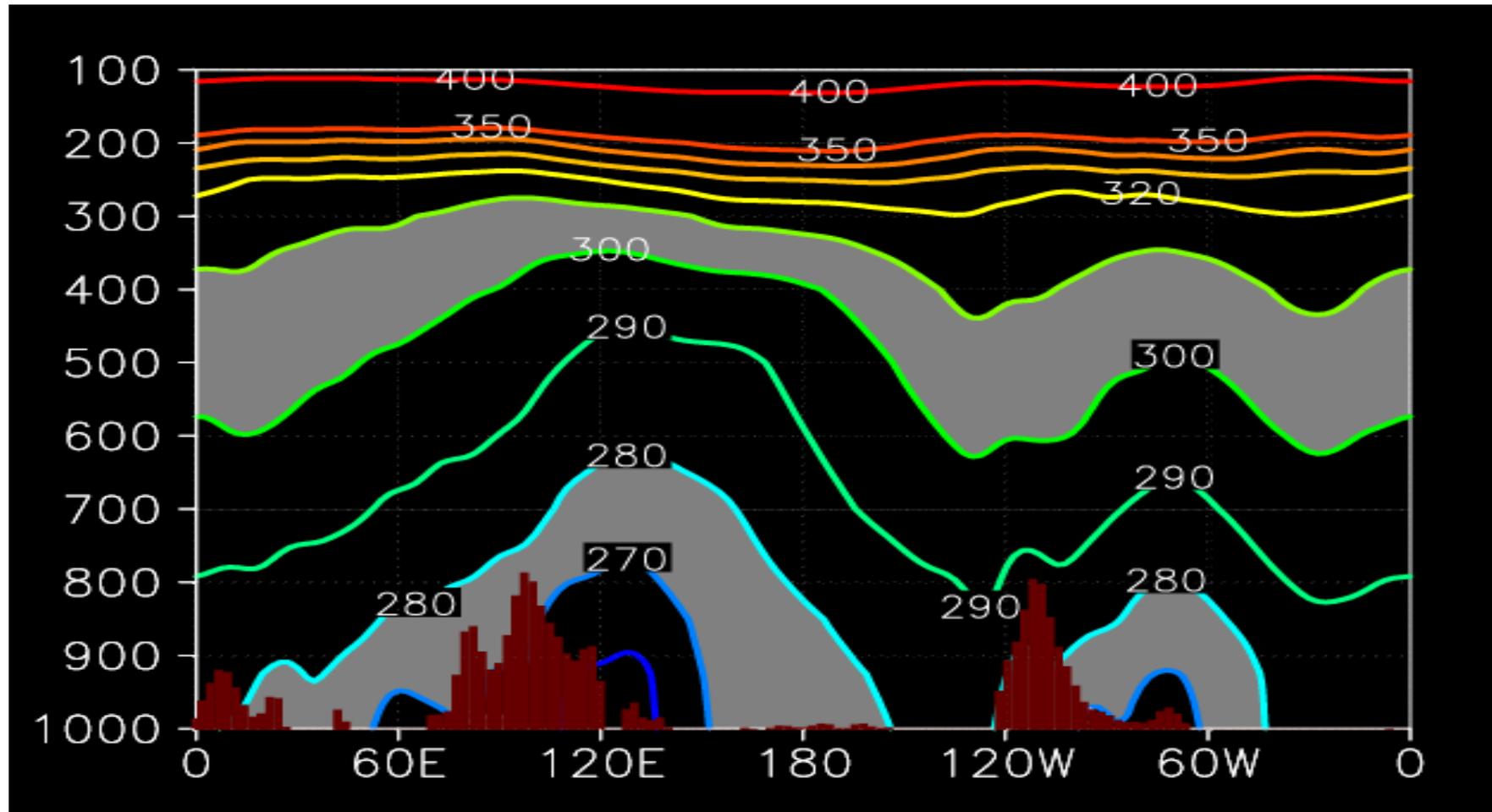
$$p \equiv p_S, \quad \Phi \equiv \Phi_S \quad f \text{ or } \theta < \theta_S$$

対数気圧座標へ

$$z_{\dagger} \equiv -H \log(p_{\dagger} / p_{00})$$

$$\rho_0 \left( z_{\dagger} \right) \equiv \frac{p_{\dagger}}{H}$$

# Monthly mean potential temperature at 45N January, 2001



## MIMとTEMの子午面風の関係

$$\chi(y, z_{\dagger}) = \frac{Lx}{g} \int_0^{p_{\dagger}} \overline{v^*} dp_{\dagger} = \frac{Lx}{g} \int \int_0^{p_{\dagger}} v \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}} dp_{\dagger} dx = \frac{Lx}{g} \int \int_0^{p(x, \theta)} v dp dx$$

**テイラー展開**  $p(x, \theta) \approx p|_{p=p_{\dagger}} - \frac{\partial p}{\partial \theta} \theta'(x, p) \Big|_{p=p_{\dagger}}$

$$\approx \frac{L}{g} \int \int_0^{p - \frac{\partial p}{\partial \theta} \theta'(x, p)} v dp dx$$

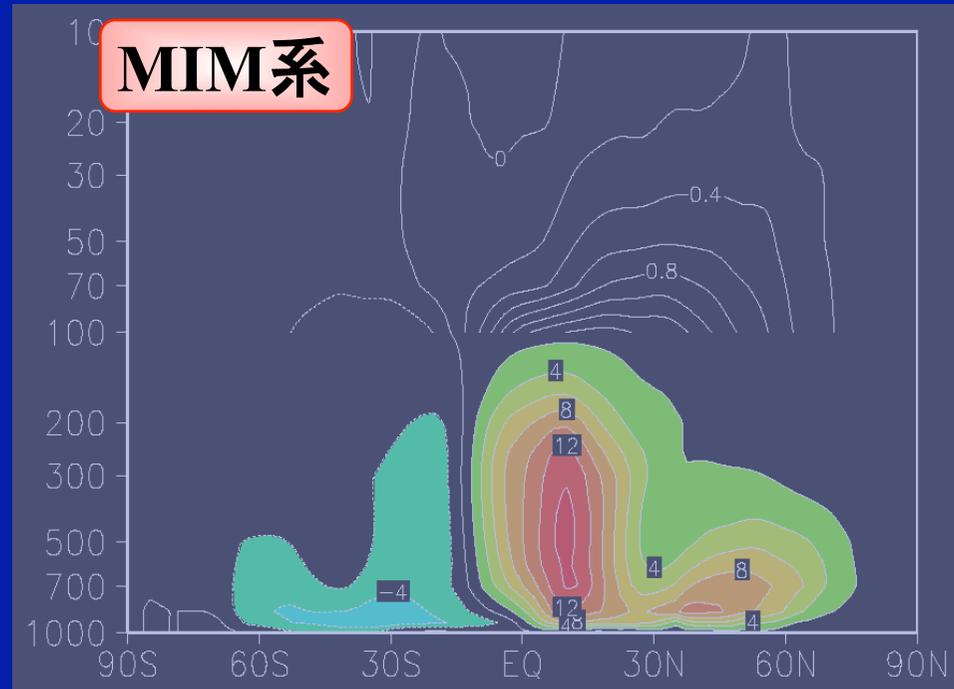
$$\approx \frac{L}{g} \left\{ \int_0^p [v] dp - \frac{\partial p}{\partial \theta} [\theta' v'] \right\} = \chi(y, z) + L\rho_0 \frac{[\theta' v']}{\theta_z}$$

### Zで微分するとTEMの表現と一致

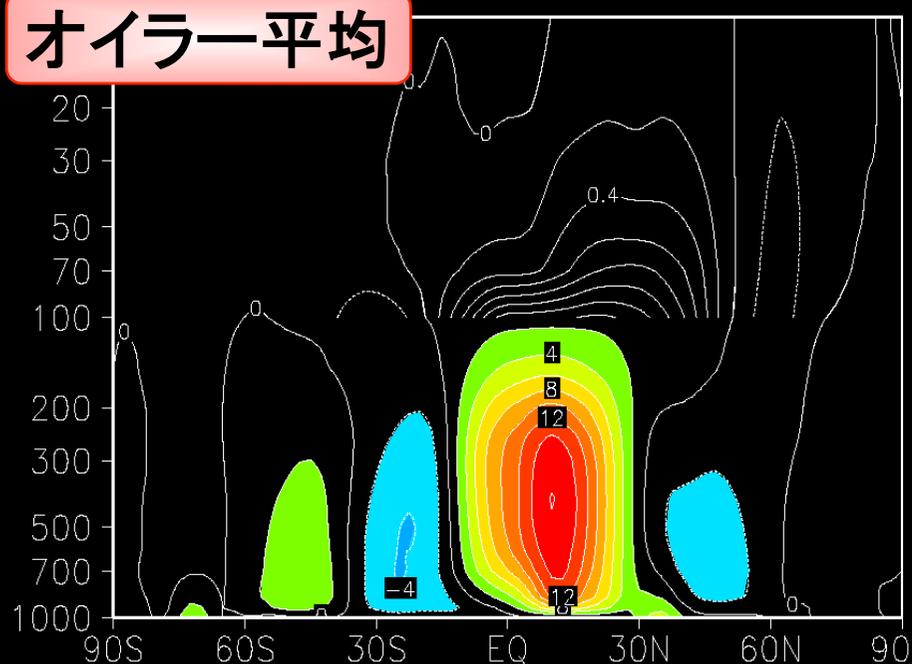
$$\overline{v^*} \approx \frac{1}{Lx\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \chi(y, z_{\dagger}) \approx \bar{v} + \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \rho_0 \frac{\overline{\theta' v'}}{\theta_z} \right)$$

ただし、このテイラー展開は下部境界では無効

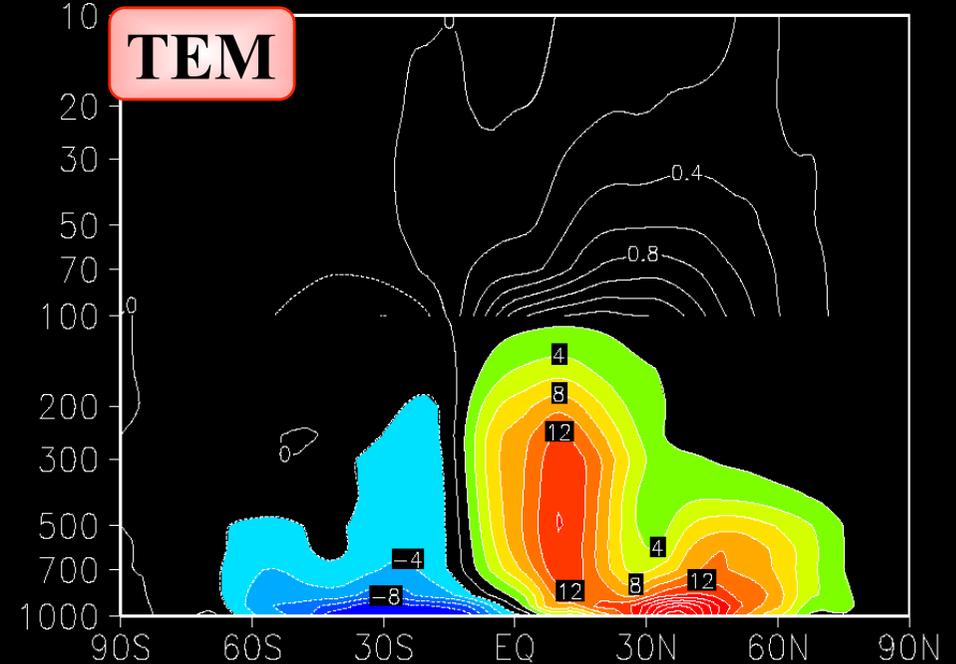
# 子午面循環の比較



## オイラー平均



## TEM

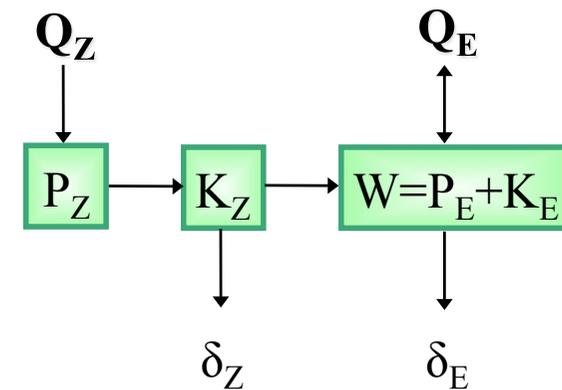


## MIMの熱力学方程式は渦輸送の項を持たない

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_{z_{\dagger}} = -\frac{\overline{v^*}}{a} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi}\right)_{z_{\dagger}} - \overline{w_{\dagger}^*} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z_{\dagger}}\right) + \overline{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*}$$

→ 子午面熱輸送は平均子午面循環で説明できる

## エネルギー変換は直列型となる



→ 波動平均流相互作用に基づくエネルギー論

## 2. 形状抵抗

## 東西風の運動方程式： 温位座標

$$\left( \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t} \right)_\theta = -\bar{v}^* \left( \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y} \right)_\theta - \bar{\theta}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \theta} + f \bar{v}^* + \frac{1}{\bar{\sigma}} D_F(\theta) \quad \bar{\sigma} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}$$

$$D_F(\theta) = \left\{ \frac{\partial F_y(\theta)}{\partial y} \right\}_\theta + \frac{\partial F_\theta(\theta)}{\partial \theta}$$

$$\mathbf{F}(\theta) = \left[ -\bar{\sigma} \overline{(u'v')^*}, \quad -\bar{\sigma} \overline{(u'\theta')^*} + \overline{\frac{p}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_\theta} \right]$$

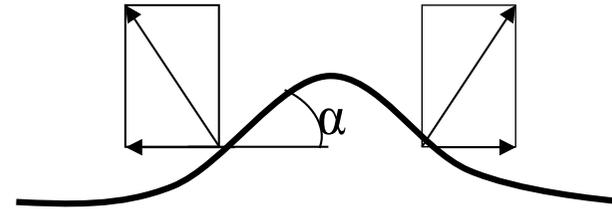
## 東西風の運動方程式： $p_\dagger$ 座標

$$\left( \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t} \right)_{z_\dagger} = -\bar{v}^* \left( \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y} \right)_{z_\dagger} - \bar{w}_\dagger^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_\dagger} + f \bar{v}^* + \frac{1}{\rho_0} D_F(z_\dagger)$$

$$D_F(z_\dagger) = \left\{ \frac{\partial F_y(z_\dagger)}{\partial y} \right\}_{z_\dagger} + \frac{\partial F_{z_\dagger}(z_\dagger)}{\partial z_\dagger}$$

$$\mathbf{F}(z_\dagger) = \left[ -\rho_0 \overline{(u'v')^*}, \quad -\rho_0 \overline{(u'w'_\dagger)^*} + \overline{\frac{p}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_\theta} \right]$$

# 形状抵抗



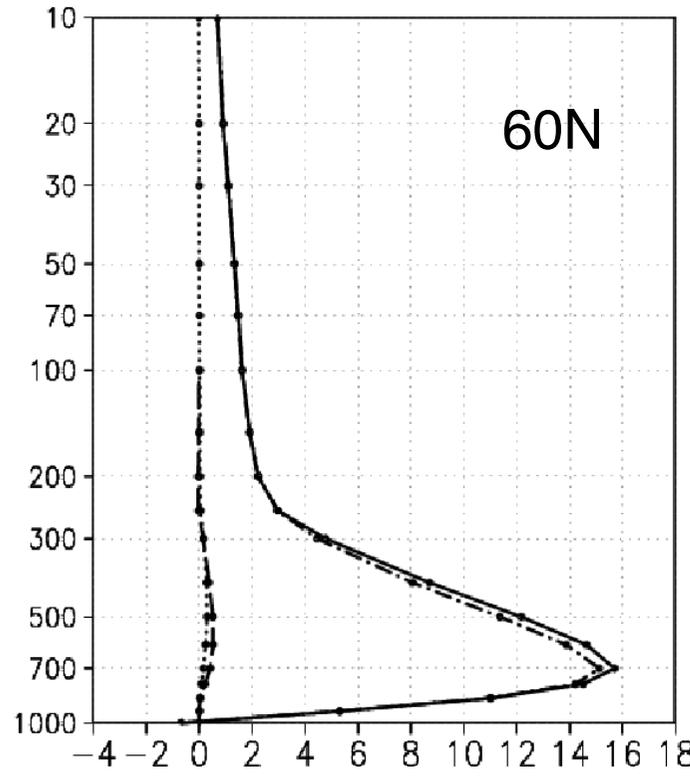
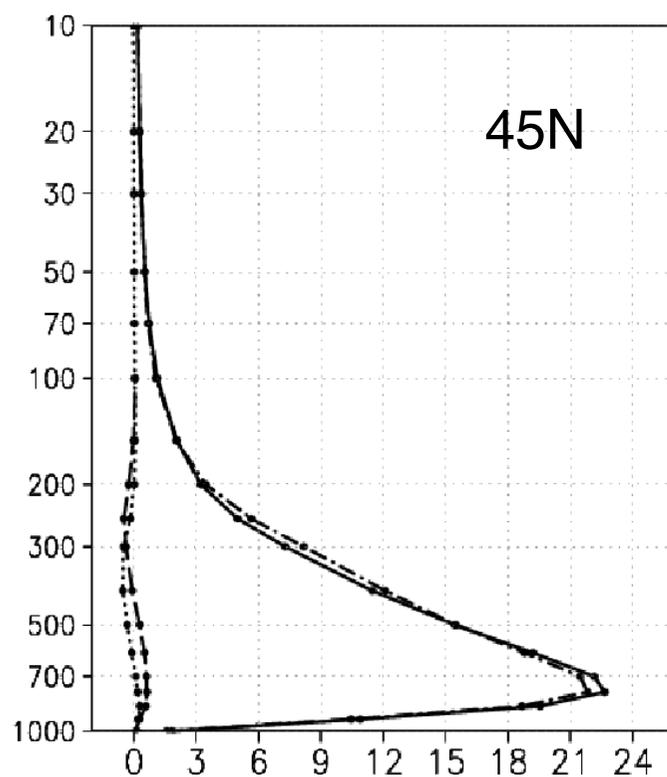
山が大気に及ぼす力の東西成分  $X = -p \sin \alpha \approx -p \tan \alpha = -\frac{p}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_\theta$

$-\frac{p}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_\theta$  温位  $\theta$  以下の大気が、それより高温位の大気に及ぼす力の東西成分の総和(形状抵抗)。

MIMシステムでは以下のような定義により、 $\theta \rightarrow \theta_{\text{MIN}}$  で、温位面上の形状抵抗と山岳による形状抵抗と統一的に扱うことができる。

$$p \equiv p_S, \quad \Phi \equiv \Phi_S \quad \text{for } \theta < \theta_S$$

# Decomposition of $F_z$ in DJF at 45N & 60N



実線: 総和

破線: 非断熱加熱

点線: 温位面傾斜

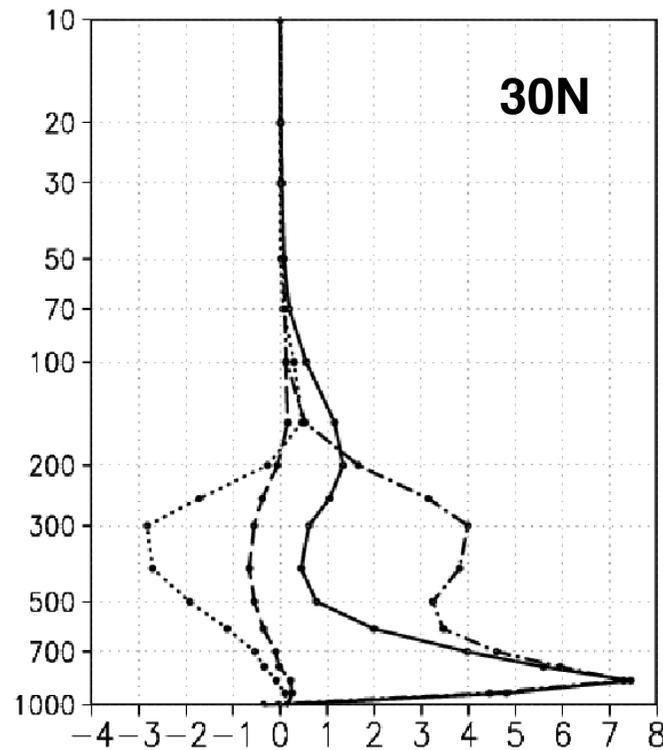
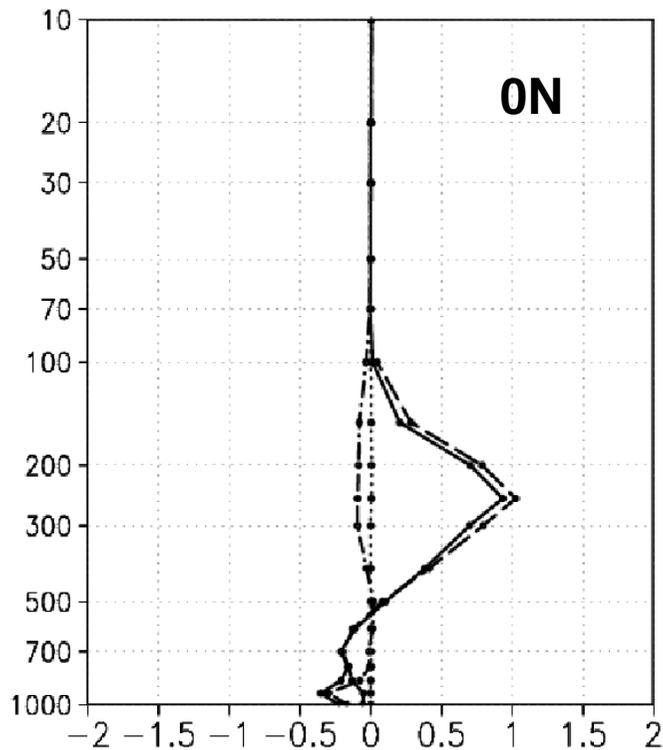
鎖線: 形状抵抗

$10^4(\text{kg/s}^2)$

$$F_{z_{\dagger}} = -a\rho_0 \overline{\cos\phi(u'\theta')^*} \frac{\partial z_{\dagger}}{\partial \theta} - \rho_0 \overline{\cos\phi(u'v')^*} \left( \frac{\partial z_{\dagger}}{\partial \phi} \right)_{\theta} + \frac{1}{g} p \overline{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{p_{\dagger}}}$$

中高緯度では、ほとんどが、形状抵抗項である。

# Decomposition of Fz in DJF at 0N & 30N



実線: 総和

破線: 非断熱加熱

点線: 温位面傾斜

鎖線: 形状抵抗

$10^4(\text{kg/s}^2)$

$$F_{z_{\dagger}} = -a\rho_0 \overline{\cos\phi(u'\theta')^*} \frac{\partial z_{\dagger}}{\partial\theta} - \rho_0 \overline{\cos\phi(u'v')^*} \left( \frac{\partial z_{\dagger}}{\partial\phi} \right)_{\theta} + \frac{1}{g} \overline{p \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right)_{p_{\dagger}}}$$

熱帯 : 対流圏では非断熱加熱に伴う渦輸送が支配的

亜熱帯: 中緯度に近づくにつれて形状抵抗の効果が大きくなるが、温位面傾斜の効果も無視できない。

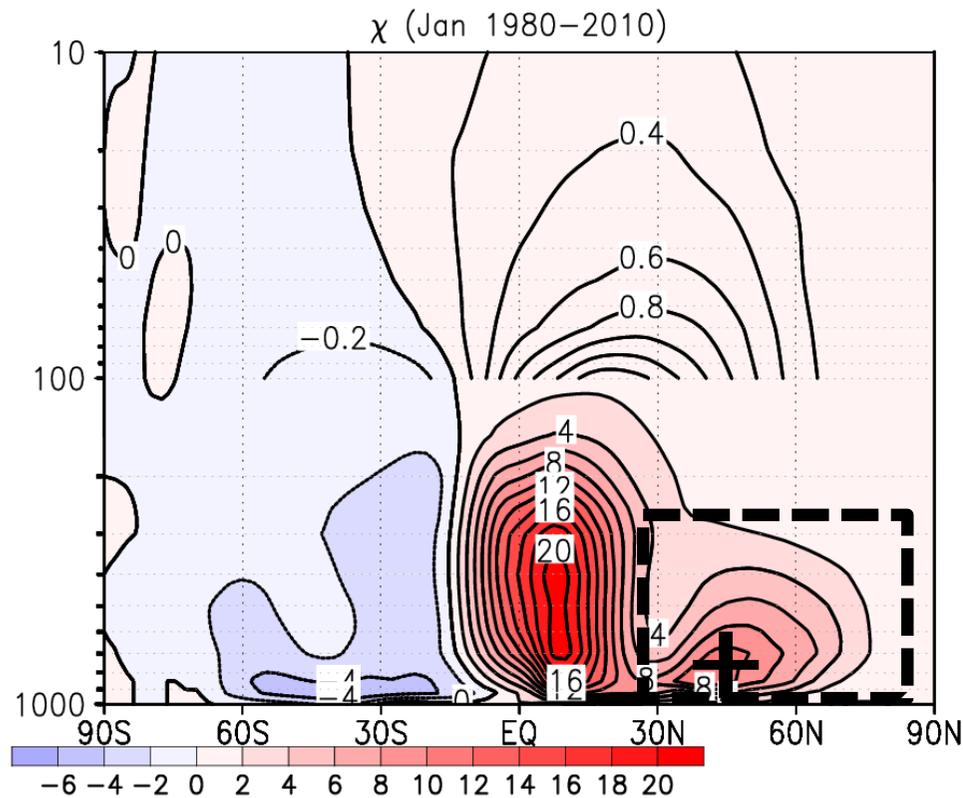
### 3. EP-Flux 発散と寒気の流出

下部対流圏における

Extratropical pumping

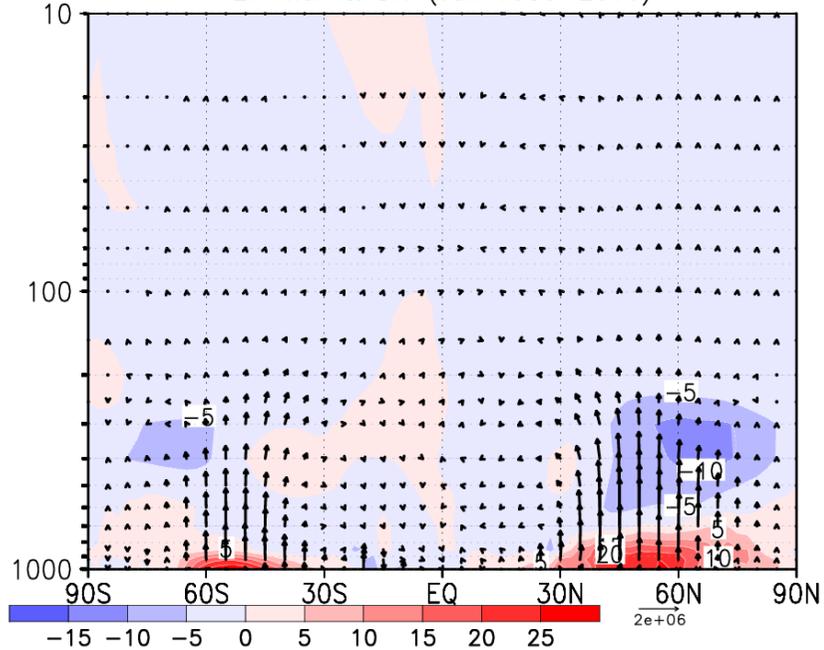
$$f \overline{v^*} \approx -\frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{a \rho_0 \cos \phi}$$

MIMでは冬季に中高緯度直接循環が見られ、  
対流圏下層には赤道向きの流れ(寒気の流出)が現れる。

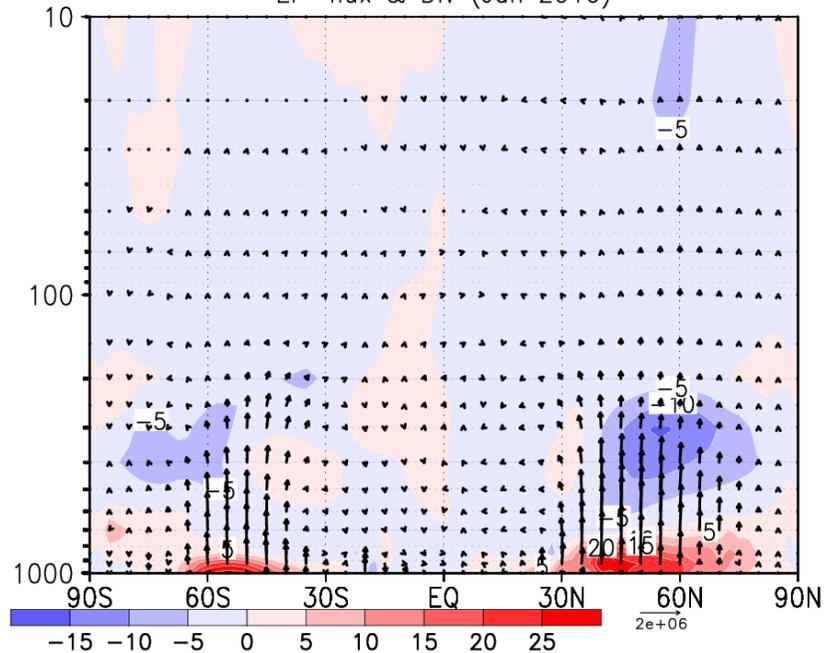


中高緯度直接循環の変曲点は(45N, 850hPa)付近。  
変曲点の温位はおよそ280Kである。  
変曲点での質量流線関数の値をPCAOと定義

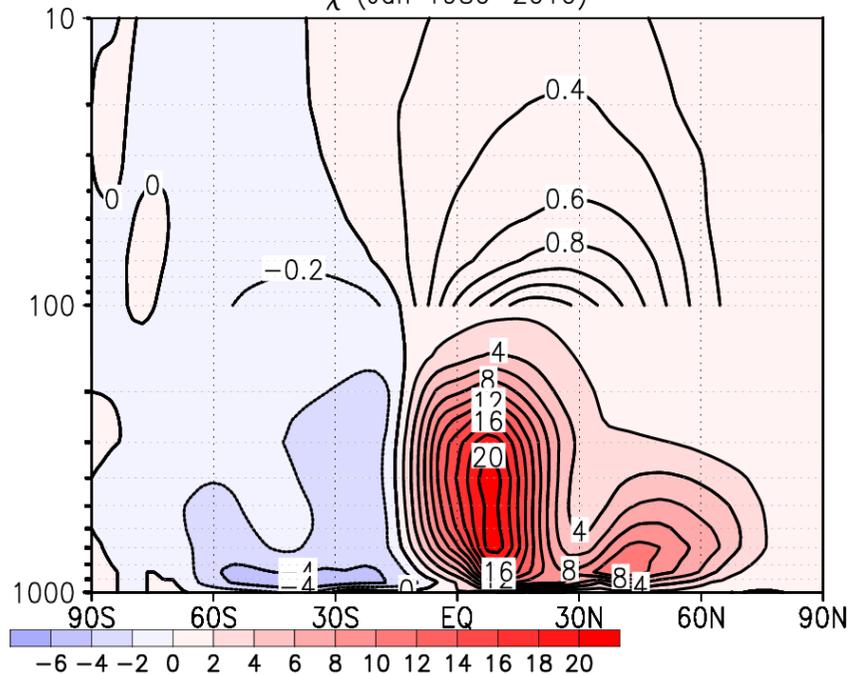
EP-flux & Div (Jan 1980–2010)



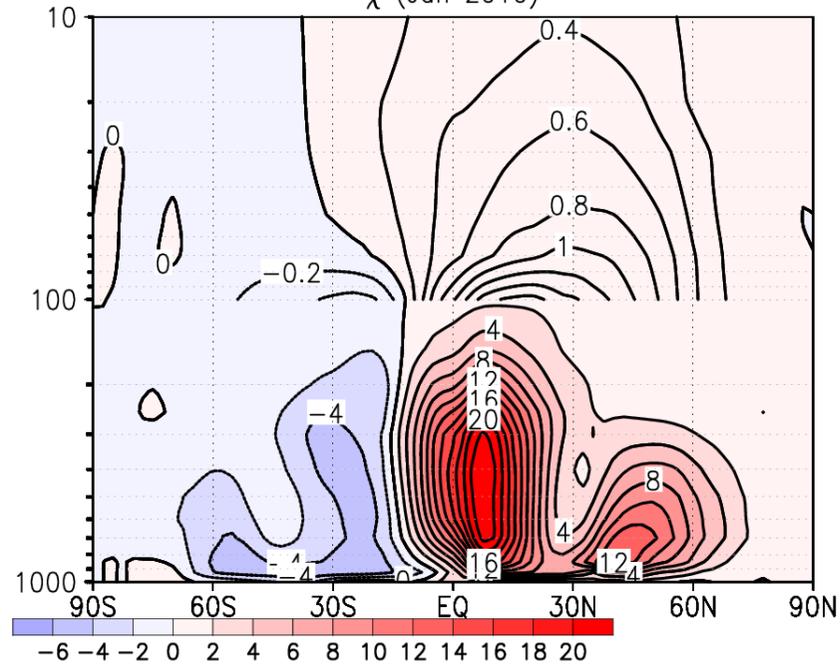
EP-flux & Div (Jan 2010)



$\chi$  (Jan 1980–2010)

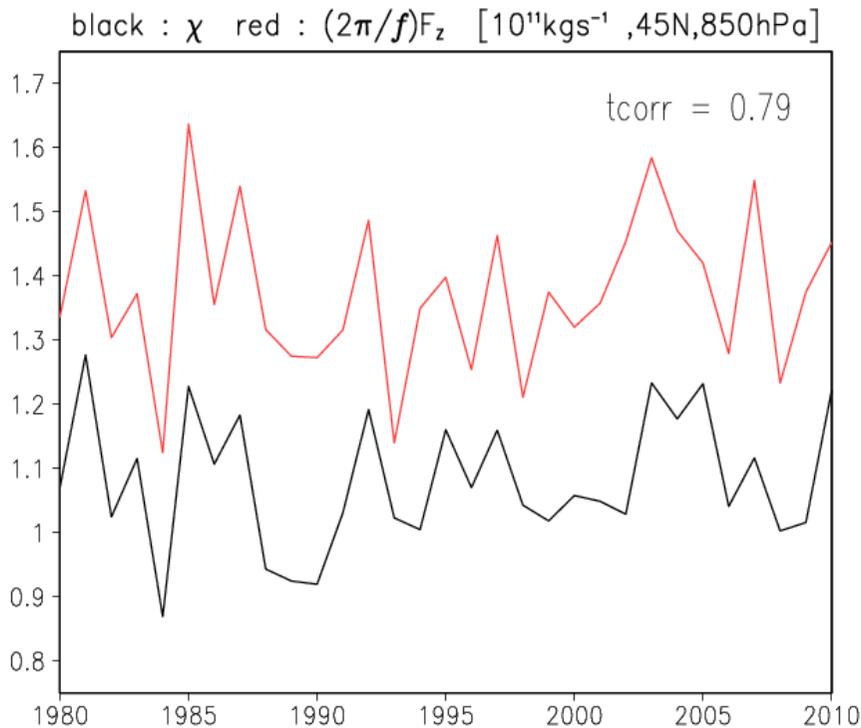


$\chi$  (Jan 2010)



質量流線関数[ $10^{10} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ]と上向き( $2\pi/f$ )EP-flux (45N,850hPa)  
 年々変動の相関係数 **0.79**

$$\frac{\overline{\partial u^*}}{\partial t} = -\frac{\overline{v^*}}{a \cos \phi} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial \phi} - \overline{w_{\dagger}^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\dagger}} + f \overline{v^*} + \frac{\overline{\nabla \cdot \mathbf{F}}}{a \rho_0 \cos \phi} + \overline{X^*}$$



$$f \overline{v^*} \approx -\frac{\overline{\nabla \cdot \mathbf{F}}}{a \rho_0 \cos \phi}$$

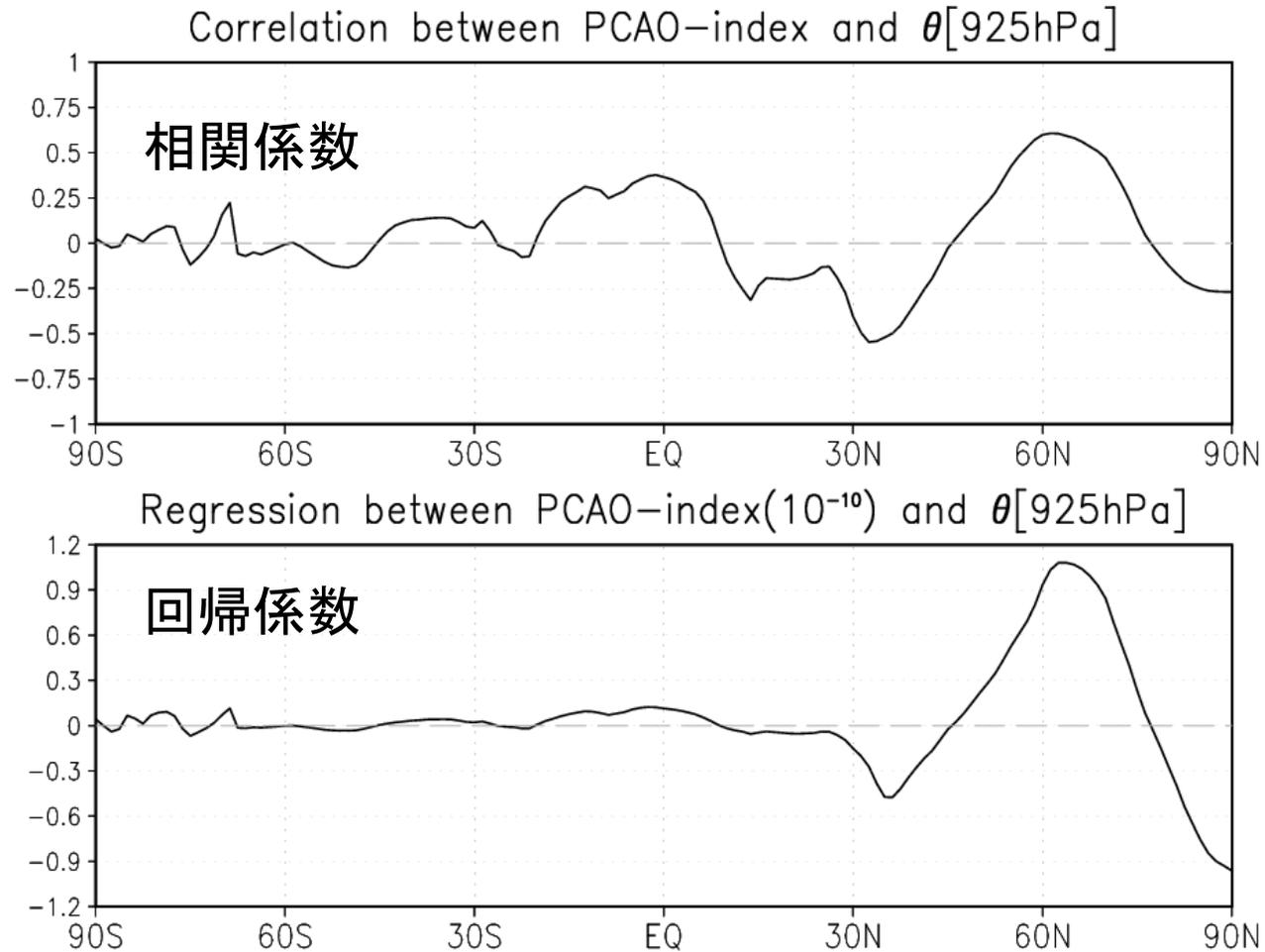
$$\chi(\phi, z_{\dagger}) \approx \frac{2\pi}{f} F_{z_{\dagger}}$$

下層の南北風もExtratropical pumping で、説明される。  
 PCAO (寒気の蓄積・放出)は波動平均流相互作用に支配されている。  
 質量流線関数はE-Pフラックスから期待される値のおよそ0.8。 摩擦？

# Polar Cold Air Outbreak (PCAO) Index

各緯度の925hPaの帯状平均気温の1月平均の年々変動(30年分)から求めた

## PCAOとの相関係数と回帰係数



PCAOが大きいと、気温は高緯度(60N)で上昇し、中緯度(35N)の下降する。

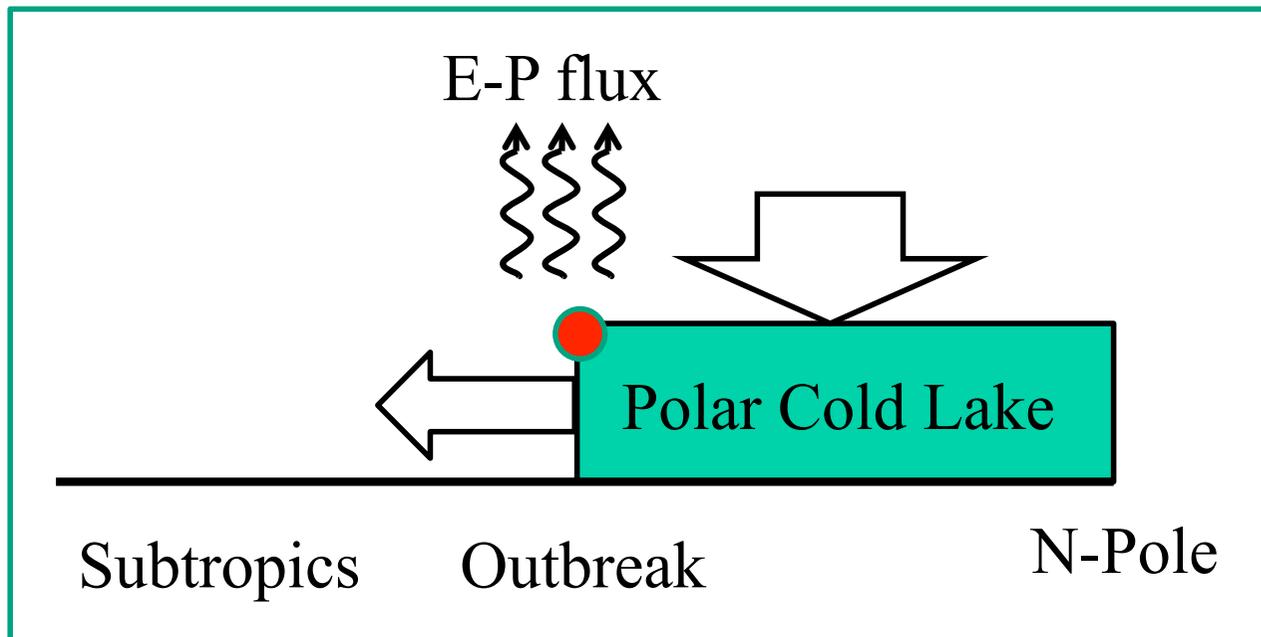
→ これは寒気の流出という概念とよく合う。

## 2. Meridional heat transport

In MIM, no eddy terms in zonal mean thermodynamic equation

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_{z_{\dagger}} = -\frac{\overline{v^*}}{a} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi}\right)_{z_{\dagger}} - \overline{w_{\dagger}^*} \frac{\partial \theta}{\partial z_{\dagger}} + \overline{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*}$$

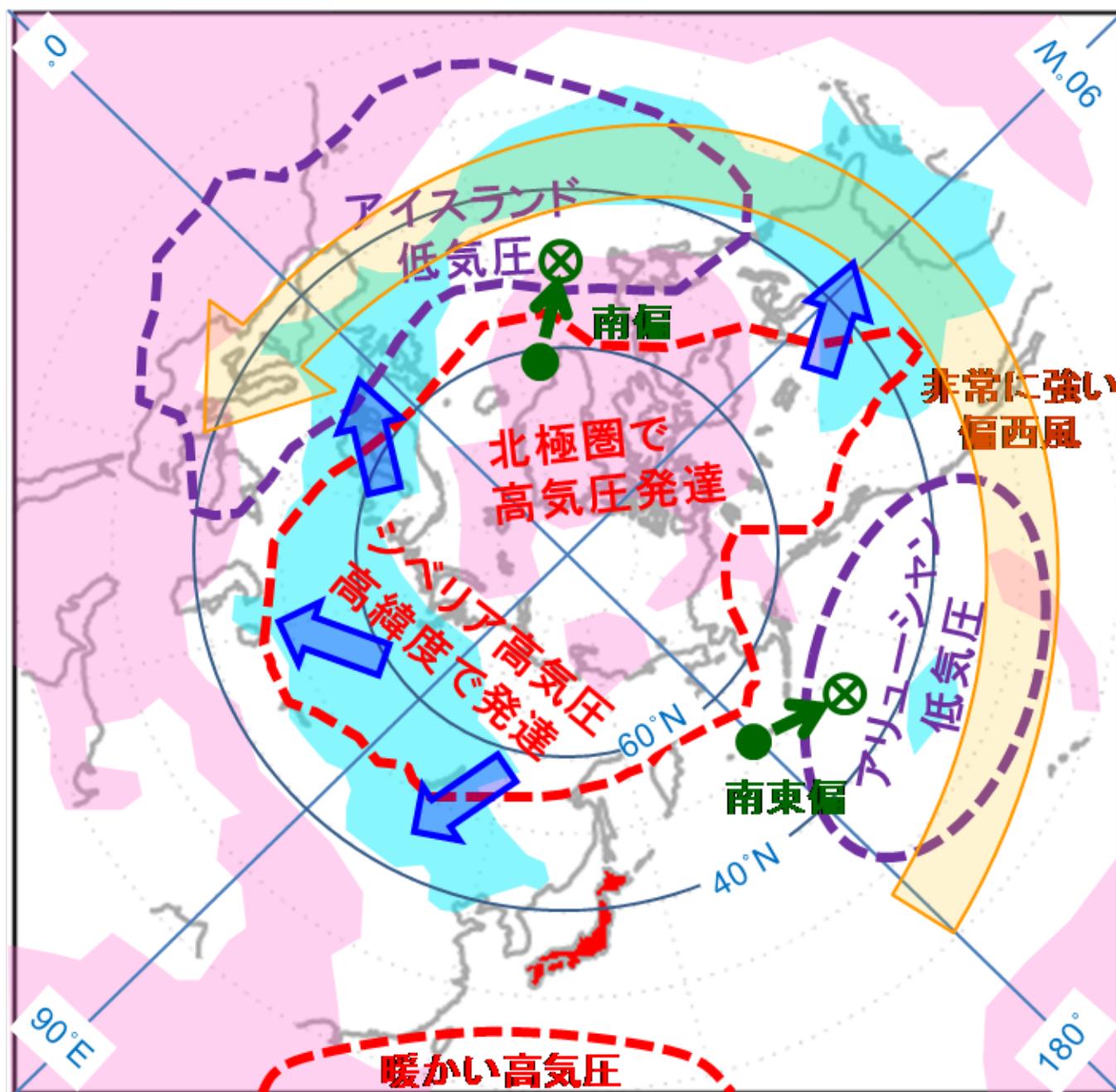
### PCAO (Intensity of ETD circulation)



North of 45N, downward motion → Heating

South of 45N, polar cold air out break → Cooling

# Cold Air Outbreak (2010) 異常気象検討会資料



# MIMに関するまとめ

1. 鉛直方向のEPフラックスは東西方向の形状抵抗そのものである。
2. 下層のEPフラックス発散は寒気の流出を促している。
  - \* 地域的な寒気の流出を今後の課題とする

# 質量加重による全量保存

$$\iint \int_{z_s(x,y)}^{\infty} \rho A dz dx dy = \frac{1}{g} \iint \int_0^{p_s(x,y)} A dp dx dy = \frac{1}{g} \iint \int_{\theta_{\text{MIN}}}^{\infty} A \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta dx dy$$

$$p(x, \theta) \equiv p_s(x) \quad \text{for } \theta < \theta_s(x)$$

$$\theta_{\text{MIN}} < \min[\theta_s(x, y)]$$

加重により $x$ と $\theta$ の積分順序も交換可能

## 加重付温位面帯状平均(温位座標)

$$= \frac{Lx}{g} \iint_{\theta_{\text{MIN}}}^{\infty} \overline{A \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)} d\theta dy$$

## 加重付温位面帯状平均( $p_{\dagger}$ 座標)

$$= \frac{Lx}{g} \iint_{p_{\dagger s}}^{\infty} \overline{A \left( \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}} \right)} dp_{\dagger} dy = \frac{Lx}{g} \iint_{p_{\dagger s}}^{\infty} \overline{A^*} dp_{\dagger} dy$$

$$\overline{A^*} \equiv \overline{A(\partial p / \partial p_{\dagger})} \quad p_{\dagger} \equiv \bar{p} \quad p_{\dagger s} = (1/Lx) \int p_s dx$$

積分量は座標変換に対し下部境界効果を含めて保存

## 平均子午面循環

質量流線関数  $\chi(\phi, z_{\dagger}, t) = 2\pi a \cos \phi \int_{z_{\dagger}}^{\infty} \rho_0 \overline{v^*} dz_{\dagger}$

子午面流  $\overline{v^*} = -\frac{1}{2\pi a \rho_0 \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial z_{\dagger}}$

鉛直流  $\overline{w_{\dagger}^*} = \frac{1}{2\pi a^2 \rho_0 \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \phi}$

TEMに似ている。(無限小振幅の場合TEMで近似)  
下部境界や非線形効果を完全に表現。

# エネルギーの定義

全位置エネルギー  $P \equiv C_v T + \Phi$       運動エネルギー  $K \equiv \frac{v^2}{2}$

帯状平均場と渦のエネルギーに分ける。

$$\overline{P^*} = P_Z + \overline{P_E^*} \quad \overline{K^*} = K_Z + \overline{K_E^*}$$

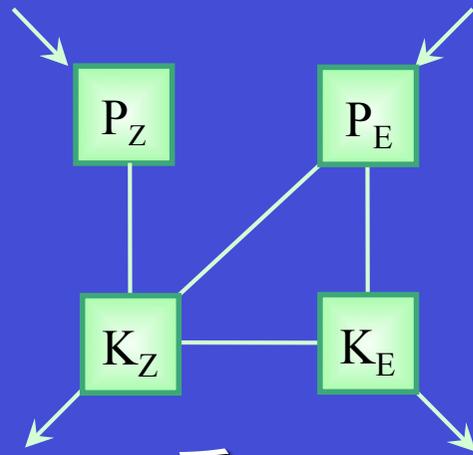
$P_Z$       等緯度面内の大気再配置によって得られる最低位置エネルギー

$\overline{P_E^*}$       渦位置エネルギーの帯状平均値

$K_Z$       帯状平均風の運動エネルギー

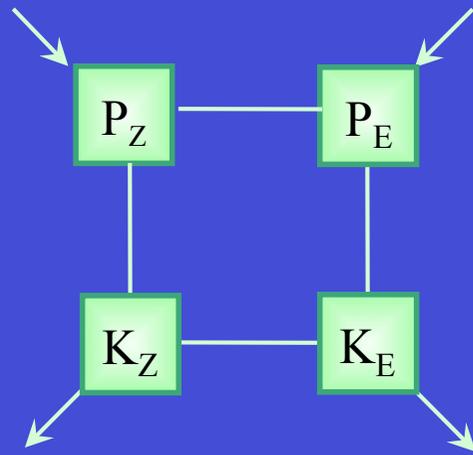
$\overline{K_E^*}$       渦運動エネルギーの帯状平均値

# エネルギーサイクルの比較

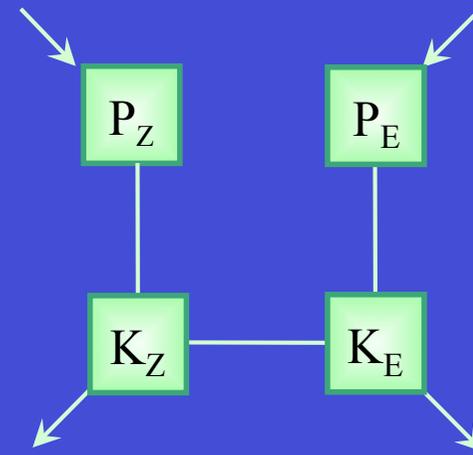


$P_+$ 系 Iwasaki  
(2001)

$P_Z$ : 帯状平均有効位置エネルギー  
 $K_Z$ : 帯状平均運動エネルギー  
 $P_E$ : 渦の有効位置エネルギー  
 $K_E$ : 渦の運動エネルギー

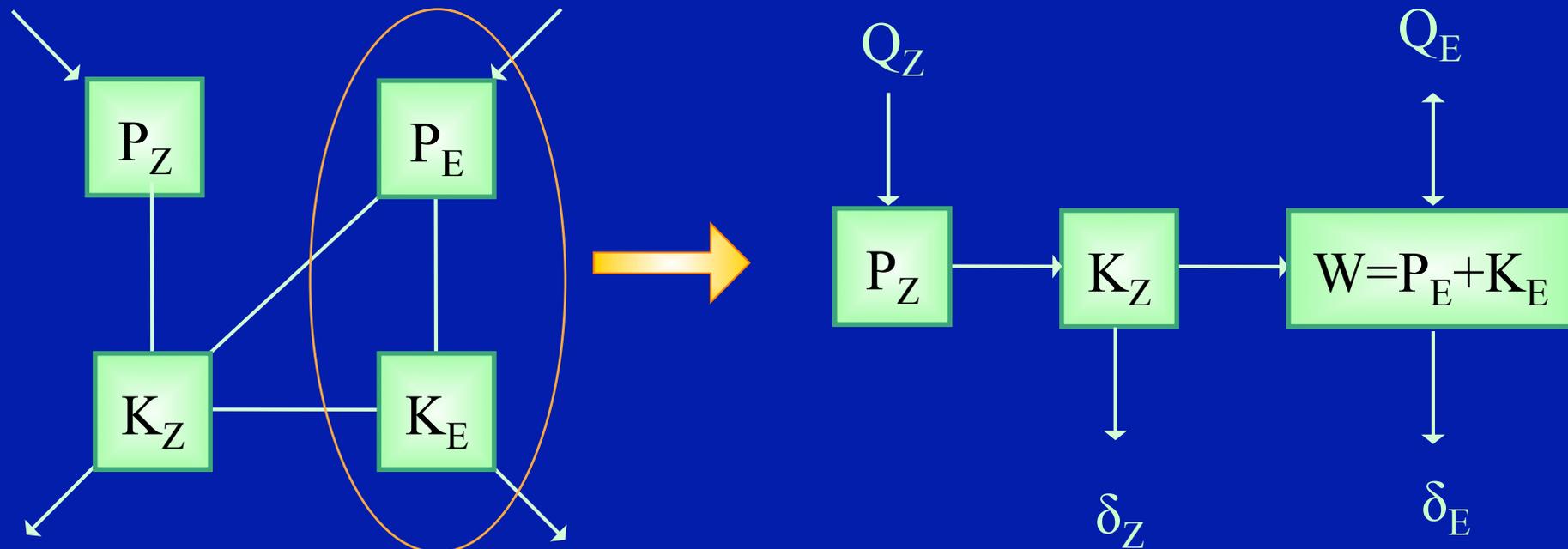


オイラー平均 Lorenz  
(1955)



TEM系  
Plumb(1983), Kanzawa(1984)

## P系におけるエネルギーサイクル



《 $P_E$ と $K_E$ をまとめて波動エネルギー $W$ と考える理由》

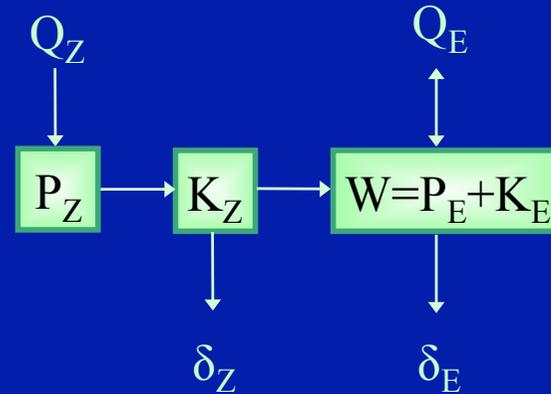
- $P_E \leftrightarrow K_E$ 間の変換は相互に波動活動として不断に起きている。
- 分離した場合、EP fluxの屈折が $P_E \Rightarrow K_Z$ 、 $K_Z \Rightarrow K_E$ の2つのエネルギー変換にカウントされるため、波動の伝播という概念に適さない。

# エネルギー方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle P_Z \rangle = -C(P_Z, K_Z) + Q_Z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle K_Z \rangle = C(P_Z, K_Z) - C(K_Z, W) - \delta_Z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W \rangle = C(K_Z, W) + Q_E - \delta_E$$



$Q_Z \cdot Q_E$   
非断熱加熱による  $P_Z \cdot P_E$  の生成

$\delta_Z \cdot \delta_E$   
摩擦による  $K_Z \cdot K_E$  の消滅

$$C(P_Z, K_Z) = - \left\langle \bar{v} \left( \frac{\partial \Phi_T}{\partial y} \right)_s \right\rangle$$

子午面流による  $P_Z$  から  $K_Z$  への変換

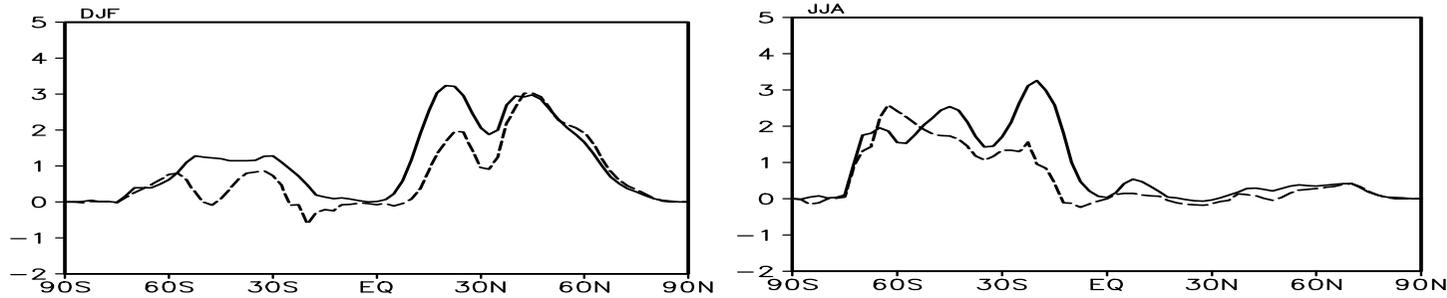
$$C(K_Z, W) = - \left\langle \bar{v} \nabla \cdot \mathbf{F} \right\rangle + \varepsilon$$

$K_Z$  から  $W$  への変換 (波動平均流相互作用に伴う項と  $\varepsilon$  で表された項から成る)

$$\varepsilon = \left\langle \bar{v} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s - \left( \frac{\partial \Phi_T}{\partial y} \right)_s \right] \right\rangle + \dots$$

$K_Z \leftrightarrow W$  間の渦による南北気圧傾度力の仕事をまとめたもの

### 3.4 C(PZ,KZ)とC(KZ,W)の関係



低緯度では $C(KZ,W)$  は $C(PZ,KZ)$ よりずっと小さい

→ 直接KZが摩擦により散逸する (ハドレー循環?)

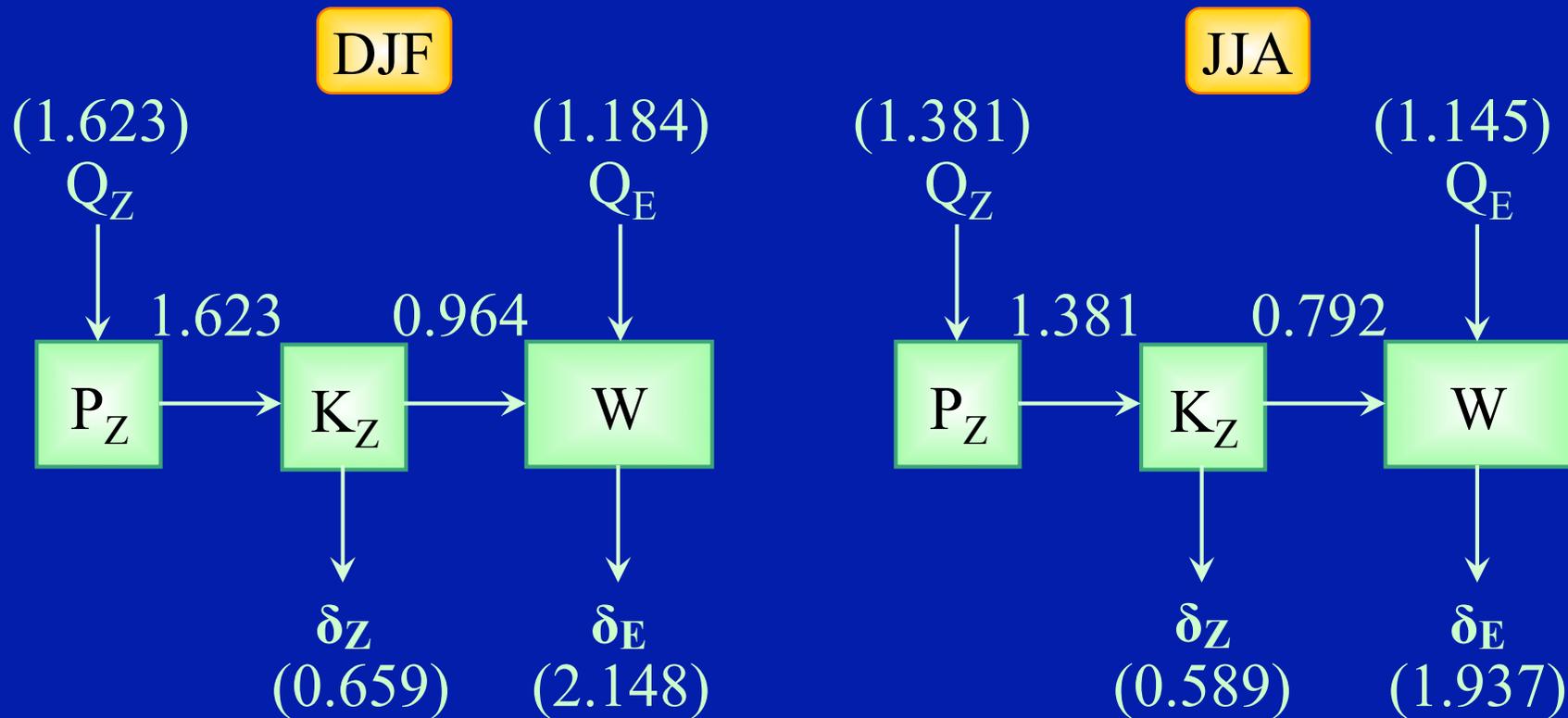
中高緯度では $C(KZ,W)$  は $C(PZ,KZ)$ とほぼ等しい

→ 地衡風近似が成り立っている

→ 主にKEとなって後に散逸する

### 3. 5エネルギー収支の全球平均値

[W/m<sup>2</sup>]



1. 非断熱加熱によってP<sub>Z</sub>が生成
2. 子午面内の直接循環によってK<sub>Z</sub>に変換
3. このK<sub>Z</sub>のうち6割程度はWへ変換、残りの4割は摩擦により散逸
4. WはK<sub>Z</sub>からの変換と東西方向に不均一な非断熱加熱により生成
5. 最終的に、Wは傾圧不安定波等の波動活動に伴う摩擦の影響で大きな散逸

## エネルギー収支の全球平均値 [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]

C(P <sub>Z</sub> ,K <sub>Z</sub> )			C(K <sub>Z</sub> ,W)		
	DJF	JJA		DJF	JJA
定常	0.547	0.245	定常	0.400	0.050
非定常	1.076	1.136	非定常	0.540	0.729
<b>Total</b>	<b>1.633</b>	<b>1.381</b>	<b>Total</b>	<b>0.940</b>	<b>0.779</b>

1. P<sub>Z</sub>→K<sub>Z</sub>は非定常運動の寄与が圧倒的に大きい。  
 定常はDJFがJJAより大きい、非定常成分はJJAの方が大きい。  
 定常+非定常はDJFが大きい。
  
2. 波動の生成(K<sub>Z</sub>→W)はDJFは4割強が定常で6割弱が非定常。  
 JJAはほとんどが非定常運動である。  
 定常はDJFがJJAより大きい、非定常成分はJJAの方が大きい。  
 定常+非定常はDJFが大きい。

定常運動: 停滞性超長波、 非定常運動: 傾圧不安定波

## 平均エネルギー( $10^5[\text{J}/\text{m}^2]$ )

	DJF	JJA
$P_z$	31.8	28.4
$K_z$	8.3	8.6
W	13.0	10.4

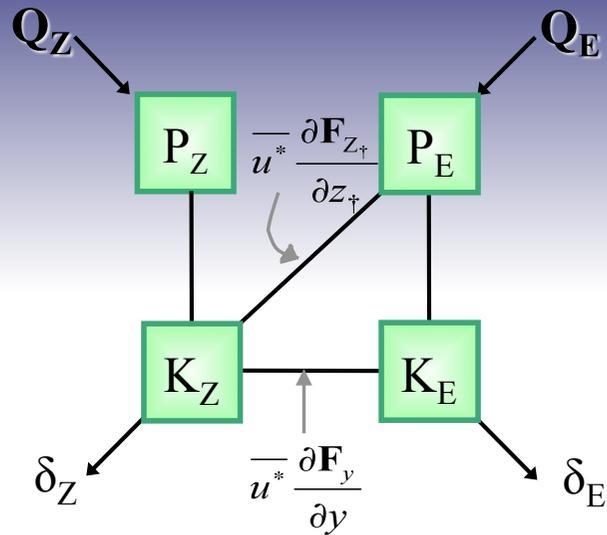
$P_z$ は、DJFが大きい。

$K_z$ は、わずかに $K_z$ が大きい。

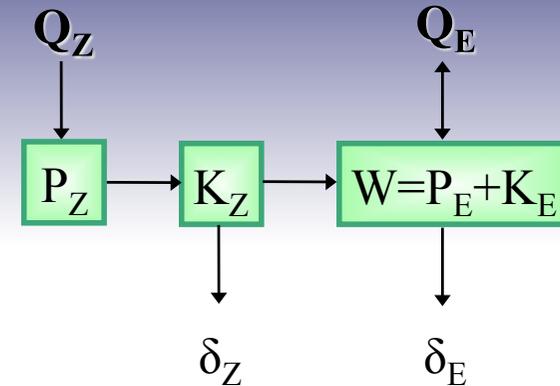
Wは、DJFが大きい。

1. 非定常運動によるエネルギー変換は南半球の冬が大きい
2. 定常運動によるエネルギー変換は北半球の冬が大きい
3. 定常＋非定常運動によるエネルギー変換効率は北半球の冬が大きい
  - ← 帯状平均場の有効位置エネルギーの生成は北半球の冬が大きい
  - ← ユーラシア大陸が効率的に大気を冷却し有効位置エネルギーを生成

# $p_{\dagger}$ 方程式系の説明 ～エネルギーサイクルの変形～



$\rightarrow$   
 $P_E + K_E = W$



**F**: EP flux

(波動の運ぶ運動量)

$\nabla \cdot \mathbf{F}$ : 波動の生成・消滅に伴う  
平均東西風の加速・減速

$\overline{u^*} \nabla \cdot \mathbf{F}$ : 波動平均流相互作用に伴う  
平均エネルギーの変化

⇒ 波動エネルギーの生成・消滅

$$C(P_Z, K_Z) = - \left\langle \overline{v^*} \left( \frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial y} \right)_{P_{\dagger}} \right\rangle$$

子午面流による変換

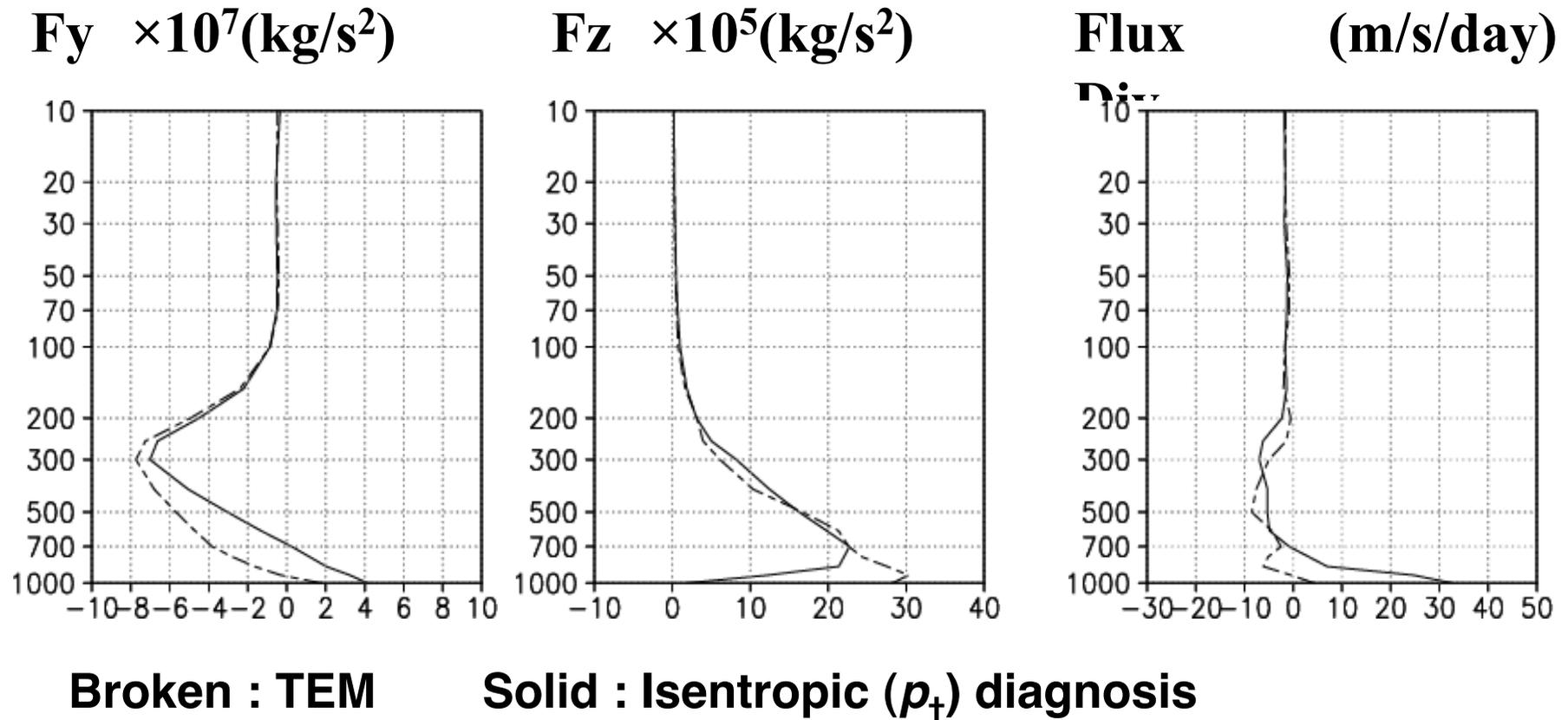
$$C(K_Z, W) = - \left\langle \overline{u^*} \nabla \cdot \mathbf{F} \right\rangle + \varepsilon$$

波動平均流相互作用

$$\varepsilon = \left\langle \overline{v^*} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p^* - \left( \frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial y} \right)_{P_{\dagger}} \right] \right\rangle + \dots$$

南北方向の渦による仕事

# E-P flux at 45N in DJF; TEM v.s. MIM



鉛直成分の地表面の境界条件が大きく異なる。  
温位座標の場合、原理的に、山岳トルク(大気と固体地球との角運動量交換)に一致する。(TEMには非現実的な湧き出しが現れる)  
下層での発散は赤道向きの平均流とおよそ地衡風バランスする。