赤道波の線形理論
Linear theory of equatorial waves

山田 由貴子
YAMADA Yukiko
北海道大学理学部地球科学科 地球流体力学研究室

2002 年 1 月 31 日

要旨

Matsuno (1966) で導出された赤道波の固有モードの導出とその特徴を紹介した. また, 局所的に外力を与えた場合に生じる波動の時間発展について数値計算を行い, 得られた結果を固有モードをもとに議論した.

赤道波の固有モードは, 線形化された浅水方程式系に対して時間と東西方向には波動解を仮定し, 南北方向にはエルミート多項式を用いて展開することで得られる. エルミート多項式の次数 n が 1 次以上の場合にはモードは 3 つ得られ, これらのモードは中緯度域で見られる東向き慣性重力波, 西向きの慣性重力波, そしてロスビー波と呼ばれる波動に対応する. しかし 0 次の場合にはモードは 2 つしか得られず, これらのモードは東向き慣性重力波, 混合ロスビー重力波という波動に対応づける. また, 南北流速が 0 である場合にも 1 つのモードが得られ, 赤道ケルビン波という波動に対応づける.

数値計算は, Matsuno (1966) で用いられた式に外力項と摩擦, 減衰項を加えた方程式系の時間発展についてスペクトル法を用いておこなう. 計算は, 熱源を与えた場合と初期変位を与えた場合について行い, 変位の与え方は Gill (1980), および Heckley and Gill (1984) を参考にしている.

得られた結果を赤道波の固有モードの重ね合わせで説明する. ここで与えた赤道対称の外力による結果は, 赤道対称の波動である, 東向きの赤道ケルビン波と西向きの $n = 1$ のロスビー波と一致している. 一方で赤道反対称の外力による結果は, 赤道反対称の波動である, 西向きの $n = 2$ のロスビー波と一致している. また熱源を与えた時の特徴として, $\varepsilon = 0$ の時では波動の先端部の通過後に残る定常な流れの振幅は, どこでも一様となっている. $\varepsilon = 0.1$ の時ではこの振幅は, 波動の伝播速度に応じて伝播距離に対して減衰している.

目 次

1 はじめに **1**

2 モデル **3**
2.1 浅水方程式系 3
2.2 一般成層流体の方程式系 4
2.3 赤道大気の傾圧モデル 6
2.4 外力を与えた時の時間発展方程式 8

3 赤道波の固有モード **9**
3.1 分散関係式の導出 9
3.2 振動数の固有モード 10
3.3 赤道波の固有モードの導出 14
3.4 赤道波の固有モードの特徴 15
3.4.1 共通の特徴 15
3.4.2 $n \geq 1$ の波動の特徴 15
3.4.3 $n = 0$ の波動の特徴 19
3.4.4 $n = -1$ の波動の特徴 19

4 時間発展の数値モデル **22**
4.1 関数展開 22
4.2 展開係数の関係式 23
4.3 計算設定 24
4.3.1 熱源を与えた時の時間発展 24
4.3.2 初期変位を与えた時の時間発展 24

5 結果と考察 **26**
5.1 熱源を与えた時の時間発展 26
5.1.1 赤道対称 26
5.1.2 赤道反対称 32
5.2 初期変位を与えた時の時間発展 37
5.2.1 赤道対称 37
5.2.2 赤道反対称 37

6 まとめと結論 **42**

7 謝辞 **43**

図 目 次

1　傾圧モデル 7
2　赤道波の固有モードの分散曲線 13
3　東向き慣性重力波 16
4　西向き慣性重力波 17
5　ロスビー波 18
6　$n = 1$ 東向き慣性重力波, 混合ロスビー重力波 20
7　ケルビン波 21
8　熱源 Q, 初期変位 $\phi(x, y, t = 0)$ の分布 25
9　赤道対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0$ 時間 $t = 2, 4, 6$ 28
10　赤道対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0$ 時間 $t = 8, 10$ 29
11　赤道対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0.1$ 時間 $t = 2, 4, 6$ 30
12　赤道対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0.1$ 時間 $t = 8, 10, 12$ 31
13　赤道反対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0$ 時間 $t = 2, 4, 6$ 33
14　赤道反対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0$ 時間 $t = 8, 10, 12$ 34
15　赤道反対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0.1$ 時間 $t = 2, 4, 6$ 35
16　反赤道対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0.1$ 時間 $t = 8, 10, 12$ 36
17　赤道対称に初期変位を与えた時の時間発展 時間 $t = 2, 4, 6$ 38
18　赤道対称に初期変位を与えた時の時間発展 時間 $t = 8, 10$ 39
19　赤道反対称に初期変位を与えた時の時間発展 時間 $t = 2, 4, 6$ 40
20　赤道反対称に初期変位を与えた時の時間発展 時間 $t = 8, 10, 12$ 41

1　はじめに

地球の大気海洋の大規模スケールの波動の中に赤道波と呼ばれる波動がある. 赤道波とは赤道付近で振幅が最大であり, 赤道から離れるにつれ減少する波動のことを指す. この波動の特徴は中緯度域における波動と異なる点がいくつかあり, この点は赤道をはさんで正負が逆転するというコリオリ力の特異性によって生じている.

赤道波は, 赤道域の大気海洋のいくつかの大規模なスケールの現象に赤道波の寄与が考えられたことにより注目されることとなった. このような現象の例として, 準二年周期振動がある. 準二年周期振動とは, 赤道域の下部成層圏で東風と西風が 2 年から 2 年半くらいの周期で交互に現れる現象である (松野, 浅井, 1981). 準二年周期振動のメカニズムに赤道波による運動量の輸送が考えられたが, 現在ではこの輸送は重力波によるものと考えられている. これまでの準二年周期振動の観測データの解析により, 混合ロスビー重力波と赤道ケルビン波と呼ばれる赤道波が実際に存在していることが確かめられた.

他の例としては, エルニーニョ / 南方振動 あるいは ENSO (El Niño / Southern Oscillation) と呼ばれる現象がある. エルニーニョとは, 赤道東太平洋の海面水温が数年に一度, 半年以上に渡って広範囲で上昇する現象であり (小倉, 1999), 南方振動とは, 南半球の太平洋, インド洋上の気圧がインドネシア付近と, 南太平洋付近を中心にしてシーソーのように数年周期で東西で振動している現象である. この 2 つの現象は大気 · 海洋相互作用によって励起される. この相互作用のメカニズムの一端を担うものとして, 赤道ケルビン波とロスビー波と呼ばれる赤道波が考えられた.

これらの現象のメカニズムを議論するために, 赤道波について多くの研究が行われてきた. この中で赤道波を固有モードとして定式化したものに Matsuno (1966) がある. Matsuno (1966) では, 線形化した浅水方程式系の解を固有モードに展開した. そしてこの固有モードと中緯度域における波動とを対応づけることによって, 赤道に特有な波動について議論した. さらに Matsuno (1966) では, 前述と同様の方程式系を用いて正弦波型の熱源を与えた時の定常解を示した. 一方で Gill (1980) では, 熱源を局所的に与えた時の定常解を議論した. Gill (1980) の定常解は, 松野 – Gill パターンと呼ばれている. また Heckley and Gill (1984) では, この局所的な熱源を急に与えた時に生じる波動の時間発展を議論している.

本論文では, はじめに Matsuno (1966) で得られた赤道波の固有モードの導出とその特徴について紹介する. 次に局所的に外力を与えた場合に生じる波動の時間発展について数値計算を行い, 得られた結果を固有モードをもとに議論する. 計算は, 熱源を与えた場合と初期変位を与えた場合について行う. 変位の与え方は Gill (1980), および Heckley and Gill (1984) を参考にする.

本論文は, 以下で構成される. 2 章では, Matsuno (1966), および Heckley and Gill (1984) で用いられた方程式系を示す. 3 章では, 赤道波の固有モードの導出とその特徴について紹介する. 4 章では, 本論文で行った数値計算の手法を述べる. 5 章では, 数値計算によって得られた図について議論を行う. 6 章は, 本論文のまとめである.

2　モデル

2.1 節 では, Matsuno (1966) で用いられている線形化された浅水方程式系を記す. 2.2 節 では, 大気の成層を考えたときの方程式を鉛直方向の運動をあらわす方程式と浅水方程式に分離し, 方程式を簡単化する. 2.3 節では, 鉛直方向の状態を仮定し, それに対する浅水方程式を無次元化し, 次節以降で用いる方程式を導く. 2.4 節 では, 外力項と摩擦, 減衰項がつりあって定常状態に調節されるまでの方程式を表す.

2.1　浅水方程式系

地球の大気海洋の運動の中で, 水平長さスケールが深さスケールに比べ十分に大きい長波長の運動を考えることを前提とする. 地球大気の大規模スケールの値として観測されている代表的な値は以下である (Peixoto and Oort, 1992):

水平長さスケール	L	$\approx$	10^6 m
深さスケール	D	$\approx$	10^4 m
水平速度スケール	U	$\approx$	$10\ \mathrm{ms}^{-1}$
鉛直速度スケール	W	$\approx$	$10^{-2}\ \mathrm{ms}^{-1}$
鉛直圧力スケール	ΔP	$\approx$	$10\ \mathrm{mb} = 10^3$ Pa
時間スケール	$\tau = L/U$	$\approx$	10^5 s

また海洋は, 大気に比べて水平長さスケールに対する深さスケールはさらに小さいから, これから行う近似は海洋の大規模スケールの運動についても適用できる.

回転系の非圧縮, 非粘性の順圧流体の運動方程式と質量保存則に対し, 静力学平衡, 局所直交座標系を仮定する. また, 流体表面は自由に運動できるものとする. 2 次の微小量を除き, 線形化を行うと次式を得る:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu + g\frac{\partial h}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \tag{3}$$

ここで, (u, v) はそれぞれ (x, y) 方向の流速, t は時間, h は平均の深さ H に対する表面の盛り上がりの微小量, f はコリオリパラメータ, g は重力加速度である. これが Matsuno (1966) で用いられている浅水方程式系である.

h に代わり, ジオポテンシャル ϕ を導入する. ϕ は次式で定義される:

$$\nabla\phi = \boldsymbol{g}.$$

これらにより (1), (2), (3) 式 は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{6}$$

となる. ここで, $c = \sqrt{gH}$ は重力波の速度である.

この方程式系は等圧面間の流体運動を記述しており, ジオポテンシャルは層の厚さを表す.

2.2 一般成層流体の方程式系

(1), (2), (3) 式 は, 1 層の水平方向の流体運動をあらわす方程式系である. これに対し, ここでは鉛直方向に密度成層を考えた時の方程式系を示す.

回転系の非圧縮, 非粘性流体に対し, 静力学平衡, 局所直交座標系を仮定する. また, 水平面には密度は一定であり, 密度変化の影響は浮力の項だけにあらわれるとする. この近似はブジネスク近似という. この近似は音波は取り除き, 内部重力波は扱うことができることから, 実際の気象現象を考える上で有用な近似である. また流速は, 平均場を 0 とし, そこからの微小変動をあらわすとする.

これらの仮定から導かれる線形化された方程式系を以下に記す.

運動方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\bar{\rho}_0}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\bar{\rho}_0}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{8}$$

質量保存則:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

熱力学の式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w\frac{\partial \bar{\rho}(z)}{\partial z} = Q \tag{10}$$

静水圧平衡の式:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{11}$$

ここで, $\bar{\rho}(z)$ は z における密度, $\bar{\rho}_0$ は全層平均の密度, ρ は $\bar{\rho}_0$ からの微小変位とする. また大気の加熱を考え, 熱源 Q を定義する.

(9), (10), (11) 式 を整理すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{g\bar{\rho}_z}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q}{\bar{\rho}_z}\right) \tag{12}$$

が得られる. ここで, $\bar{\rho}_z = \partial\bar{\rho}/\partial z$ である. また,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{g\bar{\rho}_z}\frac{\partial p}{\partial z}\right) \propto -\frac{p}{\bar{\rho}_0}$$

であるとする. (3) 式 と (12) 式 との対応を考え, 比例定数として $1/gH_*$ を選ぶと

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{g\bar{\rho}_z}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = -\frac{1}{gH_*}\frac{p}{\bar{\rho}_0} \tag{13}$$

となる. よって上式を (12) 式 に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\bar{\rho}_0}\right) + gH_*\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -Q \tag{14}$$

を得る. ここで, (12) 式 右辺の加熱 $\partial/\partial z(Q/\bar{\rho}_z)$ は Q に置き直した.

H_* は次の境界条件によって定義される:

$$\begin{aligned} w = 0 \quad &\text{at} \quad z = 0, \\ w = \frac{dh}{dt} \approx \frac{\partial h}{\partial t} \quad &\text{at} \quad z = H. \end{aligned}$$

この境界条件は次のように変形できる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \quad \text{at z} = 0 \\ H_* p(z = H) &= \int_0^H p(z)dz \end{aligned}$$

この境界条件により, (13) 式 は固有値問題をなす. この時 H_* は固有値であり, 固有関数は完全直交性を持つ.

(7),(8),(14) 式 の形は (1),(2),(3) 式 の形と同じである. よって, (7),(8),(14) 式 は, H_* に対する浅水方程式系である. また, (13) 式 が鉛直方向の流体運動をあらわす方程式, すなわち鉛直構造方程式というのに対し, (7),(8),(14) 式 を水平構造方程式ともいう. (7), (8), (9), (10), (11) 式 は, この 2 つ方程式系に分離できる. この両者の方程式を結びつける係数が H_* であり, 等価深度という. よって, 鉛直構造方程式のモードに対する固有値 H_* を求めると, 解くべき方程式は H_* に対する浅水方程式系だけとなり, 方程式は簡単化される.

また, 熱源 Q を与えることは, (14) 式 において質量を抜くことに相当する.

2.3 赤道大気の傾圧モデル

(4), (5), (6) 式 のコリオリパラメータの緯度変化を次のように近似する:

$$f = f_0 + \beta y.$$

ここで $f_0 = 2\Omega \sin\theta$, $\beta = (2\Omega/r)\cos\theta$ であり, r は地球の半径である. これを β 面近似という. 赤道では $f = 0$ であるから, 赤道付近でのこの近似は $f = \beta y$ となる. これを赤道 β 面近似という.

これにより (4), (5), (6) 式 は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -Q \tag{17}$$

となる.

(15), (16), (17) 式を無次元化する. 無次元化に用いるスケールの具体的な値を求めるために, 鉛直構造を仮定して H_* を求め, さらに H_* に対する内部重力波の速度を求める. Matsuno (1966), Gill (1980) では z 方向に対し, w, Q は $\sin(\pi z/H)$ で変動し, u, v, p は $\cos(\pi z/H)$ で変動することを仮定している (図 1). $p(x, y, z, t) = \hat{p}(x, y, t)\cos(\pi z/H)$ を (13) 式 に代入すると,

$$c_* = \sqrt{gH_*} = \frac{H}{\pi} \left(\frac{g\bar{\rho}_z}{\bar{\rho}_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{HN}{\pi} \tag{18}$$

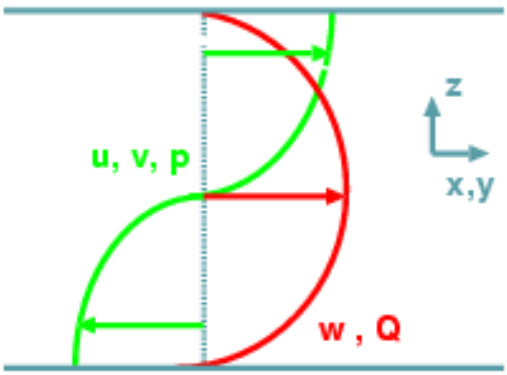

図 1: 傾圧モデル
z 方向に対し, w, Q は $\sin(\pi z/H)$ で変動し, u, v, p は $\cos(\pi z/H)$ で変動する. H は流体の厚さである.

が得られる. ここで, N はブラントバイサラ振動数と呼ばれる係数であり, 対流圏での値は $N \sim 1.16 \times 10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$ である (小倉, 1978). また H は対流圏の厚さとし, 2.1 節 で示した深さスケール D とする.

無次元化に用いるスケールと, 対流圏を想定した場合の具体的な値を記す.

速度スケール	内部重力波の速度	$c_* = \sqrt{gH_*}$	~ 30 m/s ~ 2600 km/day
長さスケール	赤道ロスビー変形半径	$\lambda = \sqrt{c/\beta}$	~ 1100 km

これにより無次元化した方程式系は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - yv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + yu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -Q \tag{21}$$

となる. 2 章では $Q = 0$ としてこの式を用いる.

2.4　外力を与えた時の時間発展方程式

(19), (20), (21) 式 に摩擦, 減衰項を加えた時に, 外力項とつりあって定常状態に調節されるまでの運動を考える.

摩擦, 減衰については, レイリー摩擦, [1] ニュートン冷却[2] によると, 時間に対して 1 次の減衰をする. よって減衰率を ε とすると, $\partial/\partial t$ は $\partial/\partial t + \varepsilon$ に置き換えられる. これら 2 つの法則は経験則であり, ここでは 0.1 を採用する. このとき, 2.3 節 で議論した対流圏を想定した時に解 u, v, ϕ の振幅が e^{-1} になるまでの時間は約 100 時間である.

(19), (20), (21) 式 に摩擦, 減衰項を加えた時の方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u - yv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon v + yu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \varepsilon \phi + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -Q \tag{24}$$

である. この方程式は, 4 章で行う数値計算の際に用いる.

[1] 物体が放射によって失う熱量はその物体の周囲との温度の差に比例する (岩波理化学辞典, 1987)
[2] 物体の流速は摩擦によって流速に比例して減衰する

3　赤道波の固有モード

この章は, Matsuno (1966) で示された赤道波の固有モードの導出を紹介する. また赤道波の固有モードを図示し, 特徴について議論する.

3.1 節 では, (19), (20), (21) 式に対して x, t 方向に波動解を仮定して変数分離を行い, $\hat{v}$ のみの式に整理する. 次にこの式から分散関係式を求め, 解 $\hat{v}$ をエルミート多項式を用いてあらわす. 3.2 節 では, $\hat{v}$ のみの式から求まる分散関係式の解である 3 つの振動数 ω_l $(l = 1, 2, 3)$ に対し, エルミート多項式の次数 n で場合分けを行う. 3.3 節 では, ω_l に対する $\hat{u}_l, \hat{v}_l, \hat{\phi}_l$ を 3.2 節 と同様に n で場合分けを行う. 3.4 節 では, 赤道波の固有モードの特徴を Matsuno (1966) に基づいて議論する.

3.1　分散関係式の導出

(19), (20), (21) 式の u, v, ϕ にかかる変数係数は y のみであるから, x, t 方向に関しては u, v, ϕ のそれぞれついて,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \hat{u}(y) e^{-i\omega t + ikx}, \\ v(x, y, t) &= \hat{v}(y) e^{-i\omega t + ikx}, \\ \phi(x, y, t) &= \hat{\phi}(y) e^{-i\omega t + ikx} \end{aligned}$$

とする. ここで k は東西波数, ω は振動数である. この式を (19), (20), (21) 式に代入すると y 依存性の式は,

$$-i\omega\hat{u} - y\hat{v} + ik\hat{\phi} = 0, \tag{25}$$

$$-i\omega\hat{v} + y\hat{u} + \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y} = 0, \tag{26}$$

$$-i\omega\hat{\phi} + ik\hat{u} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial y} = 0 \tag{27}$$

となる. 上式を整理し, $\hat{v}$ の式を求める:

$$\frac{d^2\hat{v}}{dy^2} + \left(\chi - y^2\right)\hat{v} = 0, \tag{28}$$

$$\chi = \omega^2 - k^2 - \frac{k}{\omega}.$$

ここで境界条件を

$$\hat{v} \to 0 \quad (y \to \pm\infty) \tag{29}$$

と定めると, (28) 式はスツルムリュービルの固有値問題である. この時, 固有値は離散的な値

$$\chi = 2n+1 \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{30}$$

をとる. (28) 式 に対する解は, 次のように与えられる:

$$\hat{v}(y) = C \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \quad (C = \text{const}). \tag{31}$$

ここで, $H_n(y)$ は n 次のエルミート多項式である.

3.2　振動数の固有モード

(30) 式は次式に書き換えられる:

$$\omega^3 - (k^2 + 2n + 1)\omega + k = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{32}$$

n は v の南北方向の節の数に対応しており, (32) 式 は ω, k, n の関係を示した分散関係式である. この式は ω の 3 次式であり, ω の解は 3 つ得られる. (32) 式 に対して, $k \geq |\omega|$, $k \gg \omega$ と近似する. これは, 中緯度において線形化された浅水方程式系に対して分散関係式を求める場合に行う近似と同様である. その結果, 解は

$$\omega_{1,2} \ \sim \ \pm\sqrt{k^2 + 2n + 1}, \tag{33}$$

$$\omega_3 \ \sim \ -\frac{k}{k^2 + 2n + 1} \tag{34}$$

となる. しかし $n = 0$ の場合には, (34) 式 は成立しない. また, $v \equiv 0$ の場合にも分散関係式は求まる. そこで (33), (34) 式 の ω_l $(l = 1, 2, 3)$ に対する固有モードの性質を $n \geq 1$, $n = 0$, $v \equiv 0$ $(n = -1)$ に場合分けをして考える.

1. $n \geq 1$ の波動

   得られる ω は 3 つであり, (33), (34) 式 である. 中緯度で近似的に得られる分散関係式と比較すると, 式の形から中緯度における波動の振動数と対応づけられる. ω_1 であらわされる波動は東向き慣性重力波, ω_2 であらわされる波動は西向き慣性重力波, ω_3 であらわされる波動はロスビー波に他ならない.

2. $n = 0$ の波動

(32) 式 で $n = 0$ を代入すると,

$$(\omega + k)(\omega^2 + k\omega - 1) = 0$$

である. ω は 3 つ得られるが, $n \geq 1$ の時の 3 つの波動の振動数とは 1 対 1 に対応しない. それは (25), (27) 式 から, ϕ を消した (u, v) の関係式

$$\hat{u} = \frac{-\omega y\hat{v} + k\frac{d\hat{v}}{dy}}{i(\omega - k)(\omega + k)}$$

により, $\omega = k$ はない事が分かるからである. よって, 得られる ω は以下の 2 つになる:

$$\omega_1 = k/2 + \sqrt{(k/2)^2 + 1}, \tag{35}$$

$$\omega_2 = k/2 - \sqrt{(k/2)^2 + 1}. \tag{36}$$

(35) 式 は, 東向き慣性重力波の振動数に対応する.

(36) 式 については, (33), (34) 式 と比較をおこなう. $k \ll 1/\sqrt{2}$ では, 慣性重力波の式 (33) の形に近付く事から, 慣性重力波の性質を持つ. $k \gg 1/\sqrt{2}$ では, ロスビー波の式 (34) の形に近付く事から, ロスビー波の性質を持つ (図 2). この 2 つの性質は k とともに連続的にかわる. よって, (36) 式であらわされる波動を混合ロスビー重力波という.

3. $v \equiv 0$ $(n = -1)$ の波動

今までは $\hat{v}$ の式 (28) を考えた. しかし (25), (26), (27) 式 で $\hat{v} \equiv 0$ としたときの式

$$-i\omega\hat{u} + ik\hat{\phi} = 0, \tag{37}$$

$$y\hat{u} + \frac{d\hat{\phi}}{dy} = 0, \tag{38}$$

$$-i\omega\hat{\phi} + ik\hat{u} = 0 \tag{39}$$

からも分散関係式が得られる:

$$(\omega + k)(\omega - k) = 0.$$

上式から, (37), (38), (39) 式の $\hat{\phi}, \hat{u}$ が求まる:

$$\hat{\phi} = \hat{u} = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (\omega = k), \tag{40}$$

$$\hat{\phi} = -\hat{u} = Ce^{\frac{1}{2}y^2} \quad (\omega = -k) \quad (C = \text{const}). \tag{41}$$

この 2 式のうち境界条件 (29) 式を満たすのは, (40) 式 のみである. (40) 式 は (32) 式 において, $n = -1$ とした時にも求まる.

振動数は $k = 0$ の時, 他の東向きの波動が最小の値 $\omega = \sqrt{2n+1}$ を持っているのに対して, (40) 式 では $\omega = 0$ になる. また, $\hat{u}, \hat{\phi}$ は赤道に最大の振幅を持ち, 赤道から離れるにつれ指数関数的に減少する事, 進行方向に直交する成分 $\hat{v}$ を持たない事から, 境界に沿って伝播するケルビン波の性質を持っている. よって, (40) 式 であらわされる波動を赤道ケルビン波という.

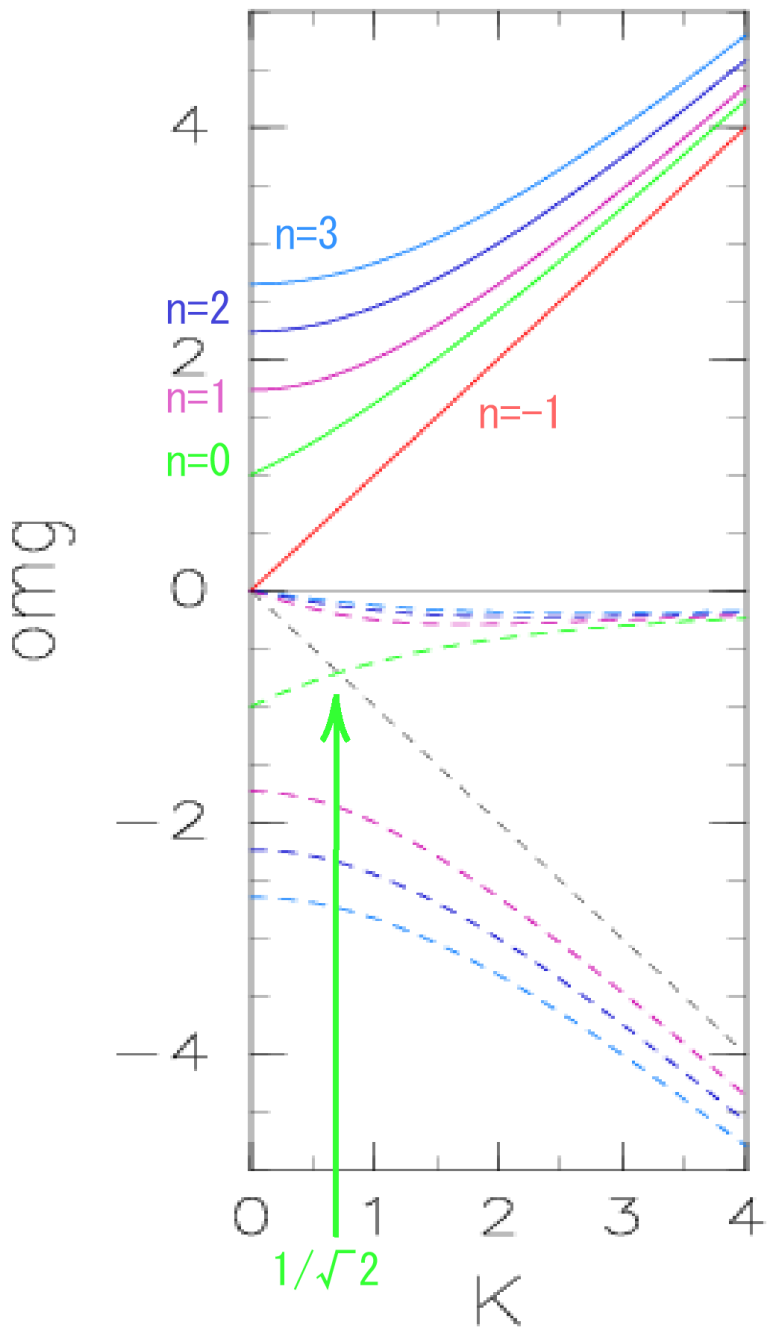

図 2: 赤道波の固有モード n= -1,0,1,2,3 の分散曲線.
横軸は k, 縦軸は ω である. それぞれ赤色は $n=-1$, 緑色は $n=0$, 紫色は $n=1$, 青色は $n=2$, 水色は $n=3$ の分散曲線である. 実線の $n=0$ と $n=1,2,3$ は東向き慣性重力波の分散曲線, これに対称な破線の $n=1,2,3$ は西向き慣性重力波の分散曲線, $\omega=0$ 近傍の破線 $1,2,3$ はロスビー波の分散曲線である. また, $n=0$ の破線は混合ロスビー重力波の分散曲線, $n=-1$ の実線はケルビン波の分散曲線である.

3.3　赤道波の固有モードの導出

(25), (26), (27) 式を整理すると $(\hat{u}, \hat{v})$, $(\hat{\phi}, \hat{v})$ の関係式が求まる:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{1}{i(\omega^2 - k^2)}(-\omega y\hat{v} + k\frac{d\hat{v}}{dy}), \\ \hat{\phi} &= \frac{1}{-i(\omega^2 - k^2)}(ky\hat{v} - \omega\frac{d\hat{v}}{dy}). \end{aligned}$$

上式に ω_l を代入すると, ω_l に対する $\hat{u}_l, \hat{v}_l, \hat{\phi}_l$ が求まる. さらにこの $\hat{u}_l, \hat{v}_l, \hat{\phi}_l$ に対して (31) 式 を代入し, エルミート多項式の昇降関係式

$$\frac{dH_n(y)}{dy} = 2nH_{n-1}(y), \tag{42}$$

$$H_{n+1}(y) = 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y) \tag{43}$$

を用いて, $\hat{u}_{nl}, \hat{v}_{nl}, \hat{\phi}_{nl}$ を導く. ここで, 添字 n はエルミート多項式の次数である.

$\psi_n = \exp(-1/2\, y^2)H_n(y)$ とし, 前節と同様に $n \geq 1$, $n = 0$, $v \equiv 0$ $(n = -1)$ に場合分けをすると次式を得る:

1. $n \geq 1$ の時

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_{nl} \\ \hat{u}_{nl} \\ \hat{\phi}_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(\omega_{nl}^2 - k^2)\psi_n \\ -\frac{1}{2}(\omega_{nl} + k)\psi_{n+1} + n(-\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \\ -\frac{1}{2}(\omega_{nl} + k)\psi_{n+1} - n(-\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \end{pmatrix} \tag{44}$$

2. $n = 0$ の時

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_{0l} \\ \hat{u}_{0l} \\ \hat{\phi}_{0l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i(-\omega_{0l} + k)\psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

3. $v \equiv 0$ $(n = -1)$ の時

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_{-1} \\ \hat{u}_{-1} \\ \hat{\phi}_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

3.4　赤道波の固有モードの特徴

赤道波の固有モードの図を示し, 特徴を議論する.

図は, ω_{nl} に対する $u_{nl}, v_{nl}, \phi_{nl}$ の $n = -1, 0, 1, 2$ を示す. そして, 3.2, 3.3 節 と同様に $n \geq 1$, $n = 0$, $v \equiv 0$ $(n = -1)$ に場合分けをして議論を行う. 3.4.1 では 全ての固有モードに共通する特徴について, 3.4.2 では $n \geq 1$ の波動の特徴について, 3.4.3 では $n = 0$ の波動の特徴について, 3.4.4 では $n = -1$ の波動の特徴についてそれぞれ述べる. また ϕ は, 圧力 p とみなして議論している.

3.4.1　共通の特徴

すべての固有モードに共通する特徴として, n が v の南北方向の節の数を示していることが挙げられる. これは, 3.1 節 でも述べたことである. また, v は n が偶数次の時は赤道対称, 奇数次の時は赤道反対称の分布をしている. 一方で, u, ϕ は v とは n の偶奇性が逆になっており, n が偶数次の時は赤道反対称, 奇数次の時は赤道対称の分布をしている. さらに, 高次の波動ほど南北方向に広範囲にわたっている.

3.4.2　$n \geq 1$ の波動の特徴

$n \geq 1$ の場合には, 中緯度の 3 つの波動に対応する東向きの慣性重力波, 西向きの慣性重力波, ロスビー波がはっきりと区別できる.

図 3, 図 4 は, それぞれ東向き慣性重力波, 西向き慣性重力波を示している. これらの図から, 東西方向の圧力傾度の最大の点に南北方向からの流速の収束発散があることが分かる. この波動の伝播を考えると, この収束部は次の圧力の最大部になり, 発散部は次の圧力の最小部になる. この繰り返しで波動は伝播する. また赤道から離れるにつれ, コリオリ力の影響を受けて流速の向きが変わる様子がみられる.

もう一つの波動であるロスビー波は, 図 5 に示される. この図から, 赤道近傍を除いて等圧線に対して平行の流れが見られ, ほぼ地衡流平衡が成立していることが分かる. しかし $n = 1$ では赤道近傍で成立していない. さらに $n = 2$ では, 赤道近傍の等圧線の間隔が狭い所では他の場所に比べ強い流れがある. 以上のことはロスビー波がコリオリパラメータの緯度変化を復元力とする波であり, 赤道近傍ではコリオリ力が働かないことが原因となっている.

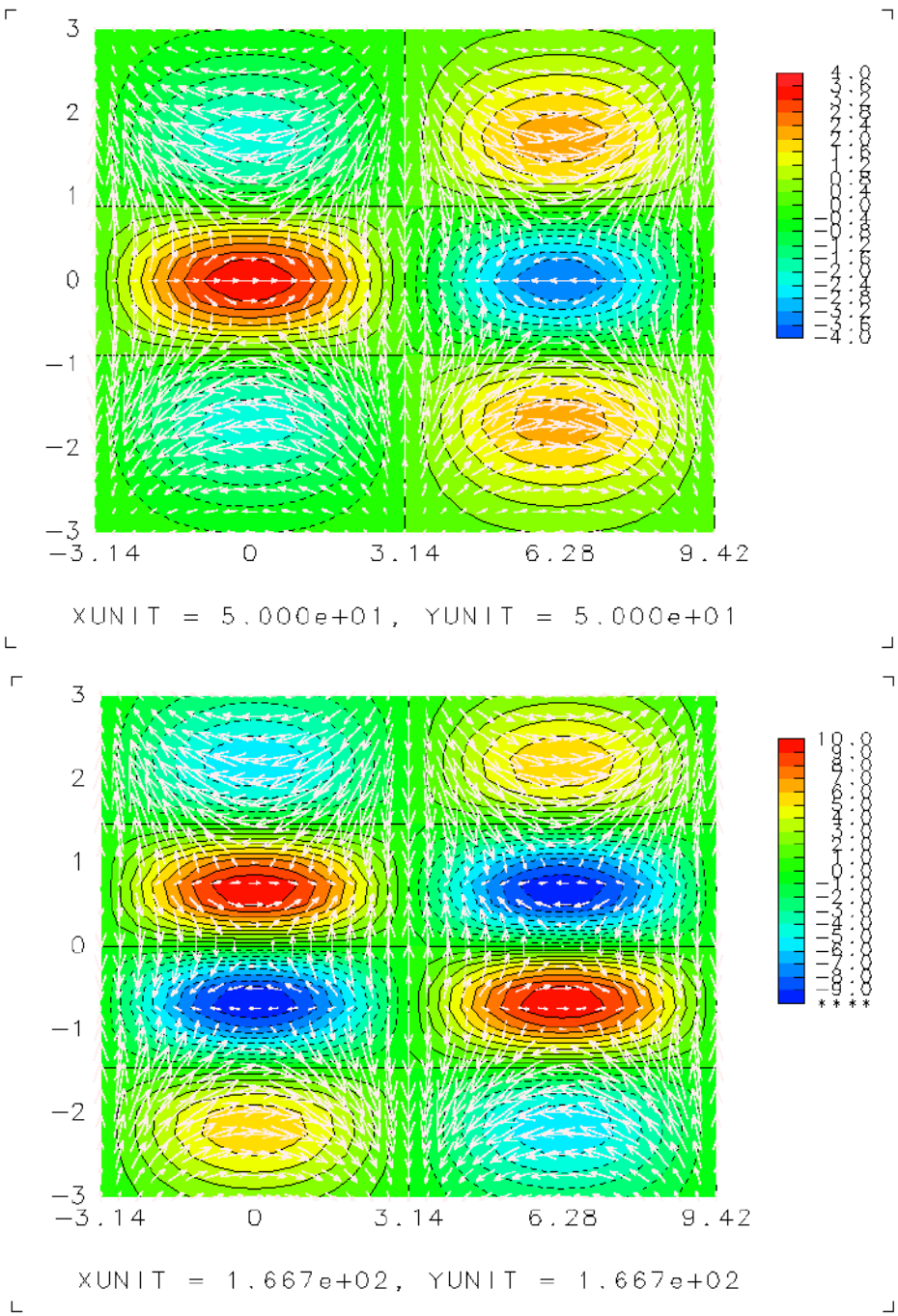

図 3: 東向き慣性重力波

図の等値線は ϕ , 矢羽は (u, v) の向きと大きさを示す. 上: $n = 1, k = 0.5, \omega = 1.80$ であり, 等値線間隔は 0.4 である. 下: $n = 2, k = 0.5, \omega = 2.29$ であり, 等値線間隔は 1.0 である.

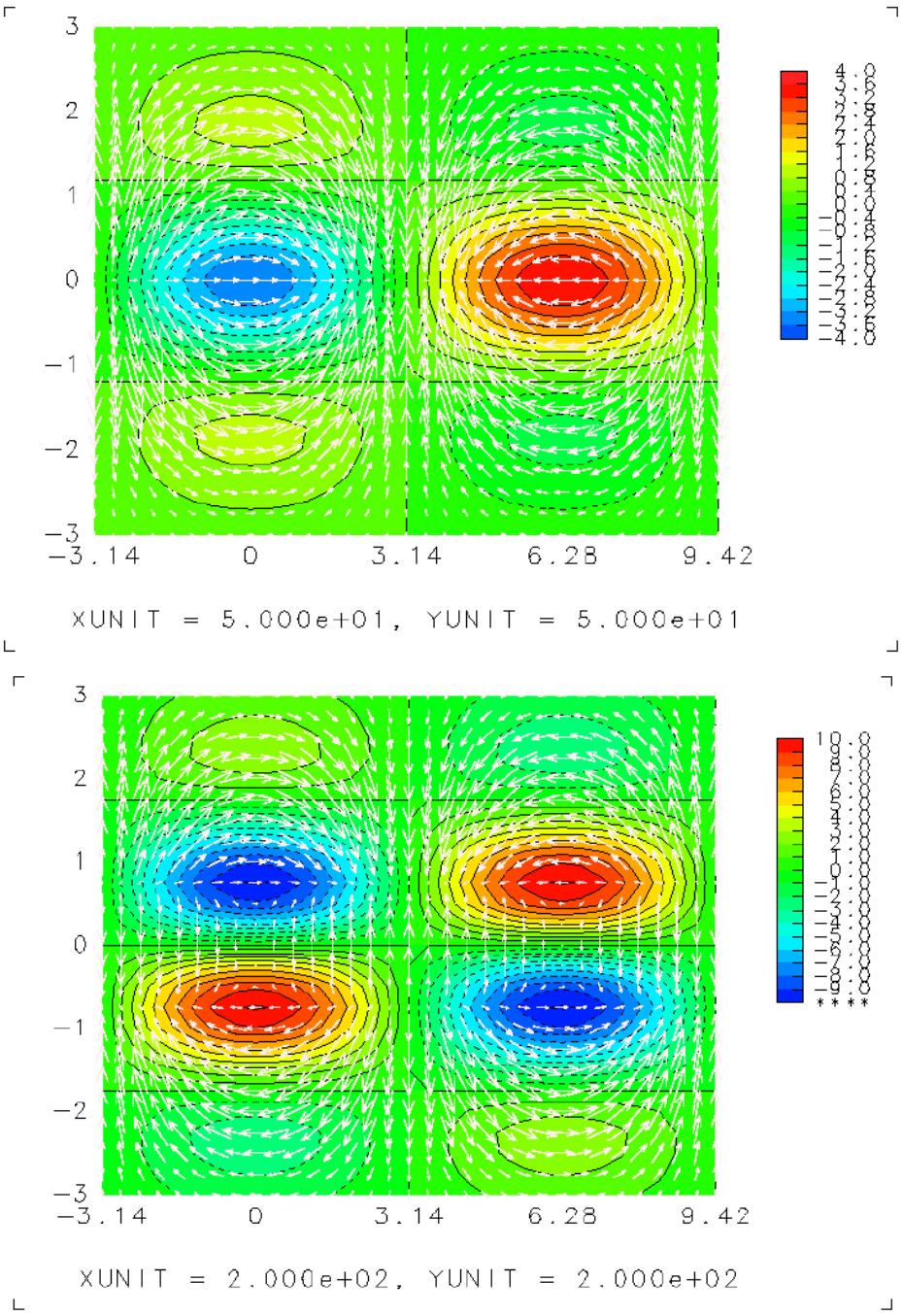

図 4: 西向き慣性重力波

図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 上: $n = 1, k = 0.5, \omega = -1.80$ であり, 等値線間隔は 0.4 である. 下: $n = 2, k = 0.5, \omega = -2.29$ であり, 等値線間隔は 1.0 である.

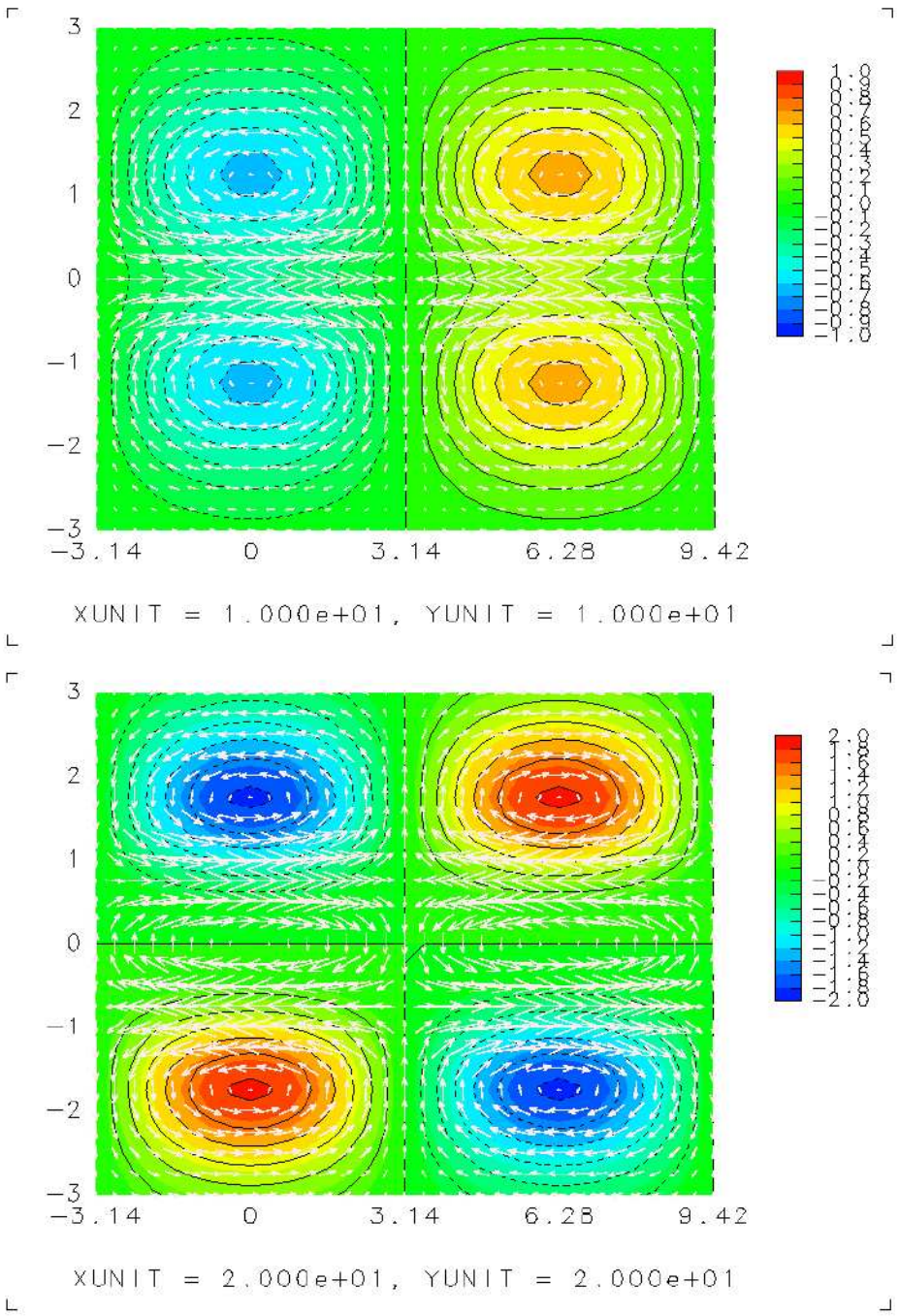

図 5: ロスビー波

図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 上: $n = 2, k = 0.5, \omega = -0.15$ であり, 等値線間隔は 0.1 である. 下: $n = 2, k = 0.5, \omega = -9.52$ であり, 等値線間隔は 0.3 である.

3.4.3　$n = 0$ の波動の特徴

$n = 0$ の場合に得られる波動は 2 つしかなく, 東向き慣性重力波と混合ロスビー重力波である.

このうち 図 6 に示される混合ロスビー重力波は赤道を横切る南北流速を持ち, 赤道をはさんで高圧部と低圧部が対になっている. この性質は $n = 2$ の西向き慣性重力波の性質に似ている. 一方で, 赤道から離れた所では, ほぼ地衡流平衡が成り立っており, この性質は $n = 2$ のロスビー波の性質に似ている. 混合ロスビー波の振動数の性質については 3.2 節 でも述べたが, 図 6 からも混合ロスビー重力波が, 慣性重力波とロスビー波の両方の性質を持った波動であることがいえる.

3.4.4　$n = -1$ の波動の特徴

$n = -1$ の場合に得られる波動はケルビン波である.

図 7 で示されるこの波動は, 流速は東西方向のみを持っている. また, u, ϕ は赤道に最大の振幅を持っている. 赤道上では, 圧力傾度の最大の点に流速の収束発散が見られ, 伝播の性質は東向きの慣性重力波に似ているが, 南北方向には完全に地衡流平衡の状態にある.

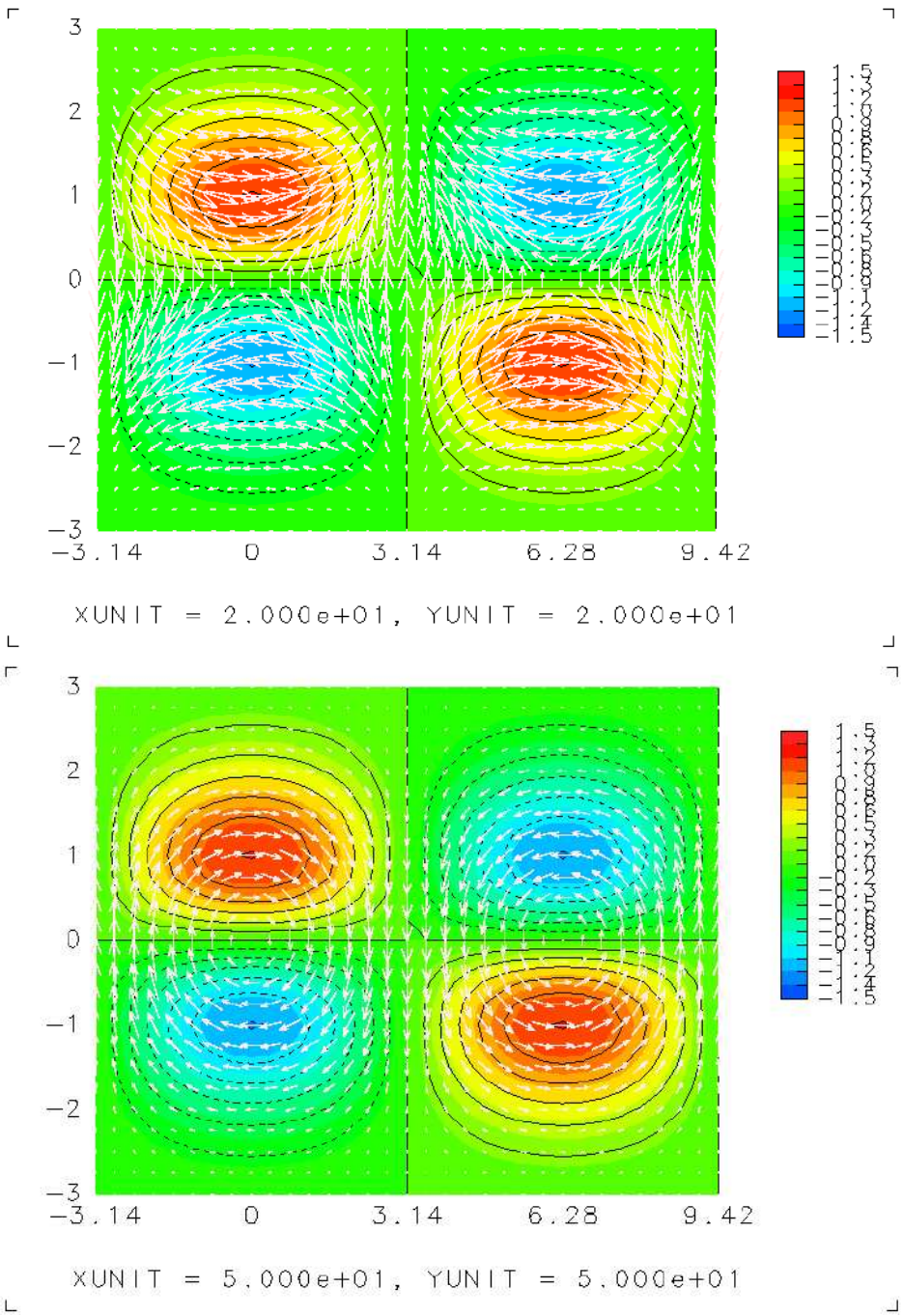

図 6: 東向き慣性重力波, 混合ロスビー重力波
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 上: 東向き慣性重力波 $n = 0, k = 0.5, \omega = 1.28$ であり, 等値線間隔は 0.2 である. 下: 混合ロスビー重力波 $n = 0, k = 0.5, \omega = -0.781$ であり, 等値線間隔は 0.2 である.

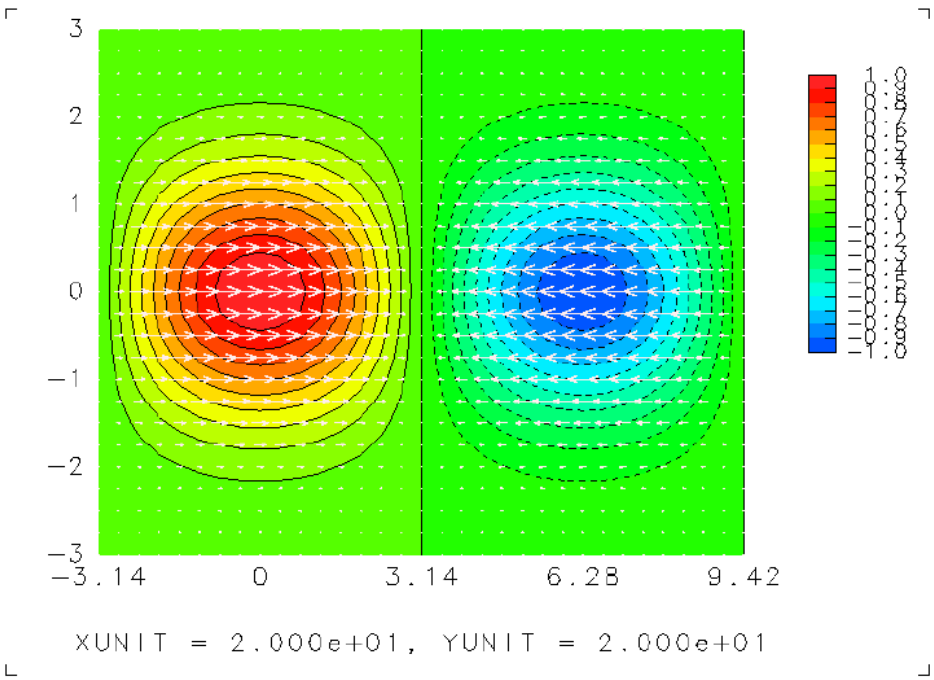

図 7: ケルビン波

図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. $n = -1, k = 0.5, \omega = 0.5$ であり, 等値線間隔は 0.1 である.

4　時間発展の数値モデル

この章では, スペクトル法を用いて (22), (23), (24) 式の時間発展について数値計算を行うための手法を述べる. 計算は, 初期変位を与えた時と熱源を与えた際について行う.

4.1 節では, 空間方向に関数展開をする. x 方向にフーリエ変換し, y 方向にエルミート多項式で展開する. 4.2 節では, 展開係数 $u_{k,n}, v_{k,n}, \phi_{k,n}$ の関係式を求める. 4.3 節では, 数値計算をするためのパラメータの設定, 与える熱源や初期変位の設定について述べる.

4.1　関数展開

3.1 節 より, (22), (23), (24) 式の (u, v, ϕ) はそれぞれ次の様に展開できる:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\pi kx/L} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) u_{k,n}(t), \tag{47}$$

$$v(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\pi kx/L} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) v_{k,n}(t), \tag{48}$$

$$\phi(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\pi kx/L} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \phi_{k,n}(t). \tag{49}$$

ここで, L は x 方向の領域幅であり, $-L \le x \le L$ である. 境界条件は, x 方向には周期境界, y 方向には $u, v, \phi \to 0 \ \ (y \to \pm\infty)$ である.

$u_{k,n}, v_{k,n}, \phi_{k,n}$ は, $e^{ikx}, e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y)$ の直交性を用いて求められる. まず u について, x 方向にフーリエ変換を行う. この時, 直交性

$$\int_{-L}^{L} e^{-i\pi kx/L} e^{i\pi lx/L} dx = \delta_{kl} 2L$$

を用いる. 展開した式は以下である:

$$u_k(y,t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{i\pi kx/L} u(x,y,t)\ dx.$$

さらに y 方向も同様にして, エルミート多項式で展開する. この時, 直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n(y) H_m(y) dy = \delta_{nm} 2^n n! \sqrt{\pi}$$

を用いる. 展開した式は以下である:

$$u_{k,n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) u_k(y,t)\ dxdy.$$

これを v, ϕ に対しても同様に行う.

4.2　展開係数の関係式

(47), (48), (49) 式 を (22), (23), (24) 式に代入する．エルミート多項式の昇降関係式 (42), (43) を用いて整理すると次式となる:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}u_{k,n}H_n e^{ikx-\frac{1}{2}y^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\varepsilon u_{k,n}H_n e^{ikx-\frac{1}{2}y^2} \\
&\quad +nv_{k,n}H_{n-1}e^{ikx-\frac{1}{2}y^2}+\frac{1}{2}v_{k,n}H_{n+1}e^{ikx-\frac{1}{2}y^2} \\
&\quad -ik\phi_{k,n}H_n e^{ikx-\frac{1}{2}y^2}\Big), \\
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}v_{k,n}H_n e^{ikx-\frac{1}{2}y^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\varepsilon v_{k,n}H_n e^{ikx-\frac{1}{2}y^2} \\
&\quad -nu_{k,n}H_{n-1}e^{ikx-\frac{1}{2}y^2}-\frac{1}{2}u_{k,n}H_{n+1}e^{ikx-\frac{1}{2}y^2} \\
&\quad -n\phi_{k,n}H_{n-1}e^{ikx-\frac{1}{2}y^2}+\frac{1}{2}\phi_{k,n}H_{n+1}e^{ikx-\frac{1}{2}y^2}\Big), \\
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\phi_{k,n}H_n e^{ikx-\frac{1}{2}y^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\varepsilon \phi_{k,n}H_n e^{ikx-\frac{1}{2}y^2} \\
&\quad -iku_{k,n}H_n e^{ikx-\frac{1}{2}y^2} \\
&\quad -nv_{k,n}H_{n-1}e^{ikx-\frac{1}{2}y^2}+\frac{1}{2}v_{k,n}H_{n+1}e^{ikx-\frac{1}{2}y^2} \\
&\quad +Q_{k,n}H_n e^{ikx-\frac{1}{2}y^2}\Big).
\end{aligned}
$$

さらに上式について $n=0, n\geq 1$ に場合分けをすると, 展開係数 $u_{k,n}, v_{k,n}, \phi_{k,n}$ の関係式は,

$$
\left.
\begin{aligned}
du_{k,n}/dt &= -\varepsilon u_{k,n}+(n+1)v_{k,n+1}+\tfrac{1}{2}v_{k,n-1}-ik\phi_{k,n} \\
dv_{k,n}/dt &= -\varepsilon v_{k,n}-(n+1)u_{k,n+1}-\tfrac{1}{2}u_{k,n-1}-(n+1)\phi_{k,n+1}+\tfrac{1}{2}\phi_{k,n-1} \\
d\phi_{k,n}/dt &= -\varepsilon \phi_{k,n}-iku_{k,n}-(n+1)v_{k,n+1}+\tfrac{1}{2}v_{k,n-1}+Q_{k,n}
\end{aligned}
\right\}\ (n\geq 1), \quad (50)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
du_{k,0}/dt &= -\varepsilon u_{k,0}+v_{k,1}-ik\phi_{k,0} \\
dv_{k,0}/dt &= -\varepsilon v_{k,0}-u_{k,1}-\phi_{k,1} \\
d\phi_{k,n}/dt &= -\varepsilon \phi_{k,0}-iku_{k,0}-v_{k,1}+Q_{k,1}
\end{aligned}
\right\}\ (n=0) \qquad (51)
$$

となる.

4.3　計算設定

計算は熱源を与えた時と初期変位を与えた時について行った. それぞれに与える変位は, 赤道に対して対称, 反対称の場合の 2 つである.

フーリエ変換には 石岡 (1998) の ispack-0.5 を用いた. 切断波数は 10 とする. エルミート多項式は 4 次の項までとった.

t 方向に関しては, ノイマンの安定性解析に基づいて, 減衰項には前進差分, 移流項には中心差分をとる. また, 中心差分は計算回数の偶数回目と奇数回目で 2 つの独立な解が求まる性質があるため, 10 回計算するごとに前進差分をおこなってこれを回避する.

計算領域は赤道対称であり, 格子点数は x 方向に 40, y 方向に 20 とする. 格子点間隔は無次元数で dx は $18/40$, dy は $9/20$ である. 時間間隔は, 無次元数で $1/20$ である.

4.3.1　熱源を与えた時の時間発展

$t = 0$ から 熱源を与える. 熱源 Q は以下のように与える (図 8):

$$\begin{aligned} \text{赤道対称} \qquad Q(x,y) &= \exp(-\frac{1}{2}y^2)\cos(ax) \quad (|x| < A). \\ \text{赤道反対称} \qquad Q(x,y) &= y\exp(-\frac{1}{2}y^2)\cos(ax) \quad (|x| < A). \end{aligned}$$

ここで, $a = \pi/(2A)$ であり, A は加熱領域の幅である. 減衰率 ε は 0 と 0.1 の場合についてそれぞれ計算する.

4.3.2　初期変位を与えた時の時間発展

計算する式は, (50) 式 に対して ε, Q を 0 としたものである. 初期変位として $\phi(x, y, t = 0)$ に 4.3.1 の Q と同様の値を与える (図 8):

$$\begin{aligned} \text{赤道対称} \qquad \phi(x,y,0) &= \exp(-\frac{1}{2}y^2)\cos(ax) \quad (|x| < A), \\ \text{赤道反対称} \qquad \phi(x,y,0) &= y\exp(-\frac{1}{2}y^2)\cos(ax) \quad (|x| < A). \end{aligned}$$

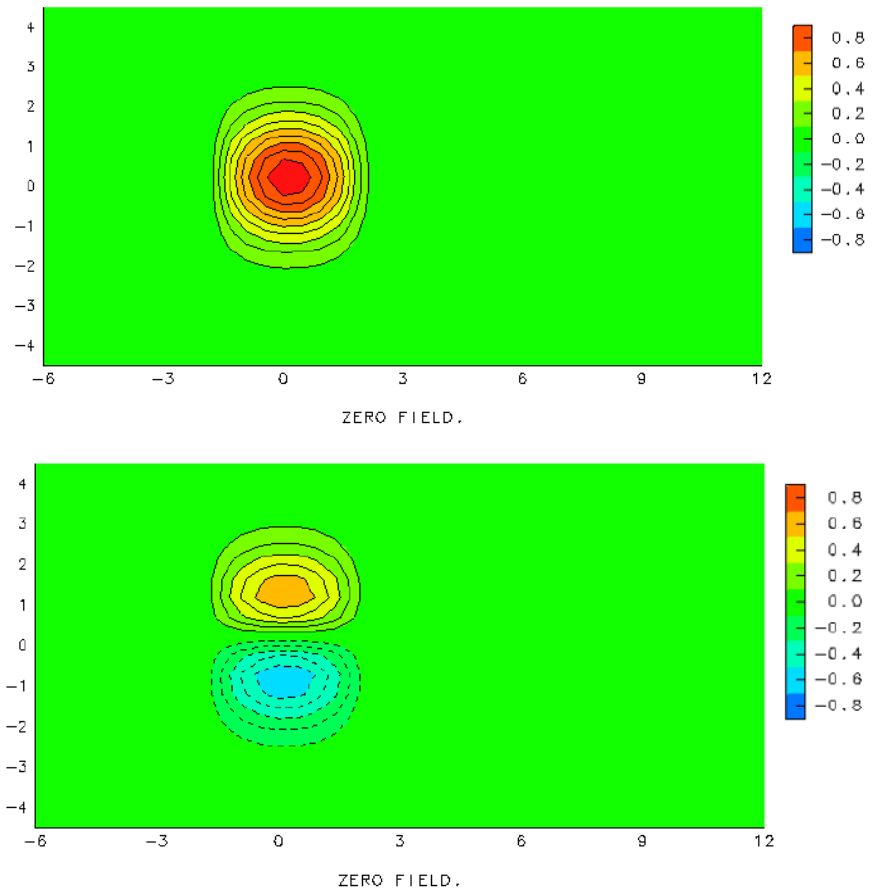

図 8: 熱源 Q, 初期値 $\phi(x,y,0)$ の分布　　上: 赤道対称 下: 赤道反対称
図の等値線は $\phi(x,y,t=0)$ を示す. 等値線は, -2.1 から 2.1 まで示し, 等値線間隔は 0.1 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない. x 方向の加熱領域の幅は, $|A|<2$ である.

5　結果と考察

数値計算の結果の図を示し, 特徴を議論する.

5.1 節 では, 熱源を与えた時の時間発展を議論する. 議論は熱源を赤道対称, 赤道反対称に与えた時について行い, このそれぞれに対して $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0.1$ の場合を議論する. 5.2 節 では, 初期変位を与えた時の時間発展を議論する. 議論は初期変位を赤道対称, 赤道反対称に与えた時について行う. また ϕ は, 圧力 p とみなして議論している.

図の距離と時間は無次元数であり, 2.3 節 で議論した対流圏を想定した値は, 無次元距離 1 あたり約 1100 km であり, 無次元時間 1 あたり約 10 時間である.

5.1　熱源を与えた時の時間発展

5.1.1　赤道対称

赤道対称の熱源を与えた時に現れる応答は大きく分けて東向きの波動と西向きの波動の 2 つである. この 2 つの波の特徴を $\varepsilon = 0$ と $\varepsilon = 0.1$ の時についてそれぞれ議論する.

- $\varepsilon = 0$

  $\varepsilon = 0$ の時の時間発展の図を図 9, 10 に示す.

  この図に示される東向きの波動は一定の速さで進み, 波動の先端部の通過後には定常な流れが残る. 流速は東西成分だけを持っている. また, 流速と圧力はともに赤道で最大の振幅を持っている. これらの特徴は, ケルビン波の特徴である.

  西向きの波動も東向きと同様に一定の速さで進み, 波動の先端部の通過後には定常な流れが残る. 流速は赤道で最大の振幅を持っており, 流速と圧力場の間にはほぼ地衡流平衡が成り立っている. また圧力の最大の振幅は, 赤道から離れて南北対称に存在する. これらの特徴は, $n = 1$ のロスビー波の特徴である.

  $n = 1$ のロスビー波とケルビン波の速度の関係は, それぞれの波動の分散関係から明らかである. ケルビン波の分散関係は, (40) 式より $\omega_{-1} = k$ であり, $n = 1$ のロスビー波の分散関係は (34) 式より,

$$\omega_{13} \sim -\frac{k}{k^2+3} \sim -\frac{1}{3}k \qquad (k \sim a/L \sim 2/9 \ll 3)$$

である. このことから, $n = 1$ のロスビー波の伝播速度はケルビン波の約 $1/3$ であることが分かる.

- $\varepsilon = 0.1$

  $\varepsilon = 0.1$ の時の時間発展の図を図 11, 12 に示す.

  この図に示される東向きのケルビン波は一定の速さで直進する. その速さは $\varepsilon = 0$ の時と同じである. また, 流速の向きも同じである. しかし, 振幅は伝播距離に対して減衰している.

  西向きの $n = 1$ のロスビー波も一定の速さで進み, その速さは $\varepsilon = 0$ の時と同じである. また, 流速の向きも同じである. しかし, 振幅は伝播距離に対して減衰している. $n = 1$ のロスビー波は, ケルビン波の伝播速度の約 $1/3$ であることから, 伝播距離に対してケルビン波の約 3 倍で減衰している.

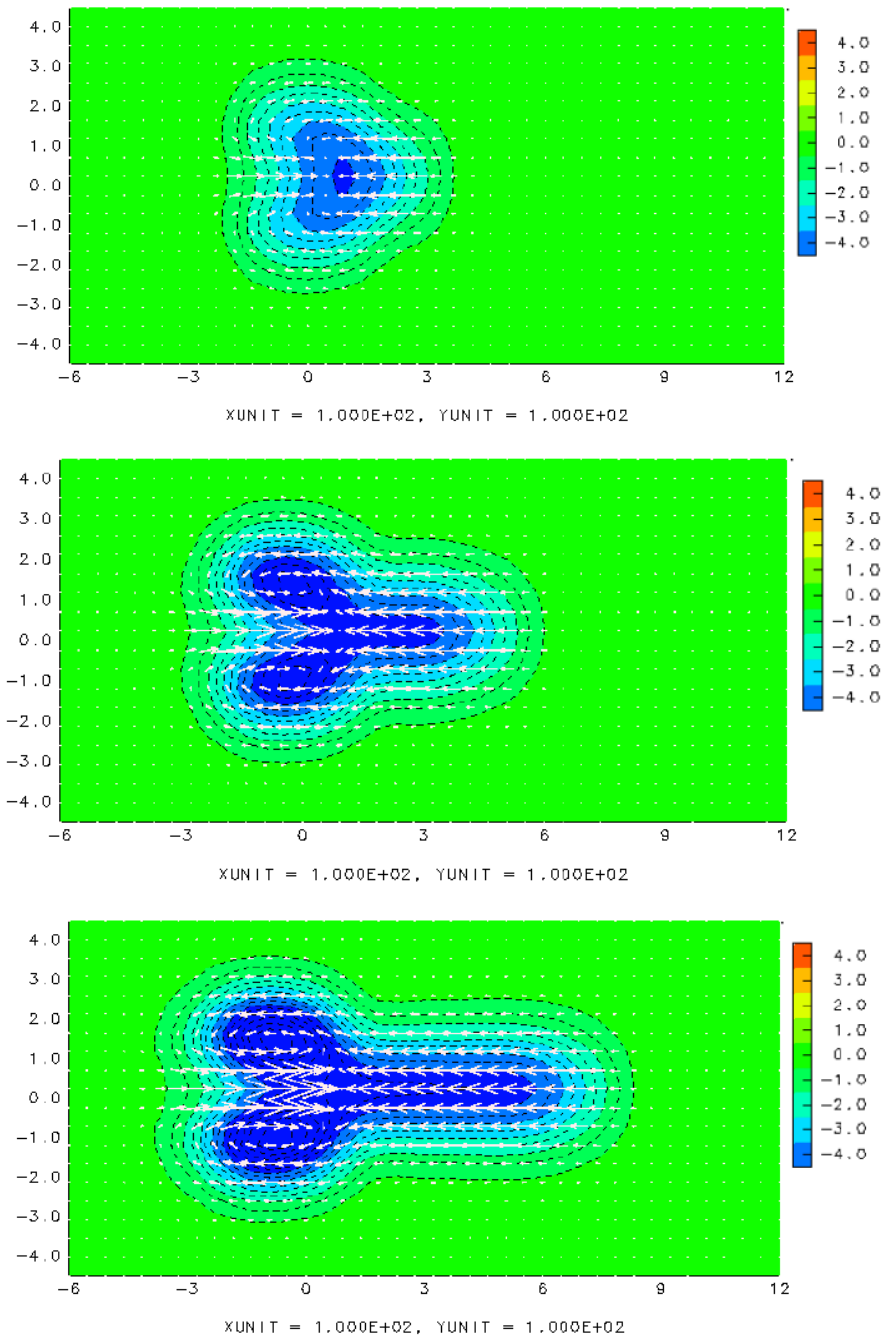

図 9: 赤道対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0$　時間 上: $t = 2$, 中: $t = 4$, 下: $t = 6$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -7.5 から 7.5 まで示し, 等値線間隔は 0.5 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

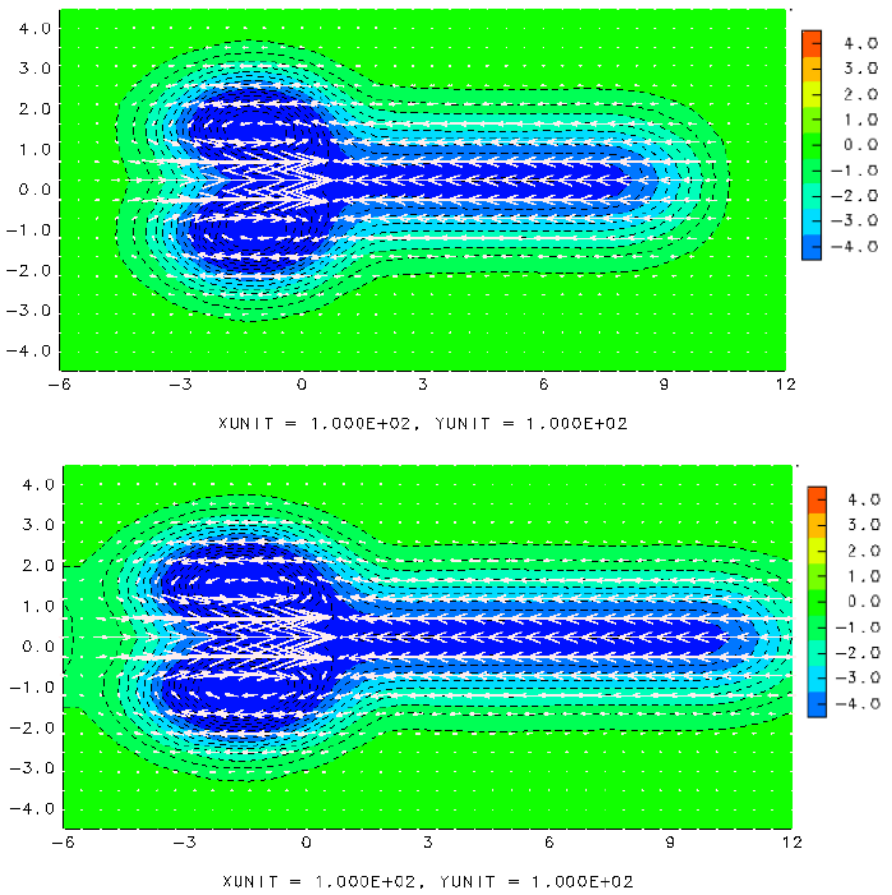

図 10: 赤道対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0$　時間 上: $t = 8$, 下: $t = 10$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -7.5 から 7.5 まで示し, 等値線間隔は 0.5 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

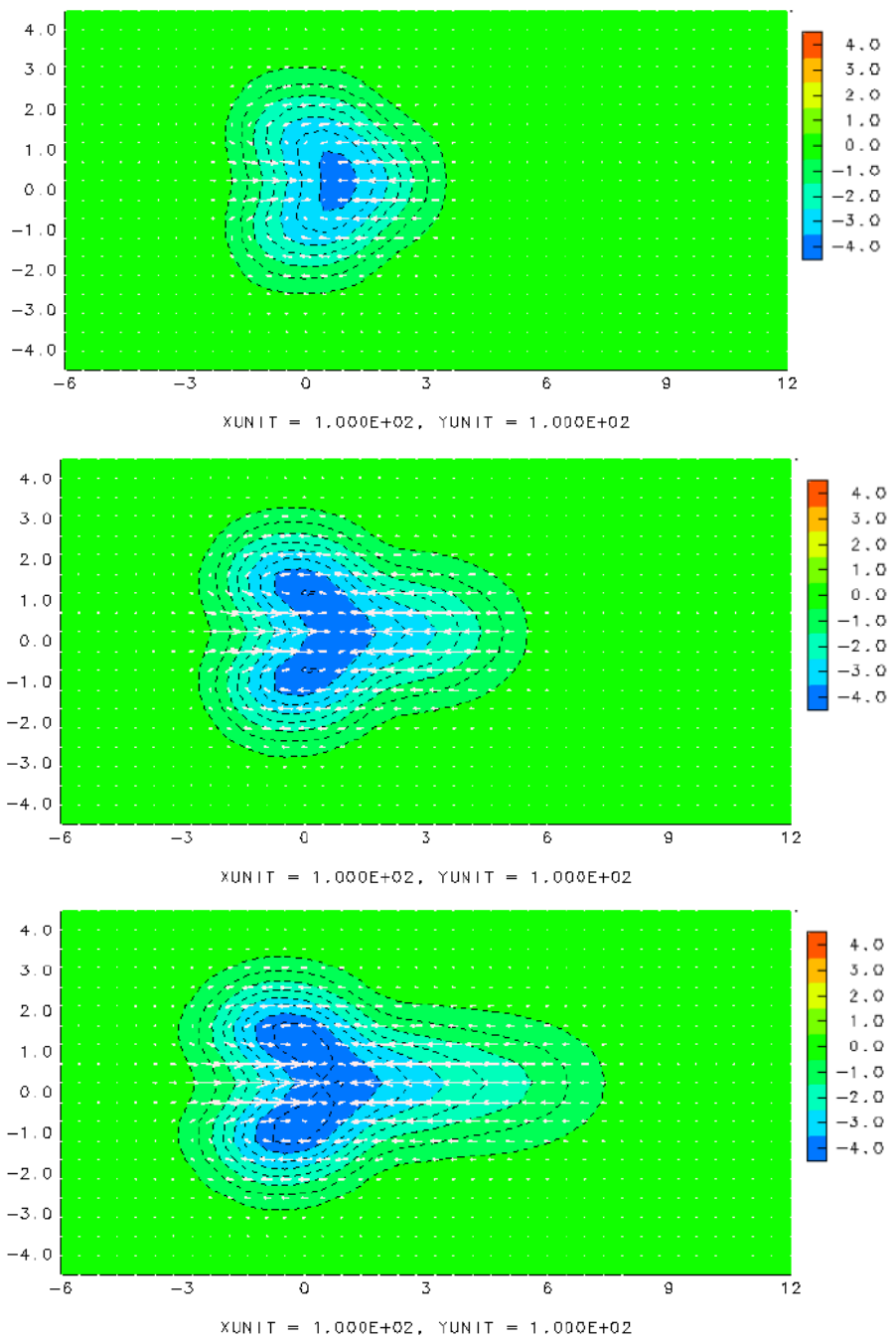

図 11: 赤道対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0.1$　時間 上: $t = 2$, 中: $t = 4$, 下: $t = 6$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -7.5 から 7.5 まで示し, 等値線間隔は 0.5 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

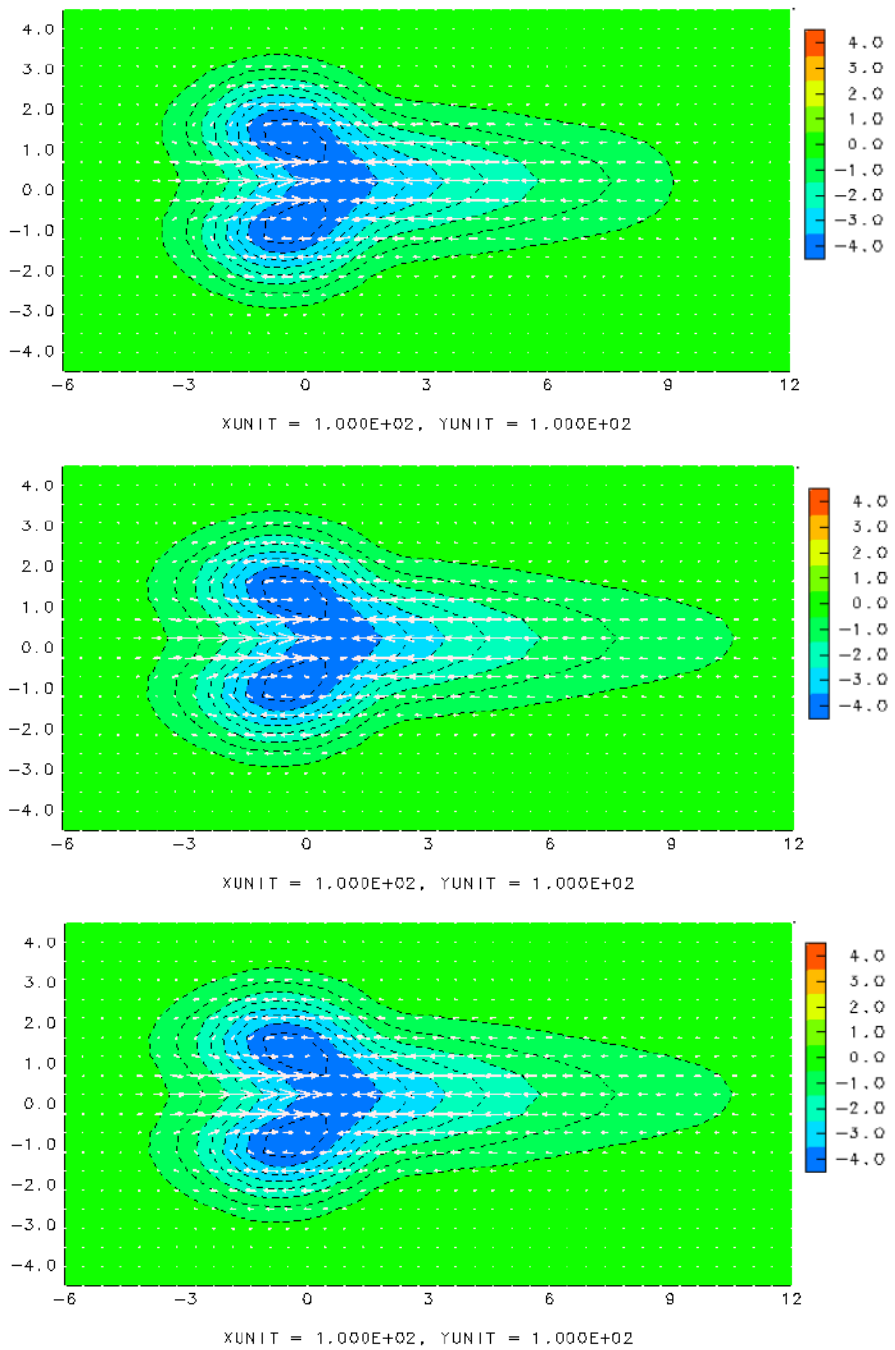

図 12: 赤道対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0.1$　時間 上: $t = 8$, 中: $t = 10$, 下: $t = 12$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -7.5 から 7.5 まで示し, 等値線間隔は 0.5 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

5.1.2　赤道反対称

赤道反対称の熱源を与えた時に現れる応答として, 大きな振幅を持つものは西向きの波動である. また, 小さな振幅を持つ東向きの波動も見られる. これらの波動に対して, $\varepsilon = 0$ と $\varepsilon = 0.1$ の時についてそれぞれ議論する.

- $\varepsilon = 0$

  $\varepsilon = 0$ の時の時間発展の図を図 13, 14 に示す.

  この図に示される西向きの波動は, 一定の速さで進み, 波動の先端部の通過後には定常な流れが残る. 流速と圧力場の間はほぼ地衡流平衡が成り立っている. また, 圧力の最大の振幅は, 赤道から離れてに赤道反対称に存在する. これらの特徴は, $n = 2$ のロスビー波の特徴である.

  東向きには振幅の小さい擾乱が進む. v は赤道対称であり, u, ϕ は赤道反対称の分布をしている. この波動は, $n = 1$ の慣性重力波である.

- $\varepsilon = 0.1$

  $\varepsilon = 0.1$ の時の時間発展の図を図 15, 16 に示す.

  この図に示される西向きの $n = 2$ のロスビー波は一定の速さで直進する. その速さは $\varepsilon = 0$ の時と同じである. また, 流速の向きも変わらない. しかし流速, 圧力の振幅は, 伝播距離に対して減衰する.

  また, 振幅の小さい東向きの慣性重力波は, 減衰を受けて消えてしまう.

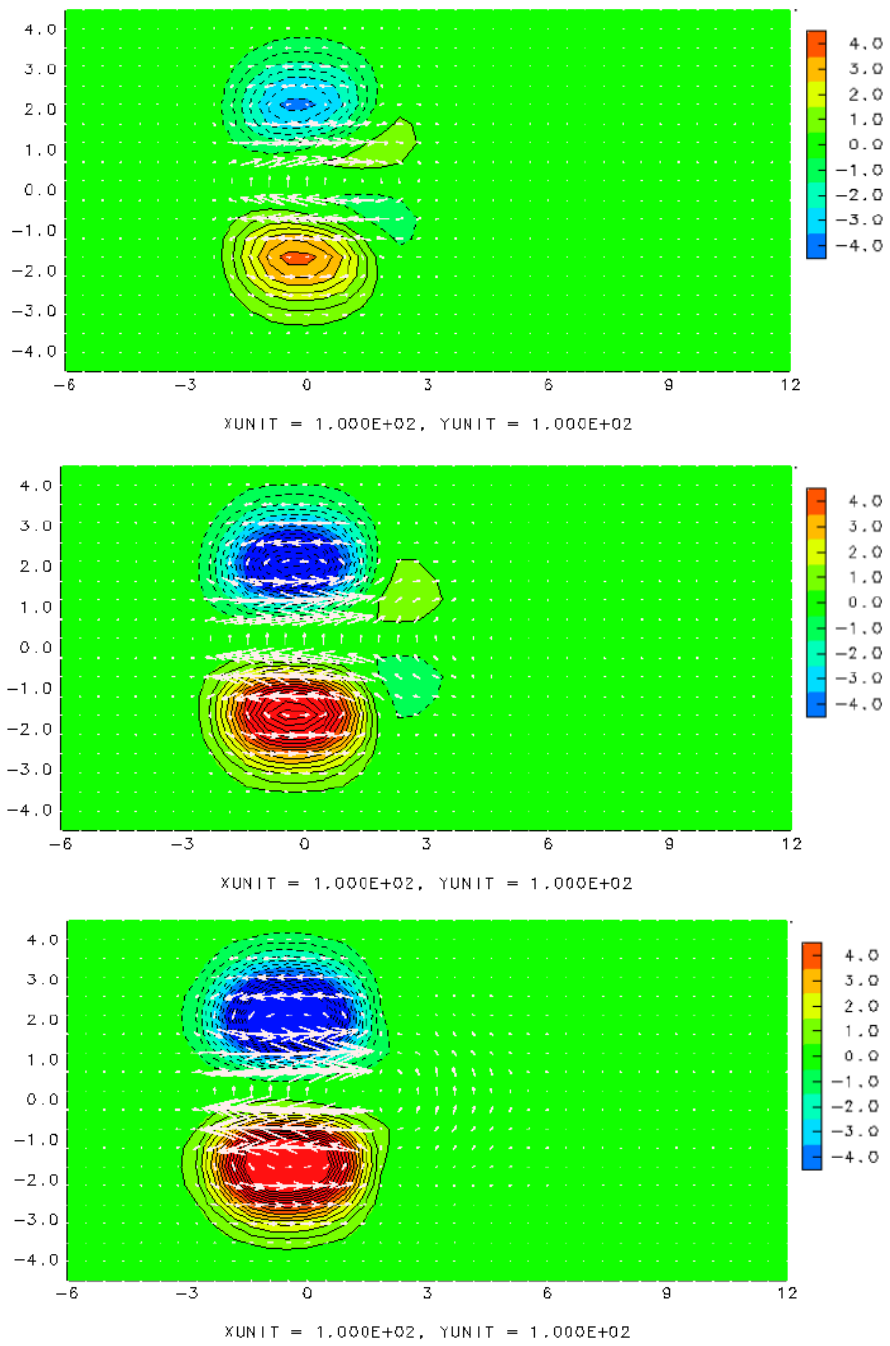

図 13: 赤道反対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0$　時間 上: $t = 2$, 中: $t = 4$, 下: $t = 6$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -7.5 から 7.5 まで示し, 等値線間隔は 0.5 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

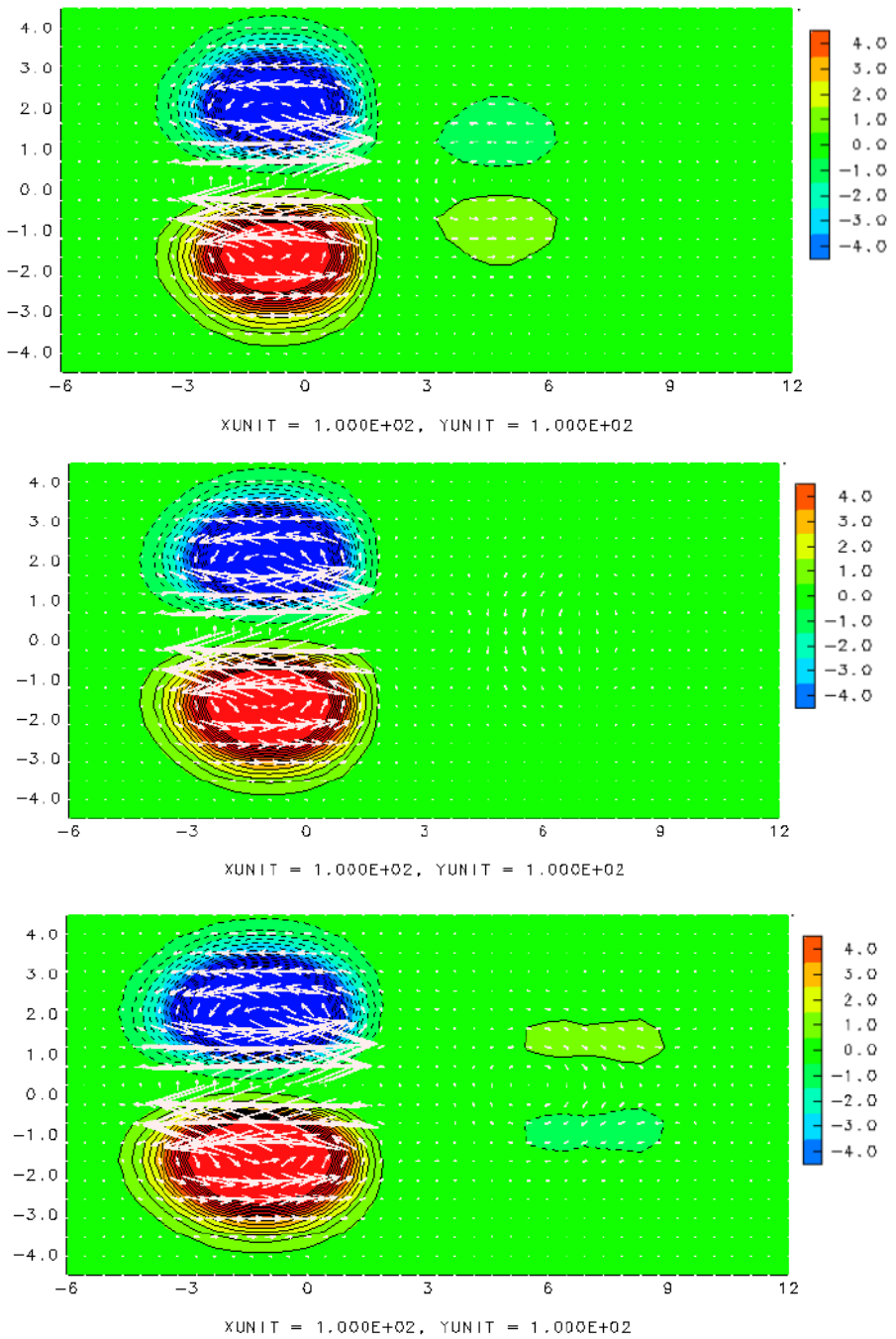

図 14: 赤道反対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0$　時間 上: $t = 8$, 中: $t = 10$, 下: $t = 12$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -7.5 から 7.5 まで示し, 等値線間隔は 0.5 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

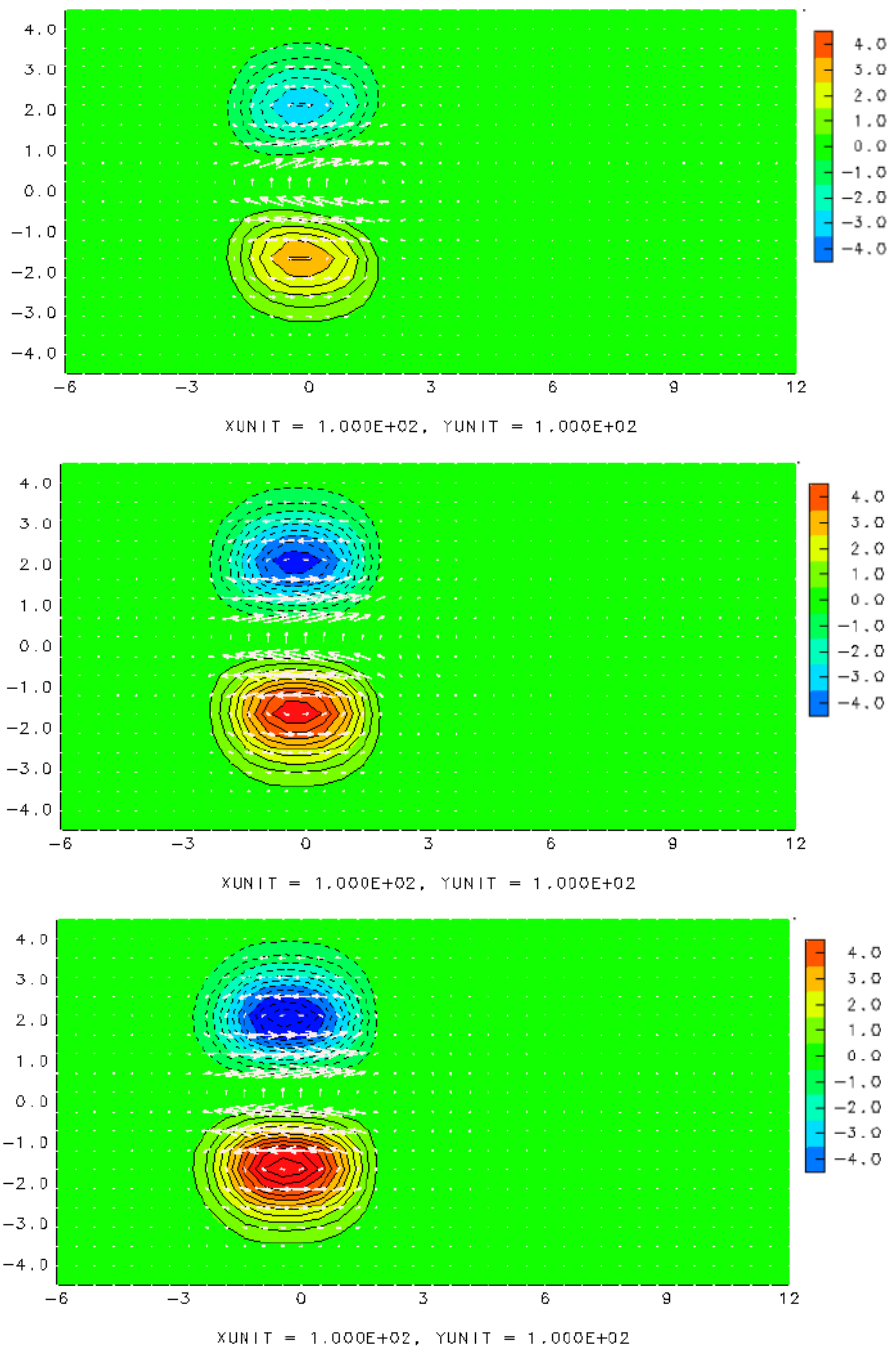

図 15: 赤道反対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0.1$　時間 上: $t = 2$, 中: $t = 4$, 下: $t = 6$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -7.5 から 7.5 まで示し, 等値線間隔は 0.5 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

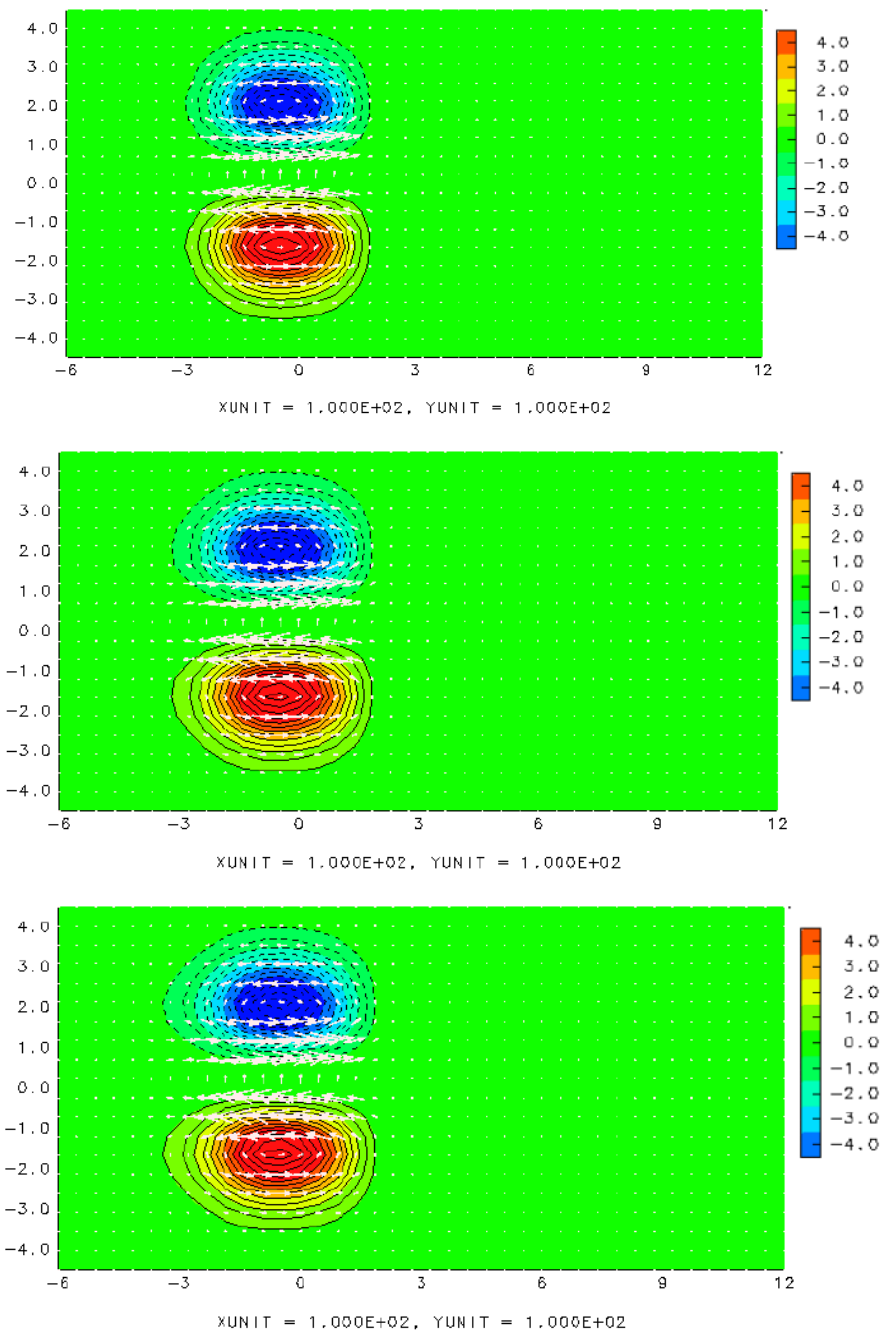

図 16: 赤道反対称に熱源を与えた時の時間発展 $\varepsilon = 0$ 時間 上: $t = 8$, 中: $t = 10$, 下: $t = 12$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -7.5 から 7.5 まで示し, 等値線間隔は 0.5 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

5.2　初期変位を与えた時の時間発展

議論は赤道対称, 赤道反対称について行い, このそれぞれに対して, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0.1$ の場合を議論する.

5.2.1　赤道対称

赤道対称の初期変位を与えた時の時間発展は図 17, 18 に示す.

現れる応答は東向きの擾乱と西向きの擾乱がある. これらの波動は, それぞれ $5.1.1$ で議論したケルビン波, $n = 1$ のロスビー波の特徴を持っている.

またこれら 2 つの波動に加えて, これらの波動の通過後, $x = 0$ 付近に定在して振幅する重力波が残る.

5.2.2　赤道反対称

赤道反対称の初期変位を与えた時の時間発展は図 19, 20 に示す.

現れる応答は東向きの擾乱と西向きの擾乱の 2 つである. これらの波動は, それぞれ $5.1.1$ で議論した $n = 0$ の東向き慣性重力波 , $n = 2$ のロスビー波の特徴と同じである.

また, $5.1.1$ と異なる点として, 東向きの慣性重力波が次々に生まれ, 伝播していく様子が見られる.

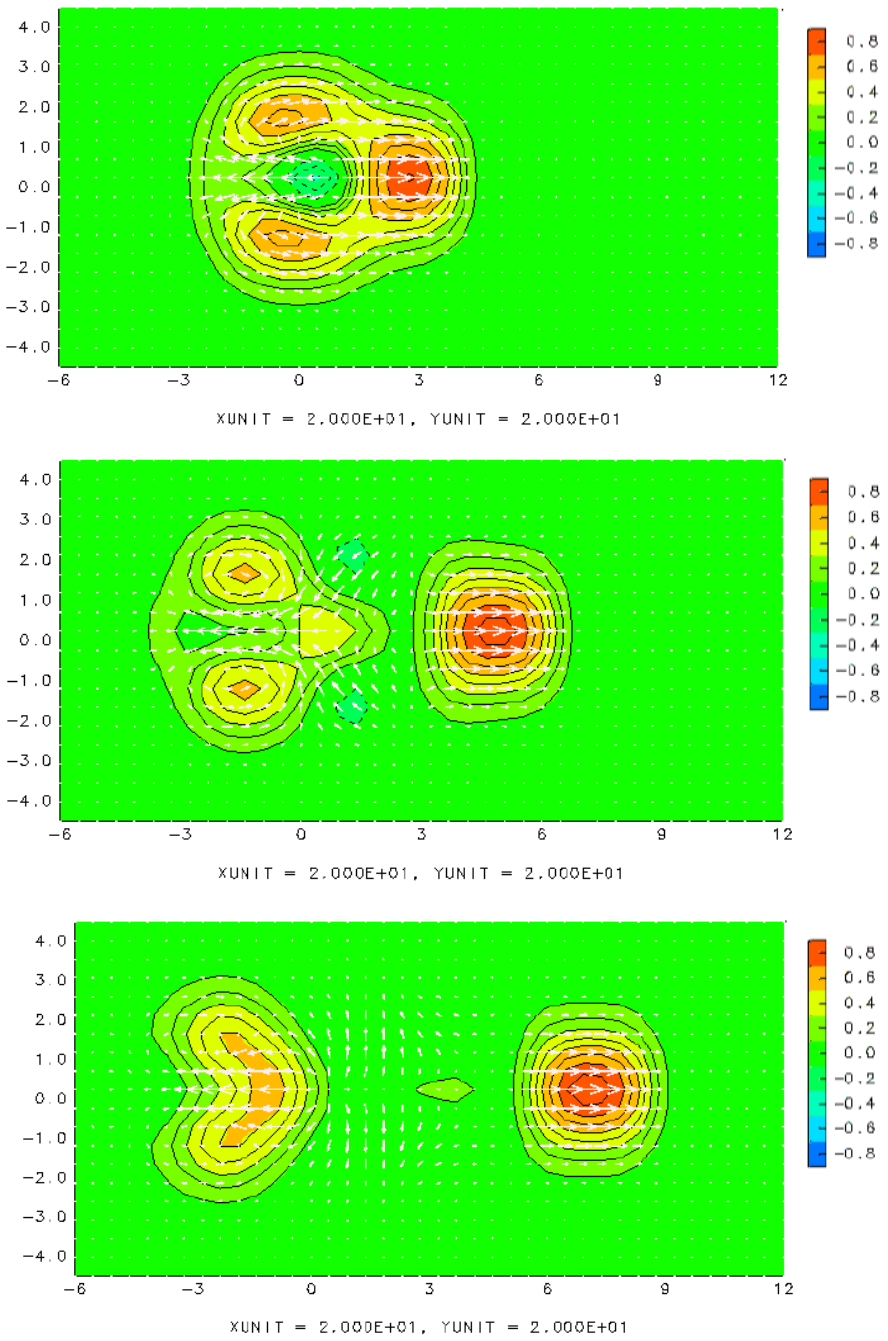

図 17: 赤道対称に初期変位を与えた時の時間発展　時間 上: $t = 2$, 中: $t = 4$, 下: $t = 6$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -2.1 から 2.1 まで示し, 等値線間隔は 0.1 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

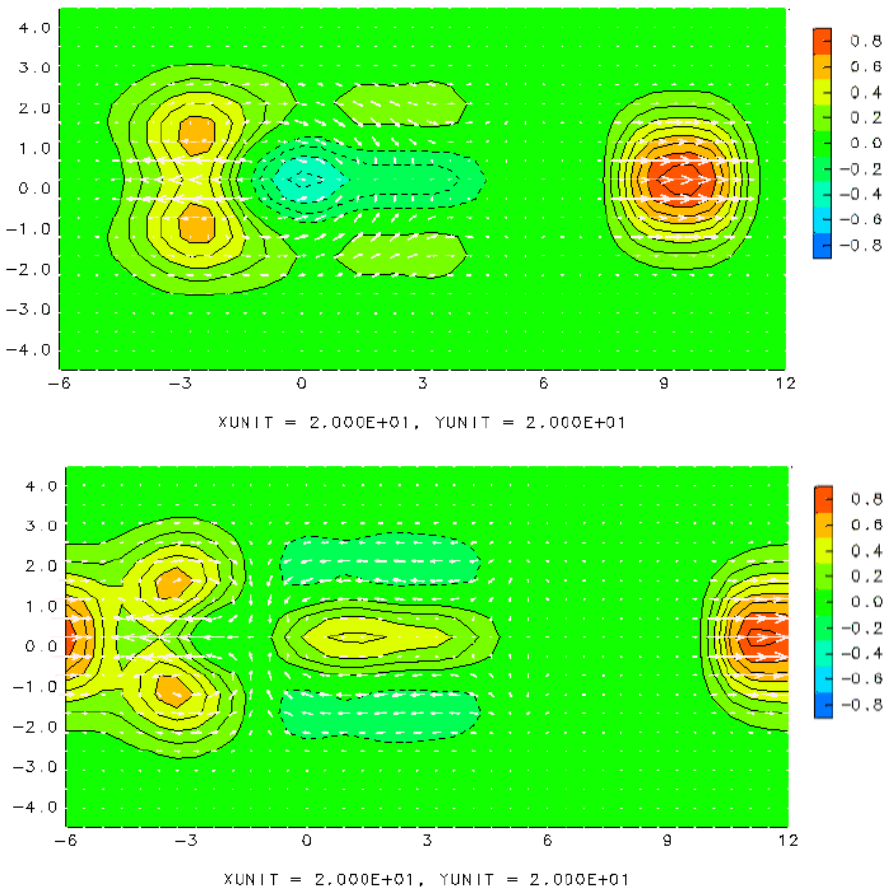

図 18: 赤道対称に初期変位を与えた時の時間発展　時間 上: $t = 8$, 下: $t = 10$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -2.1 から 2.1 まで示し, 等値線間隔は 0.1 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

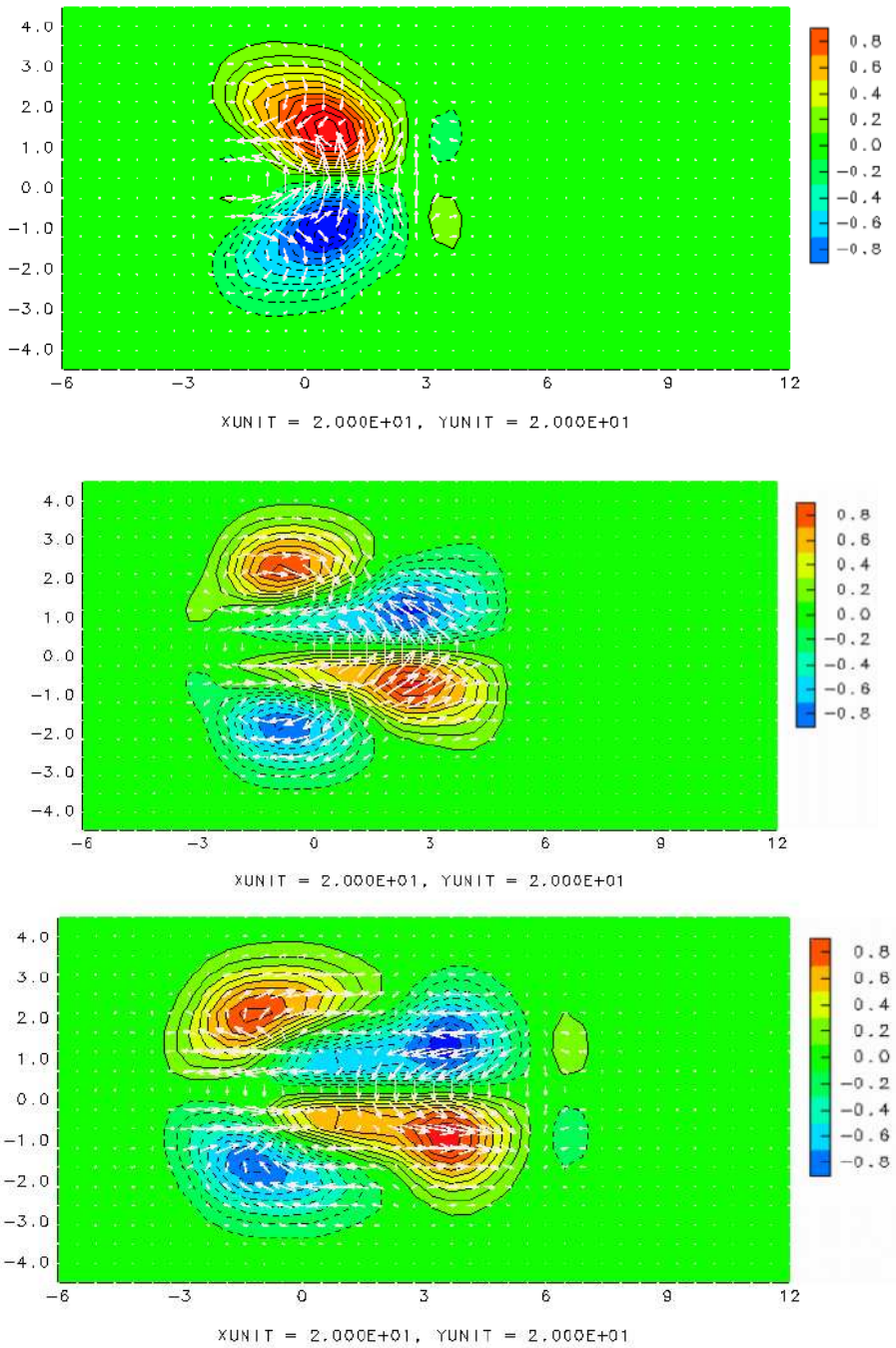

図 19: 赤道反対称に初期変位を与えた時の時間発展　時間 上: $t = 2$, 中: $t = 4$, 下: $t = 6$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -2.1 から 2.1 まで示し, 等値線間隔は 0.1 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

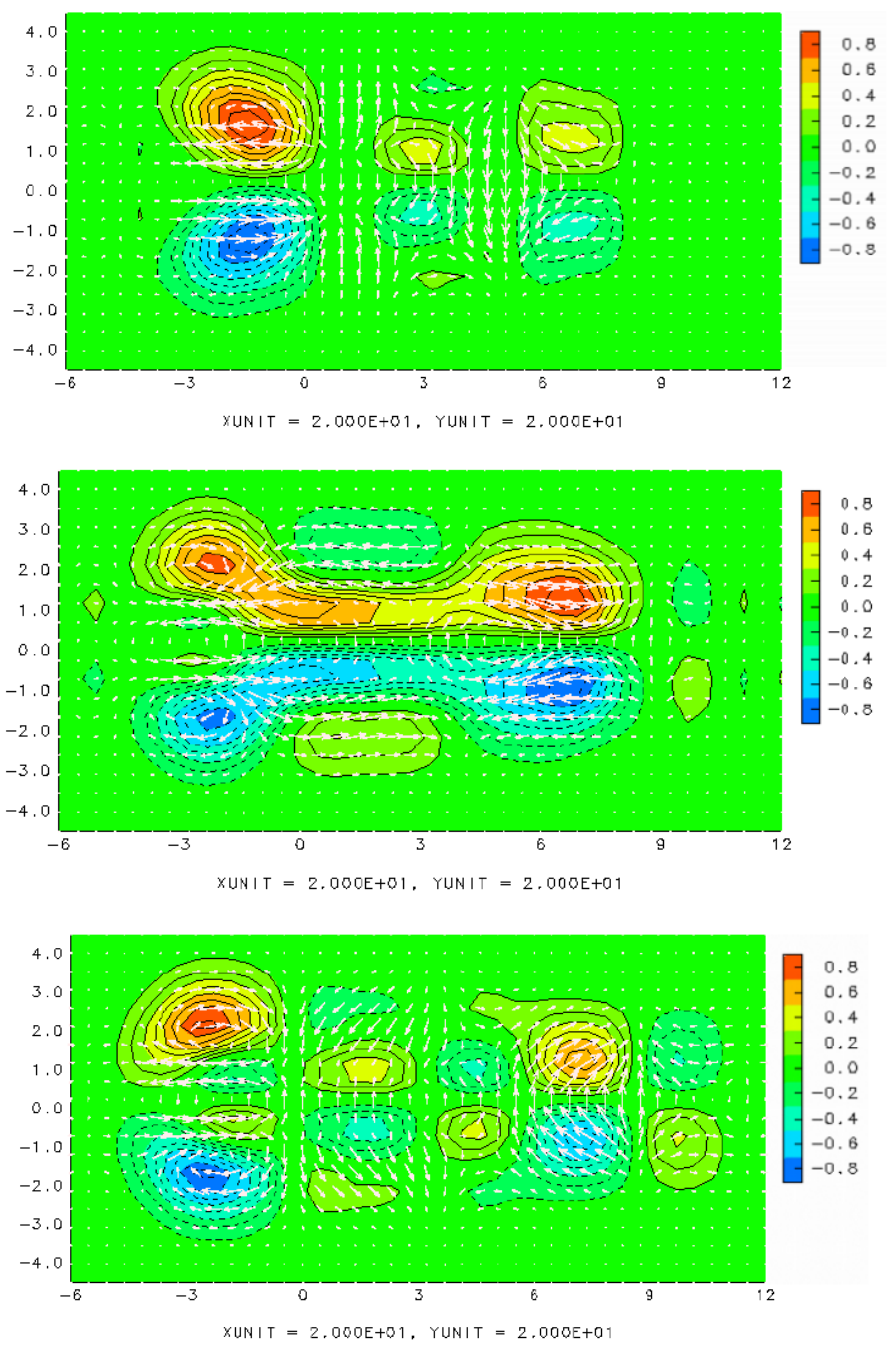

図 20: 赤道反対称に初期変位を与えた時の時間発展　時間 上: $t = 8$, 中: $t = 10$, 下: $t = 12$
図の等値線は ϕ , 矢羽は流速 (u, v) の向きと大きさを示す. 等値線は, -2.1 から 2.1 まで示し, 等値線間隔は 0.1 である. ただし, 0.0 の等値線は図示していない.

6　まとめと結論

はじめに, Matsuno (1966) で導出された赤道波の固有モードの導出と特徴を紹介した. 固有モードは, 線形化された浅水方程式系に対して時間と東西方向には波動解を仮定し, 南北方向にはエルミート多項式を用いて展開することで得られる. エルミート多項式の次数 n が 1 次以上の場合にはモードは 3 つ得られ, これらのモードは中緯度域で見られる東向き慣性重力波, 西向きの慣性重力波, そしてロスビー波と対応する. しかし 0 次の場合にはモードは 2 つしか得られず, これらのモードは東向き慣性重力波, 混合ロスビー重力波という波動に対応づける. また, 南北流速が 0 である場合にも 1 つのモードが得られ, 赤道ケルビン波という波動に対応づける.

次に, 熱源を与えた場合と, 初期変位を与えた際のそれぞれの場合について, Matsuno (1966) で用いられた式に外力項と摩擦, 減衰項を加えた方程式系の時間発展についてスペクトル法を用いた数値計算を行った.

その結果, 赤道対称に熱源を与えた場合には, 赤道対称の波動である, 東向きの赤道ケルビン波と西向きの $n = 1$ のロスビー波があらわれた. 一方で赤道反対称に熱源を与えた場合には, 赤道反対称の波動である, 西向きの $n = 2$ のロスビー波があらわれた. また熱源の与え方によらない共通した特徴として, $\varepsilon = 0$ の時には波動の通過後に残る定常な流れの振幅はどこでも一様であるが, $\varepsilon = 0.1$ の時ではこの振幅は, 波動の伝播速度に応じて伝播距離に対して減衰した.

初期変位を与えた場合にも, 同じ形の熱源を与えた時に現れる波動と同様の特徴を持つ擾乱が伝播した. また赤道対称の初期変位を与えた場合には, $x = 0$ 近傍で定在する重力波があらわれ, 赤道反対称の初期変位を与えた場合には, $n = 0$ の東向き慣性重力波が次々にあらわれ, 伝播した.

熱源や初期変位を与えた際に現れる波動は, Matsuno (1966) で議論されている赤道波の固有モードの重ね合わせで説明できる. 現れる波動は, 熱源や初期変位の与え方に依存する. 今回の計算による結果は, 赤道対称の熱源や初期変位を与えた場合には赤道対称の波動があらわれ, 逆に赤道反対称の熱源や初期変位を与えた場合には赤道反対称の波動があらわれることを確かめた.

7 謝辞

本論文中の図の作成には, 地球流体電脳倶楽部開発による地球流体電能ライブラリ dcl-5.2 , http://www.gfd-dennou.org/arch/dcl/ を使用した. またプログラム中のフーリエ変換には, 東京大学大学院数理科学研究科の 石岡 圭一 助教授開発による ispack-0.5 , http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/ を使用した. ここに開発者の方々に感謝する.

本論文の作成に際しては, 多くの方々にご協力を頂いた. 指導教官である地球流体力学研究室の 林 祥介 教授, プログラム作成, 論文内容に関してご指導頂いた同研究室の 小高 正嗣 助手, 論文構成から内容に至るまで幅広くご意見を頂いた同研究室の 佐々木 洋平 氏 に厚く感謝する. また同研究室のみならず, 助言と励ましを頂いた先輩, 同輩をはじめ多くの皆様に, 簡単ではあるがここに感謝の意を述べる.

参考文献

Gill,A. E.,1980: Some simple solution for heat-included tropical circulation. *Quart. J. R. Met. Soc*, **106**, 447 – 462.

Heckley,W. A. and Gill,A. E.,1984: Some simple analytical solutions to problem of forced equatorial long waves. *Quart. J. R. Met. Soc*, **110**, 203 – 217.

Matsuno,T.,1966: Quasi–geostrophic motion in the equatorial area. *J. meteor. Soc. Japan*, **44**, 25 – 42.

Peixoto,Jose P. and Oort,Abraham H.,1992: *PHYSICS OF CLIMATE*. Spriger, 37pp.

岩波理化学辞典第 4 版,1987 岩波書店, 942pp.

犬井鉄郎,1976: 特殊関数. 岩波全書, 261 – 268.

住明正, 安成哲三, 山形俊男, 増田耕一, 阿部彩子, 増田富士雄, 余田成男,1996: 岩波講座 地球惑星科学 11 気候変動論. 岩波書店.

小倉義光,1978: 気象力学通論. 東京大学出版会, 73pp.

小倉義光,1999: 一般気象学 [第 2 版]. 東京大学出版会, 282 – 291.

松野太郎, 浅井冨雄,1981: 大気科学講座 3 成層圏と中間圏の大気. 東京大学出版会, 234 – 241.

石岡圭一,1998: ispack-0.5. http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/, 地球流体電脳倶楽部.

地球流体電脳倶楽部,2000: 地球流体電能ライブラリ dcl-5.2. http://www.gfd-dennou.org/arch/dcl/.