

## 修士論文

非静力学対流モデルの定式化に関する  
再検討：地形を考慮した雲解像モデル  
の開発へ向けて

Reconsideration of the  
formulation of a nonhydrostatic  
convection model: Toward a  
cloud resolving model with  
terrain-following coordinates

高橋 こう子

TAKAHASHI Koko

北海道大学大学院理学研究科 地球惑星科学専攻  
地球惑星流体科学講座 地球流体力学研究室

2004年1月30日

---

# 目次

第1章	はじめに	1
第2章	乾燥大気における準圧縮モデルの定式化と離散化	3
2.1	準圧縮モデルの定式化	3
2.1.1	変数と基本場の定義	3
2.1.2	直交直線座標系における基礎方程式系	4
2.1.3	直交直線座標系におけるサブグリッドスケールの拡散	5
2.1.4	地形に沿った座標系における基礎方程式系	6
2.1.5	地形に沿った座標系におけるサブグリッドスケールの拡散	9
2.2	境界条件	10
2.3	基礎方程式系の離散化	11
2.3.1	離散化の概要	11
2.3.2	数値粘性項	11
2.3.3	音波減衰項	12
2.3.4	Asselin の時間フィルタ	12
第3章	数値実験	13
3.1	数値実験の概要	13
3.2	数値実験	14
3.2.1	数値粘性項の係数を決めるための計算	14
3.2.2	音波の計算	18
3.2.3	音波減衰項の係数を決めるための計算	24
3.2.4	サーマルの計算	28
第4章	まとめ	37
	謝辞	38
付録A	乾燥大気における準圧縮モデルの定式化の補足	39
A.1	地形に沿った座標系	39
A.2	サブグリッドスケールの拡散	41

---

---

付録B 湿潤大気における準圧縮モデルの定式化	43
B.1 変数の定義	43
B.2 基本場の定義と分離	44
B.3 直交直線座標系における基礎方程式系	45
B.4 直交直線座標系におけるサブグリッドスケールの拡散	46
B.5 直交直線座標系における雲・降水の微物理過程	48
B.6 地形に沿った座標系における基礎方程式系	50
B.7 地形に沿った座標系におけるサブグリッドスケールの拡散	51
B.8 地形に沿った座標系における雲・降水の微物理過程	54
付録C 乾燥大気における準圧縮モデルの離散化	55
C.1 空間微分の離散化	55
C.2 時間積分の離散化	57
C.3 乾燥大気における基礎方程式系の離散化	58
C.3.1 水平方向の運動方程式	59
C.3.2 鉛直方向の運動方程式と圧力方程式	61
C.3.3 熱力学の式	68
C.3.4 サブグリッドスケールの乱流運動エネルギー方程式	69
付録D 湿潤大気における準圧縮モデルの離散化	71
D.1 空間微分の離散化	71
D.2 時間積分の離散化	71
D.3 湿潤大気における基礎方程式系の離散化	72
D.3.1 水平方向の運動方程式	72
D.3.2 鉛直方向の運動方程式と圧力方程式	75
D.3.3 熱力学の式と混合比の方程式	79
D.3.4 サブグリッドスケールの乱流運動エネルギー方程式	82
D.4 湿潤飽和調節法	83
参考文献	86

---

## 要旨

本研究では乾燥大気における 3 次元準圧縮モデルの定式化と離散化の再検討を行い、それを基に 2 次元準圧縮の数値モデルを作成し数値実験を行った。直交直線座標系を用いた定式化は Klemp and Wilhelmson (1978) に従い、地形に沿った座標系を用いた定式化は斉藤 (1999) に従った。離散化の方法は CReSS (坪木 他, 2001) と同じである。行った数値実験は、音波の計算、音波減衰項の係数を定めるための計算、数値粘性項の係数を定めるための計算、サーマルの計算の 4 つである。

定式化と離散化の再検討を行ったところ、Klemp and Wilhelmson (1978) において示された離散化されたサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー方程式には、離散化する前の式には存在した 2 つの項が書かれていないことがわかった。

音波を計算する数値実験では、初期擾乱として水平方向一様または鉛直方向一様なガウス型の圧力をあたえ、音波の伝播する様子を調べた。その結果、圧力水平・鉛直速度とエクスター関数が音速で伝播することが確認された。音波計算のための時間間隔を変えて鉛直方向の数値解法にともなう音波の減衰の様子を調べたところ、時間間隔を短くすると音波の減衰が小さくなることが確かめられた。

音波減衰項を決める数値実験では、初期擾乱としてガウス型の圧力を与え、音波の伝播する様子を調べた。その結果、音波減衰項の値は水平空間格子間隔が 1,000 m、鉛直格子間隔が 500 m、時間格子間隔が 1 s の場合、0.025 が適当であることがわかった。数値粘性項の係数を定めるための数値実験では、数値粘性項の係数を変えた移流拡散方程式を数値的に解くことにより、適当な係数の値を調べた。その結果、水平空間格子間隔が 1,000 m、鉛直格子間隔が 500 m、時間格子間隔が 1 s の場合にもっとも安定に計算できたのは、水平方向の係数を 5.0、鉛直方向の係数を 1.25 とした場合であった。上記の音波減衰項の係数と数値粘性係数の値を用いてサーマルの数値実験を行った。下部境界の中心にガウス型の温度擾乱を与えてサーマルの浮上する様子を調べた。基本場の温度分布として、高度 5,000 m まで乾燥断熱減率で減少し、それより上は等温となる分布を与えた。その結果、高度 5,000 m までサーマルが上昇し、その高度で水平に広がっていくのが確認できた。

# 第1章 はじめに

最近の計算機の発達により、非静力学モデルの構築が活発に行われるようになった。非静力学モデルでは、水平スケールとして 2 ~ 2,000 km (メソスケール)、鉛直スケールとして 10 km 前後の気象現象を対象としている。非静力学モデルの例として、気象研究所の非静力学モデル (NHM; Ikawa and Saito, 1991)、オクラホマ大学の Advanced Regional Prediction System (ARPS; Xue *et. al.*, 1995)、名古屋大学と高度情報科学技術研究機構の CReSS (Cloud Resolving Storm Simulator; 坪木ら, 2001) などが挙げられる。

非静力学モデルは音波を含まない非弾性系モデルと含む弾性系モデルに分類される。さらに、非静力学モデルは連続の式の近似方法によって以下の 4 つに分けられる (齊藤, 1999)。非弾性系モデルは非圧縮モデルと非弾性モデル、弾性系モデルは準圧縮モデルと完全圧縮系モデルに分けられる。非圧縮モデルでは、密度が空間的・時間的に一定であると仮定し、非圧縮性流体の連続の式を用いる。非弾性モデルでは、密度が鉛直方向のみ空間変化し時間変化はしないと仮定する。準圧縮モデルでは、基本場からの密度偏差が小さいと仮定し、線形化を行った連続の式を用いる。完全圧縮系モデルでは圧縮性流体の連続の式を用いる。

これら 4 つの非静力学モデルのうち、よく使われているのは準圧縮モデルである。準圧縮モデルがよく使われるのは以下のような理由による。非圧縮モデルは密度成層を考慮できないため、深い対流のような鉛直方向の密度変化が大きい場合は用いることができない。非弾性モデルは基本場の鉛直方向の密度成層を考慮できる。しかし、密度の時間変化を考慮していないため、運動に伴う密度の時間変化を記述できず、誤差が大きくなる。また、非弾性モデルは地形を考慮すると、気圧方程式が複雑になる。完全圧縮系モデルでは、基本場と偏差を含む密度を用いているため、準圧縮モデルと比べて連続の式の時間変化項の精度が悪い。したがって、非静力学モデルでは準圧縮モデルがよく使われている。

現在、様々な準圧縮の数値モデルが開発されている。例えば先に上げた NHM や ARPS である。数値シミュレーションや再現実験を行う際、多くの研究者が既存の数値モデルを用いている。既存の数値モデルを使用する利点のひとつは、非常に時

間や手間がかかると感じるプログラミングをする必要がない点である。しかし、既存の数値モデルは完成度が高いが故に、時間・空間パラメータを変えたいときなど数値モデルに変更を加えるのが容易ではない。自分がメンテナンスしやすい数値モデルを持つために、自ら数値モデルを開発する。自ら数値モデルを開発することは、その数値モデルの長所や欠点を把握できるという利点を持つ。数値モデルの特徴を把握しているため、新しい概念を導入する場合も既存の数値モデルを改良する場合と比べてずっと容易である。

多くの準圧縮モデルは Klemp and Wilhelmson (1978) を基に開発されている。メソスケールの気象現象は地形の影響を受けやすいため、地形の効果を考慮する必要がある。本研究では Klemp and Wilhelmson (1978) を基に定式化と離散化について再考察する。2.1 節では Klemp and Wilhelmson (1978) を基に直交直線座標系における定式化と、斉藤 (1999) を基に地形に沿った座標系における定式化を示す。2.2 節では境界条件を示し、2.3 節では地形に沿った座標系における基礎方程式の離散化を示す。第3章では、具体的な値がわからない音波減衰項と数値粘性項の係数を決め、音波とサーマルの計算を行った結果を示す。

## 第2章 乾燥大気における準圧縮モデルの定式化と離散化

本章では、乾燥大気における 3 次元準圧縮モデルの定式化と離散化について述べる。Klemp and Wilhelmson (1978) に従って、直交直線座標系の定式化を示す。次に、斉藤 (1999) に従って地形に沿った座標系の定式化を示す。

### 2.1 準圧縮モデルの定式化

準圧縮モデルの定式化をまとめると以下のようになる：

- 力学過程の基礎方程式系は非静力学・準圧縮系である。座標系は 3 次元の地形に沿った座標系である。
- 力学過程の予報変数は速度 3 成分、圧力、温位である。
- サブグリッドスケールの乱流モデルは乱流運動エネルギーを予報する 1.5 次のクロージャモデル。

#### 2.1.1 変数と基本場の定義

力学過程の予報変数は  $x, y, z$  方向の速度  $u, v, w$  と無次元化した圧力 (エクスター関数)  $\Pi (\equiv (p/p_0)^{R_d/c_p})$  および温位  $\theta (\equiv T (p_0/p)^{R_d/c_p})$  の 5 つである。これら 5 つの予報変数は空間の座標  $x, y, z$  と時間の座標  $t$  である。ここで  $T$  は温度、 $p_0$  は地表面での圧力、 $c_p$  は定圧比熱、 $R_d$  は乾燥空気の気体定数である。密度  $\rho$  は乾燥空気の状態方程式

$$\Pi = \left( \frac{R_d}{p_0} \rho \theta \right)^{R_d/c_p} \quad (2.1)$$

から得られる。

変数と基礎方程式系を基本場とそこからの偏差に分離する。分離する変数は  $u, v, w, \Pi, \theta$  および  $\rho$  である。基本場の変数を上付きバー (  $\bar{\quad}$  ) で、偏差の変数を上付きプライム (  $'$  ) で表す。ある変数  $\phi$  は

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (2.2)$$

と分離される。以下では簡単のため、エクスター関数の偏差  $\Pi'$  を  $\pi$  と表し、速度  $u', v', w'$  を単に  $u, v, w$  と表す。

基本場は水平一様 ( $z$  のみの関数) かつ静止している ( $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$ ) 状態とする。基本場において、鉛直方向の運動方程式は静水圧平衡の式となる：

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} = -\frac{g}{c_p \bar{\theta}}. \quad (2.3)$$

基本場の密度は

$$\bar{\rho} = \frac{p_0 \bar{\Pi}^{c_v/R_d}}{R_d \bar{\theta}} \quad (2.4)$$

である。

### 2.1.2 直交直線座標系における基礎方程式系

基礎方程式は  $x, y, z$  方向の運動方程式、熱力学の式、準圧縮系の圧力方程式である。

$x, y, z$  方向の運動方程式は

$$\frac{du_i}{dt} + c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi}{\partial x_i} = \delta_{i3} g \left[ \frac{\theta}{\bar{\theta}} - 1 \right] - \varepsilon_{i3k} f u_k + D_{u_i} \quad (2.5)$$

である。 $i = 1, 2, 3$  で、それぞれ  $x, y$  および  $z$  成分を表す。 $f$  はコリオリパラメータである。 $D_{u_i}$  は3方向の運動方程式におけるサブグリッドスケールの乱流に伴う拡散項である。以下では、サブグリッドスケールの乱流に伴う拡散項を単に拡散項という。3方向の運動方程式の拡散項の表現については2.1.3節で述べる。

圧力方程式は

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{\theta} u_j) = f_\pi, \quad (2.6)$$

$$f_\pi = -u_j \frac{\partial \pi}{\partial x_j} + \frac{R_d \pi}{c_v} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{c^2}{c_p \bar{\theta}^2} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.7)$$



である.  $c$  は音波で以下のように表される:

$$c^2 = \frac{c_p R_d}{c_v} \Pi \theta. \quad (2.8)$$

熱力学の式は

$$\frac{d\theta}{dt} = D_\theta \quad (2.9)$$

である.  $D_\theta$  は熱力学の式における拡散項であり, 熱力学の式の拡散項の表現については 2.1.3 節で述べる.

密度は乾燥空気の状態方程式 (2.1) より診断的に得られる:

$$\rho = \frac{p_0}{R_d} \frac{\Pi^{c_v/R_d}}{\theta}. \quad (2.10)$$

### 2.1.3 直交直線座標系におけるサブグリッドスケールの拡散

$D_{u_i}, D_\theta$  はサブグリッドスケールにおける乱流に伴う拡散を表す. 直交直線座標系における 3 方向の運動方程式 (2.5) と熱力学の式 (2.9) の拡散項  $D_{u_i}, D_\theta$  は, それぞれ,

$$D_{u_i} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i'' u_j''}, \quad (2.11)$$

$$D_\theta = -\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j'' \theta''}. \quad (2.12)$$

$\overline{u_i'' u_j''}$  は運動量フラックス,  $\overline{u_i'' \theta''}$  は熱フラックスを表す. 各拡散項  $D_{u_i}, D_\theta$  は導出は付録 A.2 節に示す.

Klemp and Wilhelmson (1978) に従って, 変動成分を

$$\overline{u_i'' u_j''} = -K_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E, \quad (2.13)$$

$$\overline{u_j'' \theta''} = K_h \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad (2.14)$$

と仮定する.  $K_m$  は運動量渦拡散係数,  $K_h$  は熱渦拡散係数である.  $E$  は

$$E \equiv \frac{1}{2} (\overline{u''^2} + \overline{v''^2} + \overline{w''^2}) \quad (2.15)$$

で与えられるサブグリッドスケールの乱流運動エネルギーである.

$K_m$  は以下の時間発展方程式から求められる:

$$\begin{aligned} \frac{dK_m}{dt} = & -\frac{3g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + 2C_m^2 l^2 \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{2} |\varepsilon_{ijk}| C_m^2 l^2 \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \\ & - \frac{1}{3} \delta_{ij} K_m \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \delta_{ij} \left( \frac{\partial K_m}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial K_m}{\partial x_j} \right) \\ & - \left( \frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2} \right) K^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$K_m$  に関する上式 (2.16) はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギーの時間発展方程式から得られる. 式 (2.16) の導出は付録 A.2 に示す.  $E$  と  $K_m$  の関係は

$$E = \left( \frac{K_m}{C_m l} \right)^2. \quad (2.17)$$

$K_m$  と  $K_h$  の関係は

$$K_h = 3K_m \quad (2.18)$$

とする (Deardorff, 1972). ここで  $l$  は混合距離で  $l = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$  である. Deardorff (1975) によると  $C_\varepsilon = C_m = 0.2$  である.

Klemp and Wilhelmson (1978) 中の離散化された運動量渦拡散係数に関する方程式には, (2.16) 中の右辺第 4 項と第 6 項

$$\frac{1}{3} \delta_{ij} K_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right), \quad (2.19)$$

$$\delta_{ij} \left( \frac{\partial K_m}{\partial x_j} \right)^2 \quad (2.20)$$

が書かれていないので注意が必要である.

#### 2.1.4 地形に沿った座標系における基礎方程式系

図 2.1 のような地形に沿った座標  $(x^*, y^*, z^*)$  は以下のように定義される:

$$\begin{aligned} x^* &= x, \\ y^* &= y, \\ z^* &= z^*(x, y, z) \end{aligned}$$

かつ,

$$z^* \equiv \frac{H \{z - z_s(x^*, y^*)\}}{H - z_s(x^*, y^*)}. \quad (2.21)$$

$z_s(x^*, y^*)$  は地表面の高さ,  $H$  はモデル領域の高さとする. 地形に沿った座標系における速度  $(u^*, v^*, \omega)$  は

$$u^* = u, \tag{2.22}$$

$$v^* = v, \tag{2.23}$$

$$\omega = G^{13}u + G^{23}v + \frac{1}{G^{1/2}}w \tag{2.24}$$

である (速度の導出は付録 A.1 節参照). ただし

$$G^{1/2} = \frac{H - z_s}{H}, \tag{2.25}$$

$$G^{13} = \frac{z^* - H}{H - z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x}, \tag{2.26}$$

$$G^{23} = \frac{z^* - H}{H - z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} \tag{2.27}$$

である. 地形に沿った座標系における空間微分は付録 A.1 節の式 (A.10) ~ (A.12) のように定義される.

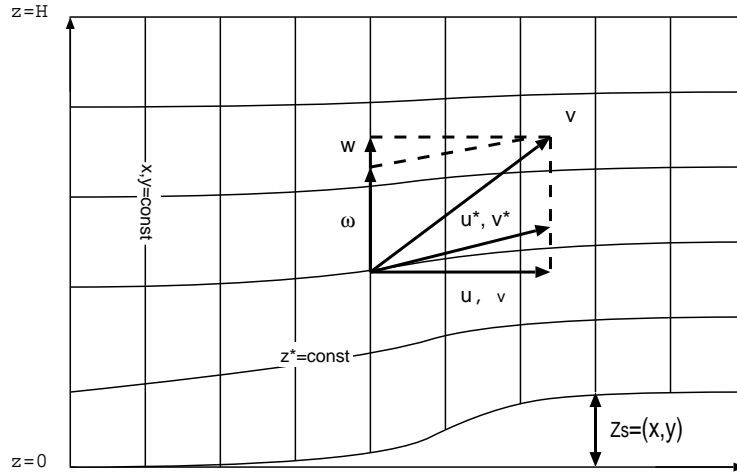


図 2.1: 直線直交座標系における速度  $(u, v, w)$  と地形に沿った座標系における速度  $(u^*, v^*, \omega)$ .

地形に沿った座標系の静水圧平衡の式と基礎方程式は以下ようになる. 静水圧平衡の式は

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z^*} = -\frac{G^{1/2}g}{c_p\theta}. \tag{2.28}$$

である.

$x, y, z^*$  方向の運動方程式はそれぞれ以下のように表される:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z^*} + c_p \bar{\theta} \left( \frac{\partial \pi}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial \pi}{\partial z^*} \right) = f_v + D_u, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial z^*} + c_p \bar{\theta} \left( \frac{\partial \pi}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial \pi}{\partial z^*} \right) = -f_u + D_v, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \omega \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{c_p \bar{\theta}}{G^{1/2}} \frac{\partial \pi}{\partial z^*} = g \left[ \frac{\theta}{\bar{\theta}} - 1 \right] + D_w. \quad (2.31)$$

上式 (2.29) ~ (2.31) 中の拡散項  $D_u, D_v, D_w$  はそれぞれ次節の (2.36), (2.37) および (2.38) である.

圧力方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{c^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \left\{ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta} u)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta} v)}{\partial y} \right. \\ \left. + G^{13} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta} u)}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta} v)}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta} w)}{\partial z^*} \right\} \\ = f_\pi, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} f_\pi = & -u \frac{\partial \pi}{\partial x} - v \frac{\partial \pi}{\partial y} - \omega \frac{\partial \pi}{\partial z^*} \\ & + \frac{R_d \pi}{c_v} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \left( G^{13} + G^{23} + \frac{1}{G^{1/2}} \right) \frac{\partial w}{\partial z^*} \right\} \\ & + \frac{c^2}{c_p \bar{\theta}^2} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} + \left( G^{13} + G^{23} + \frac{1}{G^{1/2}} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Klemp and Wilhelmson (1978) に従って  $f_\pi = 0$  とする.  $f_\pi = 0$  とすることは圧力方程式を線形化し, 非断熱項 ((2.33) の  $\theta$  の項) を無視することを意味する.

熱力学の式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial z^*} = D_\theta \quad (2.34)$$

である. 上式 (2.34) 中の拡散項  $D_\theta$  は次節の (2.39) である.

密度は, 地形に沿った座標系における乾燥大気の状態方程式から診断的に得られる:

$$\rho = \frac{p_0}{R_d} \frac{\Pi^{c_v/R_d}}{\theta}. \quad (2.35)$$

## 2.1.5 地形に沿った座標系におけるサブグリッドスケールの拡散

地形に沿った座標系における拡散項と運動量渦拡散係数の時間発展方程式は以下のように表される。

$x, y, z^*$  方向の運動方程式 (2.29) ~ (2.31) 中の拡散項は、それぞれ、

$$\begin{aligned}
 D_u = & 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + \left( \frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ K_m \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_v = & \left( \frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + 2 \left( \frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ K_m \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_w = & \left( \frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + \left( \frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + 2 \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( K_m \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
 & - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right). \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

熱力学の式 (2.34) 中の拡散項は

$$\begin{aligned}
 D_\phi = & \left( \frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left( K_h \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_h G^{13} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right) \\
 & + \left( \frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left( K_h \frac{\partial \theta}{\partial y} + K_h G^{23} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{K_h}{G^{1/2}} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right) \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

運動量渦拡散係数の時間発展方程式は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial K_m}{\partial t} = & - \left( u \frac{\partial K_m}{\partial x} + v \frac{\partial K_m}{\partial y} + \omega \frac{\partial K_m}{\partial z^*} \right) - \frac{3gC_m^2 l^2}{2\theta G^{1/2}} \frac{\partial \theta_e}{\partial z^*} \\
 & + C_m^2 l^2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 + \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
 & + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} + \frac{\partial u}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 \right. \\
 & \quad + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\
 & \quad \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
 & - \frac{K_m}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} + \frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left( \frac{\partial K_m^2}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} \right) \right. \\
 & \quad + \left( \frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left( \frac{\partial K_m^2}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial K_m^2}{\partial z} \left. \right\} \\
 & + \left( \frac{\partial K_m}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial K_m}{\partial z^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial K_m}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial K_m}{\partial z^*} \right)^2 + \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \\
 & - \frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2} K_m^2 \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

である。

## 2.2 境界条件

下部境界 ( $z^* = 0$ ) と上部境界 ( $z^* = H$ ) では境界を横切る流れがないとする。上下境界における境界条件はそれぞれ

$$\omega = 0 \quad (z^* = 0), \tag{2.41}$$

$$\omega = u \frac{\partial z_s}{\partial x} + v \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (z^* = H) \tag{2.42}$$

である。側面境界では周期境界条件を用いる。

## 2.3 基礎方程式系の離散化

### 2.3.1 離散化の概要

基礎方程式の離散化は有限差分法を用いる。離散化された方程式系の具体的な形は付録 C.3 節に詳述した。本節では、本数値モデルで用いる有限差分法について簡単にまとめる。

空間微分の離散化は中心差分を用いる。格子構造はスタaggered格子とし、水平方向は Arakawa C グリッド、鉛直方向は Lorenz グリッドを用いる (付録 C.1 節参照)。中心差分による計算不安定を抑えるために、数値粘性項を圧力方程式以外の移流項に加える。数値粘性項の詳細は 2.3.2 節で述べる。

時間微分の離散化は、音波に関する項を短い時間間隔  $\Delta\tau$  で解き、それ以外の項を長い時間間隔  $\Delta t$  で解く時間分割法を用いる (付録 C.2 節参照)。音波に関する項のうち、水平方向を陽解法で、鉛直方向を陰解法で解く。この方法を水平陽解-鉛直陰解法 (HE-VI 法) という。短い時間間隔で解く項のうち、水平方向を前進差分で鉛直方向を後退差分で解く。長い時間間隔で解く項は leap-frog 法で解く。時間分割法かつ HE-VI 法を用いたときの計算不安定を抑えるために、短い時間間隔で積分する運動方程式中に音波減衰項を加える音波減衰項の詳細は 2.3.3 節で述べる。また、Leap-frog 法を用いて解いた解には Asselin の時間フィルタ (Asselin, 1972) を適用する Asselin の時間フィルタの詳細は 2.3.4 節で述べる。

### 2.3.2 数値粘性項

本数値モデルでは移流項を 2 次精度の中心差分で離散化する。この場合、移流計算をするとノイズが生じることがある。そこで以下のような数値粘性項を、運動方程式 (2.29) ~ (2.31) および熱力学の式 (2.34) の移流項に加える:

$$\text{Diff.}\phi = \nu_h \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] + \nu_v \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^{*2}}. \quad (2.43)$$

ただし  $\phi = u, v, w, \theta$  とし、

$$\nu_h = \alpha_h \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}, \quad (2.44)$$

$$\nu_v = \alpha_v \frac{\Delta z^{*2}}{\Delta t} \quad (2.45)$$

である。坪木ら (2001) によると、安定な計算のためには

$$\nu_h \leq \frac{1}{8} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}, \quad (2.46)$$

$$\nu_v \leq \frac{1}{8} \frac{\Delta z^{*2}}{\Delta t} \quad (2.47)$$

でなければならない。

### 2.3.3 音波減衰項

Skamarock and Klemp (1992) は、時間分割法かつ HE-VI 法を用いた場合、不安定な音波モードが励起し成長することがあると指摘した。不安定なモードを除去するために、発散に重みをかけた音波減衰項  $\alpha Div$  を人工的に加える。具体的には運動方程式 (2.29) ~ (2.29) 中の  $\pi$  を  $\pi - \alpha Div$  に置き換える。音波減衰項は

$$\alpha Div = \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} + \frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \quad (2.48)$$

で与えられる。Skamarock and Klemp (1992) によると、安定な計算のためには

$$\alpha \leq 5 \times 10^{-6} \times \frac{\Delta x^2}{\Delta \tau} \quad (2.49)$$

でなければならない。

### 2.3.4 Asselin の時間フィルタ

Leap-frog 法を用いて時間積分する場合、数値解として計算モードが得られる。計算モードを減衰させるため Asselin (1972) が示した時間フィルタを用いる。  $\partial \phi / \partial t = F$  という方程式を解く場合、

$$\phi^{*t+\Delta t} = \phi^{t-\Delta t} + 2\Delta t F^{*t} \quad (2.50)$$

と離散化される。アスタリスク (\*) 付変数はフィルタがかけられていない量とする。予報変数  $\phi^{t+\Delta t}$  を求めた後、

$$\phi^t = \phi^{*t} + \mu_a \left( \phi^{*t+\Delta t} - 2\phi^{*t} + \phi^{t-\Delta t} \right) \quad (2.51)$$

のようにフィルタリングする。次の時刻  $t + \Delta t$  における値を求めるとき、(2.51) でフィルタリングした  $\phi^t$  を  $\phi^{t-\Delta t}$  として解く。Asselin (1972) によると、 $\mu_a$  の条件は

$$0 < \mu_a < \frac{1}{3} \quad (2.52)$$

である。ここでは  $\mu_a = 0.1$  とする。



## 第 3 章 数値実験

前章で示した数理モデルを基にして 2 次元非静力対流モデルを作成した。本章では、音波減衰項の係数  $\alpha$  と数値粘性項の係数  $\nu_h, \nu_v$  の具体的な値を決めるために行った数値実験の結果を示す。

### 3.1 数値実験の概要

作成した数値モデルは以下の点で前章で示した数理モデルと異なる：

- $x, z^*$  方向の 2 次元。
- 地形なし。ただし数値コードにはマップファクターを入れてある。
- 運動量拡散係数, 熱拡散係数, 乱流運動エネルギーは定数。

基本場における地表面圧力を  $10^5$  Pa, 基本場の地表面温度を 300 K とする。その他の設定は数値実験毎に異なるので各節で示す。

ソースコードは Fortran 90 で記述した。圧力方程式を解く際, Fujitsu Fortran & C Package ver. 3 の SSL II (Scientific Subroutine Library II) を使用した。使用した計算機の CPU は Intell Pentium III 600 Mhz, メモリは 256 MB である。

行った数値実験は以下の 4 つである：

1. 数値粘性項の係数を決めるのための計算。
  2. 音波の計算。
  3. 音波減衰項の係数を決めるのための計算。
  4. サーマルの計算。
-

## 3.2 数値実験

### 3.2.1 数値粘性項の係数を決めるための計算

適当な  $\nu_h$  と  $\nu_v$  の値を決めるために、数値粘性項を加えた移流拡散方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \text{Diff.} \phi = 0 \quad (3.1)$$

を解く。速度場は常に一定であり、 $u = 10 \text{ m/s}$ ,  $w = 0 \text{ m/s}$  として与える。

数値粘性項の係数  $\nu_h, \nu_v$  の条件は (2.46) と (2.47) である。表 3.1 の示す設定においては

$$\nu_h \leq 1.25 \times 10^5, \quad (3.2)$$

$$\nu_v \leq 3.125 \times 10^4 \quad (3.3)$$

である。ここでは以下のように値を変えて数値実験を行う：

case 1-1 :  $\nu_h = 0, \nu_v = 0$  (数値粘性項がない場合).

case 1-2 :  $\nu_h = 5.0 \times 10^3, \nu_v = 1.25 \times 10^3$  .

case 1-3 :  $\nu_h = 5.0 \times 10^2, \nu_v = 1.25 \times 10^2$  .

case 1-4 :  $\nu_h = 5.0, \nu_v = 1.25$  .

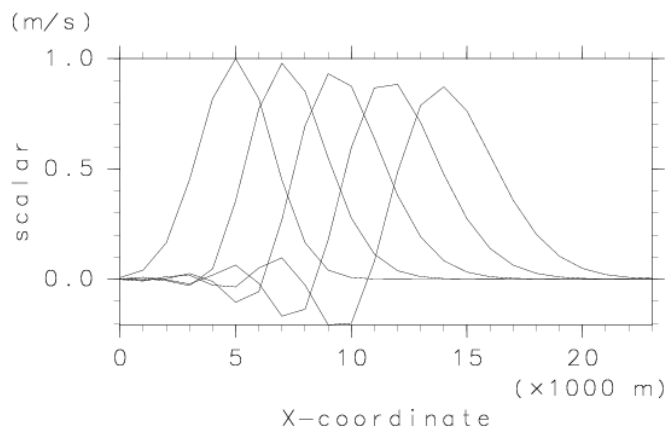
case 1-1 ~ 1-4 の数値実験を行う際の設定を表 3.1 に示す。

図 3.1 ~ 図 3.4 の結果から、数値粘性項の係数として  $\nu_h = 5.0, \nu_v = 1.25$  が適当であることがわかる。数値粘性項を追加した図 3.2 ~ 図 3.4 のうち、もっとも安定なものは図 3.4 である。図 3.2 では  $t = 500$  あたりで数値計算によって出てきたノイズが  $\phi$  よりも大きくなっている。図 3.3 では  $t = 750$  あたりで  $\phi$  の後ろにノイズが出てきている。図 3.3 と図 3.4 を比べると、 $\phi$  の後ろに出ているノイズが小さいのは図 3.4 である。 $\phi$  の擾乱に対してノイズの大きさが 20 % 程度である図 3.4 が適当である。

表 3.1: case 1-1 ~ 1-2 の数値実験における設定.

水平計算領域	: $2.4 \times 10^4$ m
鉛直計算領域	: $1.0 \times 10^4$ m
水平格子間隔 $\Delta x$	: $1.0 \times 10^3$ m
鉛直格子間隔 $\Delta z^*$	: $5.0 \times 10^2$ m ( $z^*$ 方向に等間隔)
長い時間間隔 $\Delta t$	: 1 s
計算時間 $t$	: 10,000 s
初期擾乱	: 中心 $(x, z^*) = (5.0 \times 10^3, 5.0 \times 10^3)$ , 振幅 $5.0 \times 10^2$ Pa, 半振幅 $x = \sqrt{5.0} \times 10^3, z^* = \sqrt{5.0} \times 10^3$ の 2次元ガウス型の温位
水平速度	10 m/s (一定値)
鉛直速度	0 m/s (一定値)

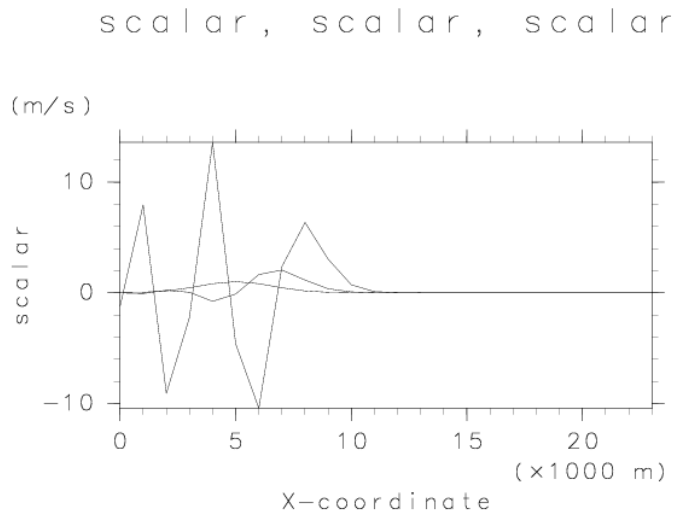
scalar, scalar, scalar, scalar



glool4/Fortran90

date: 4/ 1/27 page: 1

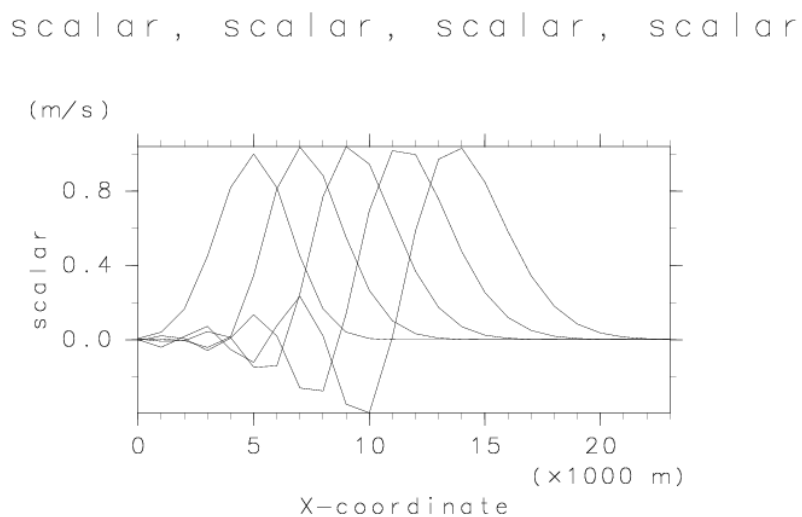
図 3.1: case 1-1 における温位の計算結果. 左から順に時刻  $t = 0, t = 250, t = 500, t = 750, t = 1000$  s における温位の偏差の時間- $z^*$  軸断面図.



glool4/Fortran90

date: 4/ 1/27 page: 1

図 3.2: case 1-2 における温位の計算結果. 左から順に時刻  $t = 0, t = 250, t = 500$  s における温位の偏差の時間- $z^*$  軸断面図.

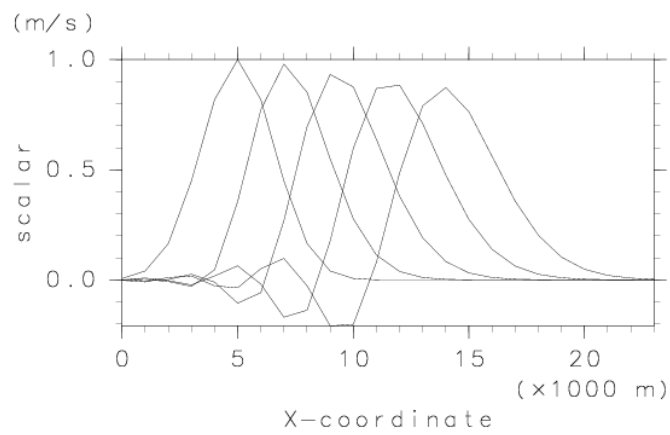


glool4/Fortran90

date: 4/ 1/27 page: 1

図 3.3: case 1-3 における温位の計算結果. 左から順に時刻  $t = 0, t = 250, t = 500, t = 750, t = 1000$  s における温位の偏差の時間- $z^*$  軸断面図.

scalar, scalar, scalar, scalar



gl0014/Fortran90

date: 4/ 1/27 page: 1

図 3.4: case 1-4 における温位の計算結果. 左から順に時刻  $t = 0, t = 250, t = 500, t = 750, t = 1000$  s における温位の偏差の時間- $z^*$  軸断面図.

### 3.2.2 音波の計算

準圧縮モデルでは解に音波が含まれる。HE-VI 法で音波が正しく計算できているかを確認するため、

- 音速で伝播する波が存在する (case 2-1, case 2-2).
- $\Delta\tau$  を変えたとき鉛直方向に伝わる音波の減衰の度合いが変わる (case 2-1 と case 2-3 の比較).

かどうかを調べる。そのための数値実験として

case 2-1 :  $\Delta\tau = 1$  s, 初期擾乱として,  $x$  方向一様で, 中心  $x = 1.2 \times 10^4$  m, 振幅  $5.0 \times 10^2$  Pa, 半値幅  $1.0 \times 10^3$  m のガウス型の圧力を与える。

case 2-2 :  $\Delta\tau = 1$  s, 初期擾乱として,  $z^*$  方向一様で, 中心  $z^* = 5.0 \times 10^4$  m, 振幅  $5.0 \times 10^2$  Pa, 半値幅  $\sqrt{5.0} \times 10^3$  m のガウス型の圧力を与える。

case 2-3 :  $\Delta\tau = 0.1$  s, その他の設定は case 2-1 と同じ。

を行う。case 2-1 ~ 2-3 の数値実験を行う際の設定を表 3.2 に示す。ここでは音波のみを見るため, 重力加速度を 0 とし, 移流項, コリオリ項, 浮力項, 拡散項および音波減衰項は全て 0 とする。

表 3.2: case 2-1 ~ 2-3 の数値実験における設定.

水平計算領域	: $2.4 \times 10^4$ m
鉛直計算領域	: $1.0 \times 10^4$ m
水平格子間隔 $\Delta x$	: $1.0 \times 10^3$ m
鉛直格子間隔 $\Delta z^*$	: $5.0 \times 10^2$ m ( $z^*$ 方向に等間隔)
短い時間間隔 $\Delta \tau$	: 1.0 s または $1.0 \times 10^{-1}$ s
計算時間 $t$	: $1.0 \times 10^2$ s
初期擾乱	: $x$ 方向一様で, 中心 $x = 1.2 \times 10^4$ m, 振幅 $5.0 \times 10^2$ Pa, 半値幅 $1.0 \times 10^3$ m のガウス型の圧力 または $z^*$ 方向一様で, 中心 $z^* = 5.0 \times 10^4$ m, 振幅 $5.0 \times 10^2$ Pa, 半値幅 $\sqrt{5.0} \times 10^3$ m のガウス型の圧力
基本場	: 等温 (300 K), 等圧大気

図 3.5 ~ 図 3.8 の実験結果から, 鉛直速度, 水平速度およびエクスナー関数の偏差がほぼ音速で伝播していることがわかる. 基本場から計算される音速は

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \left( \frac{c_p R_d}{c_v} \bar{\Pi} \bar{\theta} \right)^{1/2} \\ &\sim 339 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (3.4)$$

である. ただし  $c_p = 1.952 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ,  $c_v = 1.463 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ,  $R_d = 2.87 \times 10^2 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$  とした. 図 3.5 と図 3.6 では, それぞれ鉛直速度の偏差とエクスナー関数の偏差が  $t = 15$  s 後に  $z^* = 5.0 \times 10^3$  m に達していることがわかる. これより見積もった音速の大きさは約 333 m/s である. 図 3.7 と図 3.8 では, それぞれ鉛直速度とエクスナー関数の偏差が共に  $t = 35$  s 後に  $z^* = 1.2 \times 10^4$  m に達しているため, 音速の大きさは約 343 m/s である.

図 3.9 ~ 図 3.12 の実験結果から, 鉛直方向に伝わる音波が減衰されることが確認できる. 短い時間間隔が 1 s である図 3.9 と図 3.10 の波の振幅は, 最初の 1 周期に比べて約  $1/2$  になっている. 短い時間間隔を  $1/10$  にした図 3.11 と図 3.12 の波の振幅は, 減衰がほとんどみられない.  $\Delta \tau$  を小さくすると, 減衰の度合いが小さくなっていることがわかる.

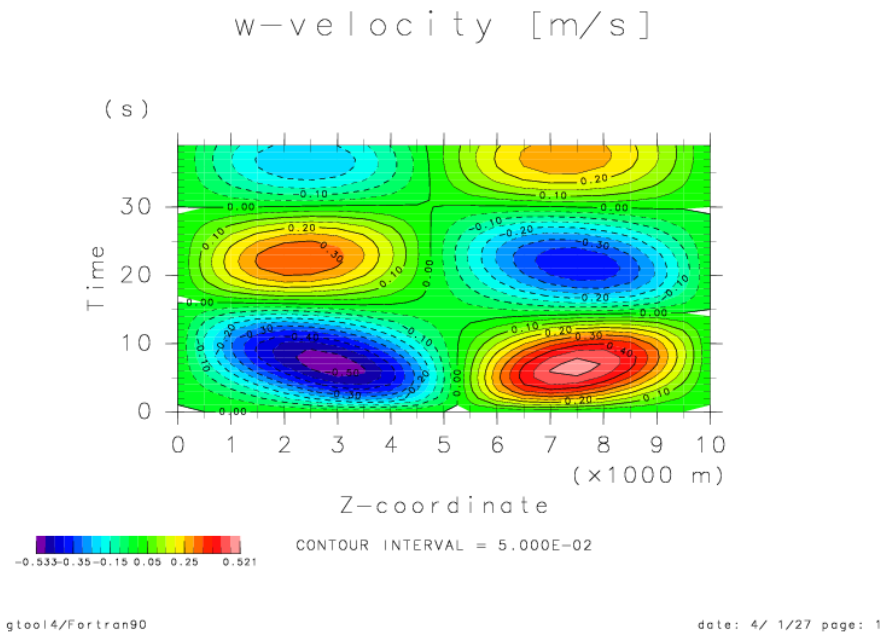


図 3.5: case 2-1 における音波の計算結果 . 鉛直速度の偏差の  $x = 1.2 \times 10^4$  m における時間-  $z^*$  軸断面図.

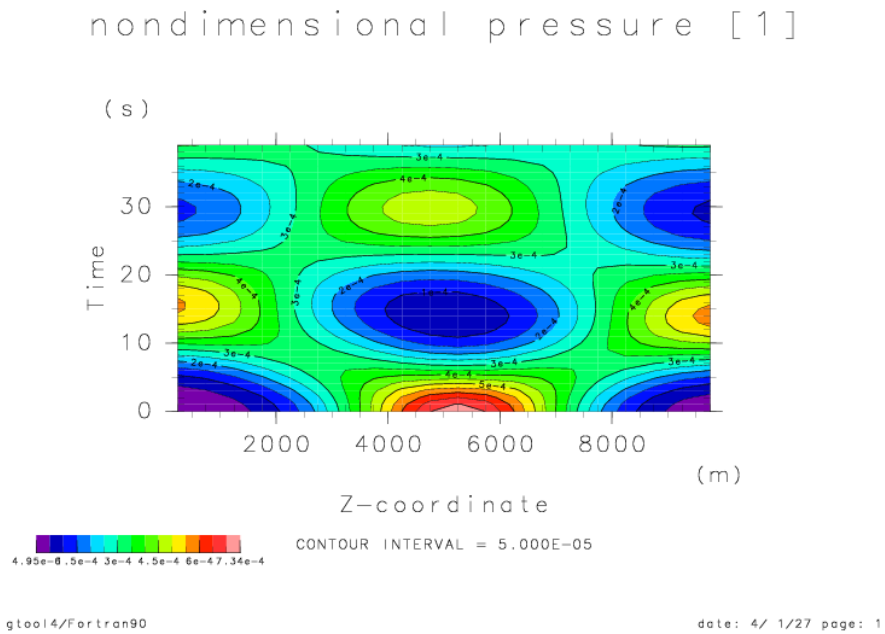


図 3.6: case 2-1 における音波の計算結果 . エクスナー関数の偏差の  $x = 1.2 \times 10^4$  m における時間-  $z^*$  軸断面図.



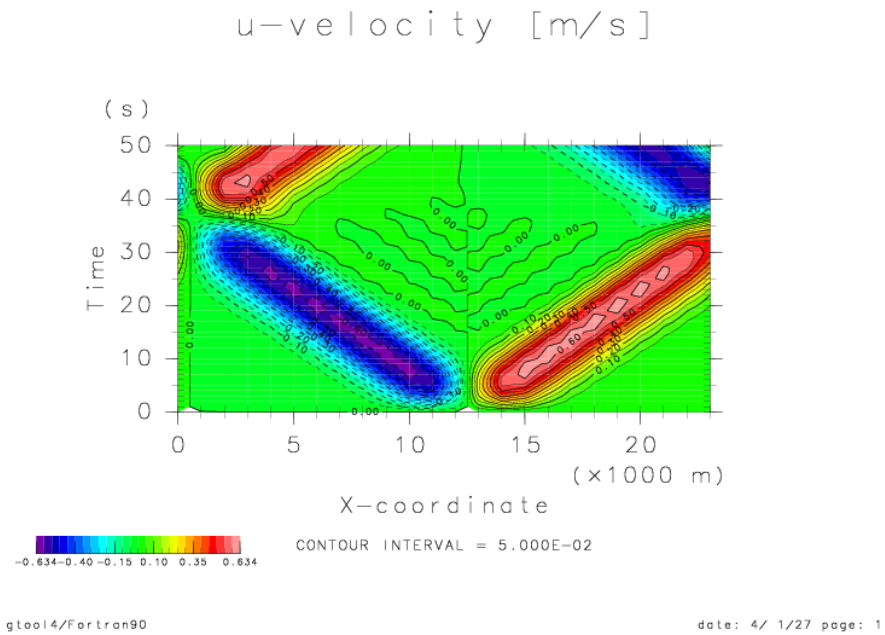


図 3.7: case 2-2 における音波の計算結果 . 鉛直速度の偏差の  $z^* = 5.0 \times 10^3$  m における時間-  $x$  軸断面図.

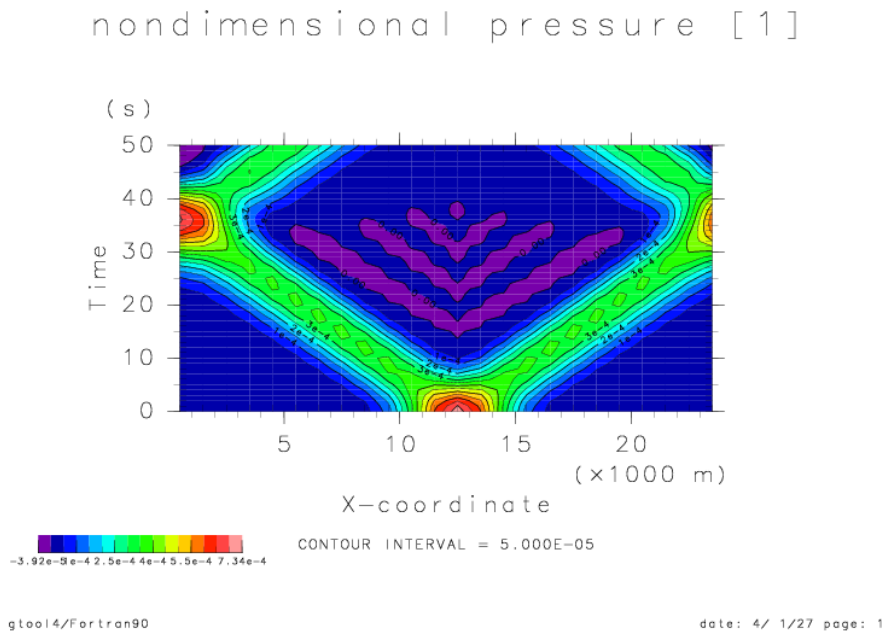
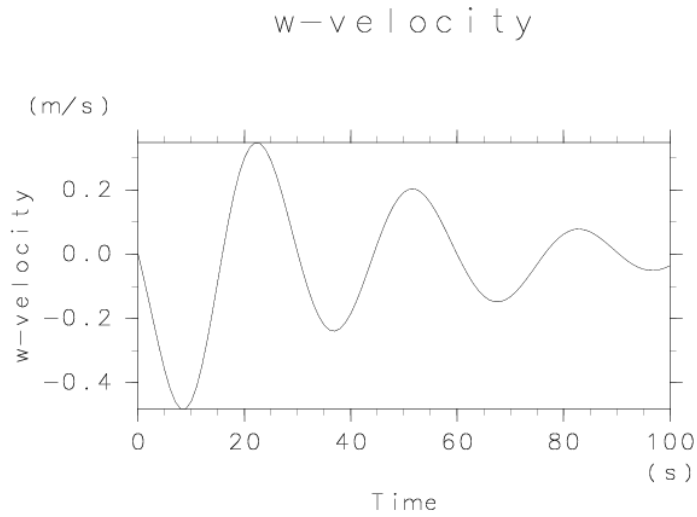


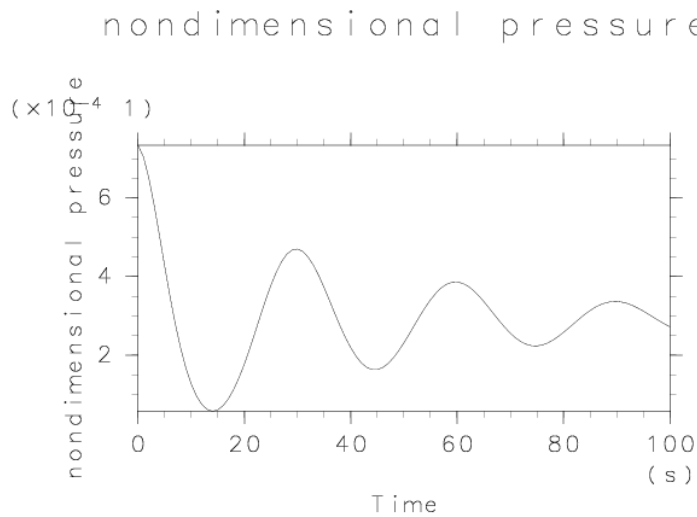
図 3.8: case 2-2 における音波の計算結果 . エクスナー関数の偏差の  $z^* = 5.0 \times 10^3$  m における時間-  $x$  軸断面図.



gl0014/Fortran90

date: 4/ 1/29 page: 1

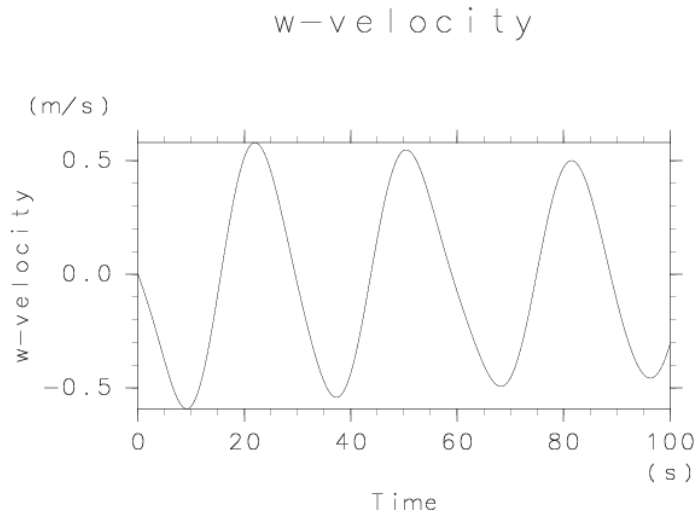
図 3.9: case 2-1 における音波の計算結果.  $(x, z^*) = (2.0 \times 10^3, 5.0 \times 10^3)$  における鉛直速度の偏差の時間変化.



gl0014/Fortran90

date: 4/ 1/29 page: 1

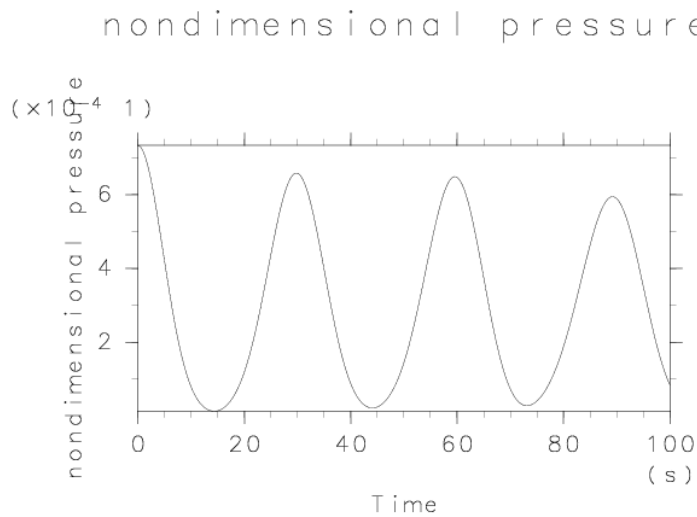
図 3.10: case 2-1 における音波の計算結果.  $(x, z^*) = (2.0 \times 10^3, 5.0 \times 10^3)$  におけるエクスナー関数の偏差の時間変化.



gl0014/Fortran90

date: 4/ 1/29 page: 1

図 3.11: case 2-3 における音波の計算結果.  $(x, z^*) = (2.0 \times 10^3, 5.0 \times 10^3)$  における鉛直速度の偏差の時間変化.



gl0014/Fortran90

date: 4/ 1/29 page: 1

図 3.12: case 2-3 における音波の計算結果.  $(x, z^*) = (2.0 \times 10^3, 5.0 \times 10^3)$  におけるエクスナー関数の偏差の時間変化.

### 3.2.3 音波減衰項の係数を決めるための計算

音波減衰項の係数  $\alpha$  の条件は (2.49) で与えられる. 表 3.3 の示す設定においては  $\Delta x = 1.0 \times 10^3 \text{ m}$ ,  $\Delta \tau = 1.0 \text{ s}$  なので, 音波減衰項の係数の条件は

$$\alpha \leq 2.5 \quad (3.5)$$

となる. 適当な  $\alpha$  を決めるために以下のように値を変えて数値計算を行う:

case 3-1 :  $\alpha = 0$  (音波減衰項がない場合).

case 3-2 :  $\alpha = 2.5 \times 10^{-2}$ .

case 3-1 と 3-2 の数値実験を行う際の設定を表 3.3 に示す. ここでは音波のみを見るため, 移流項, コリオリ項, 浮力項, 拡散項および音波減衰項は全て 0 とする.

表 3.3: case 3-1 ~ 3-2 の数値実験における設定.

水平計算領域	: $2.4 \times 10^4 \text{ m}$
鉛直計算領域	: $1.0 \times 10^4 \text{ m}$
水平格子間隔 $\Delta x$	: $1.0 \times 10^3 \text{ m}$
鉛直格子間隔 $\Delta z^*$	: $5.0 \times 10^2 \text{ m}$ ( $z^*$ 方向に等間隔)
短い時間間隔 $\Delta \tau$	: 1 s
計算時間 $t$	: $1.0 \times 10^4 \text{ s}$
初期擾乱	: 中心 $(x, z^*) = (1.2 \times 10^4, 5.0 \times 10^3)$ , 振幅 $5.0 \times 10^2 \text{ Pa}$ , 半振幅 $x = \sqrt{5.0} \times 10^3, z^* = 1.0 \times 10^3$ の 2次元ガウス型の圧力 (図 3.13)
基本場	: 等温 (300 K) 大気, 静水圧平衡

図 3.14 ~ 図 3.17 の実験結果から, 音波減衰項の係数として適当な値は  $\alpha = 2.5 \times 10^{-2}$  であることがわかる. 音波減衰項を加えない場合の図 3.15 では,  $t = 9000 \text{ s}$  あたりでエクスナー関数の偏差の振幅は  $10^{38} \text{ Pa}$  であり, 既に計算が破綻している. これに対し, 図 3.17 を見ると  $\alpha = 2.5 \times 10^{-2}$  とした場合のエクスナー関数の偏差の振幅は,  $t = 9100 \text{ s}$  あたりでも  $10^{-5}$  程度で十分減衰されている.

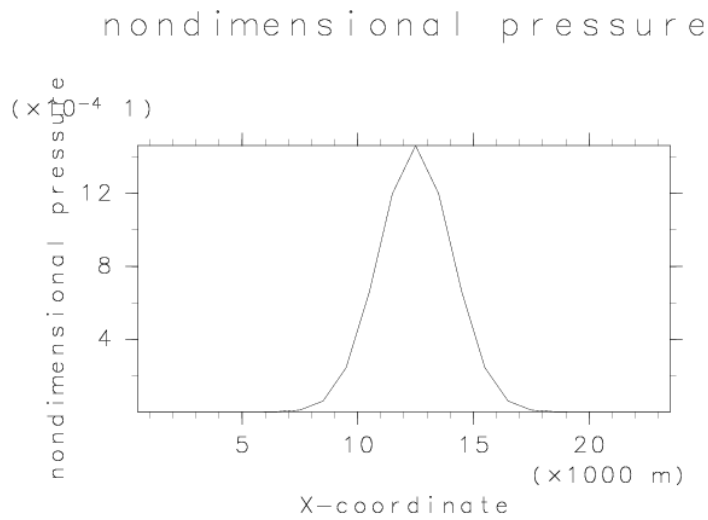
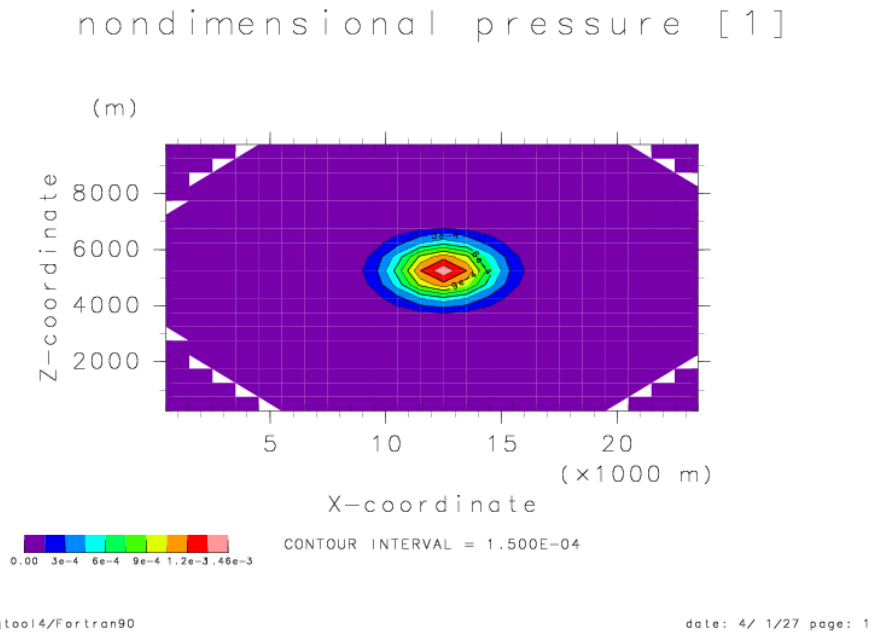


図 3.13: 初期擾乱として与えた圧力をエクスター関数に変換したもの. 与えた初期擾乱は, 中心  $(x, z^*) = (1.2 \times 10^4, 5.0 \times 10^3)$ , 振幅  $5.0 \times 10^2 \text{ Pa}$ , 半振幅  $x = \sqrt{5.0} \times 10^3, z^* = 1.0 \times 10^3$  の 2 次元ガウス型の圧力である.

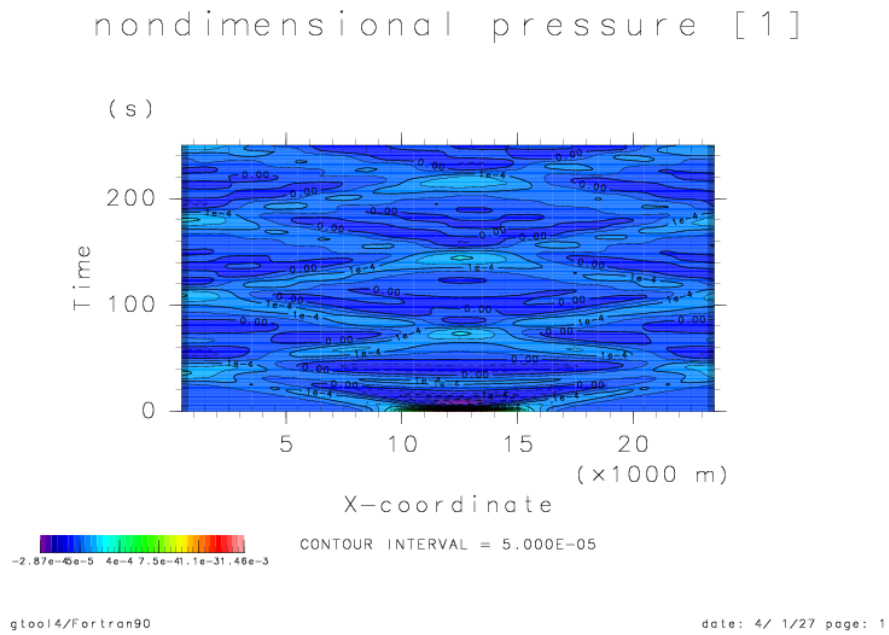


図 3.14: case 3-1 における音波の計算結果. エクスナー関数の偏差について, 時刻  $t = 0 \sim 250$  s 間,  $z^* = 5.0 \times 10^3$  における時間-  $x$  軸断面図.

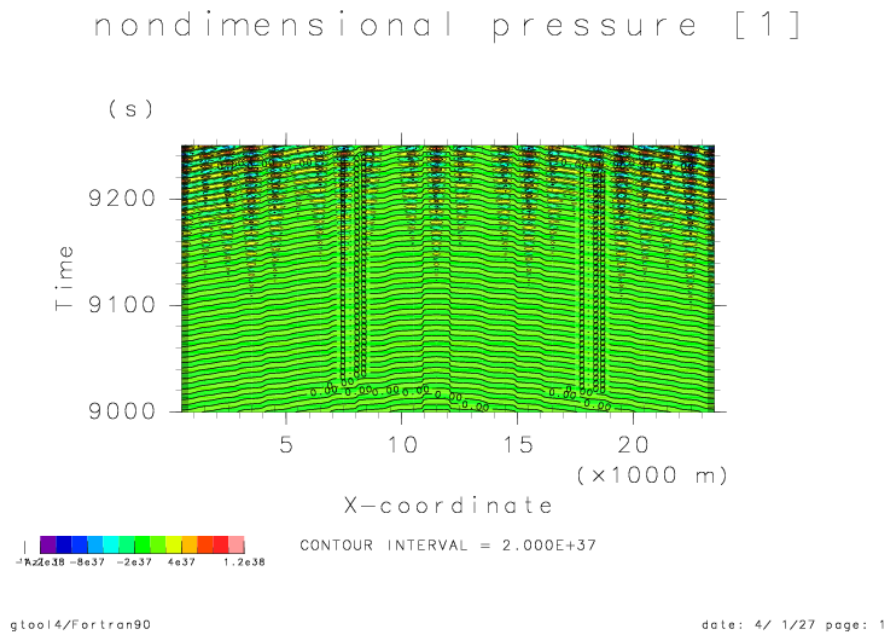


図 3.15: case 3-1 における音波の計算結果. エクスナー関数の偏差について, 時刻  $t = 9000 \sim 9250$  s 間,  $z^* = 5.0 \times 10^3$  における時間-  $x$  軸断面図. ただし上のカラーバーとではコンターが異なることに注意.

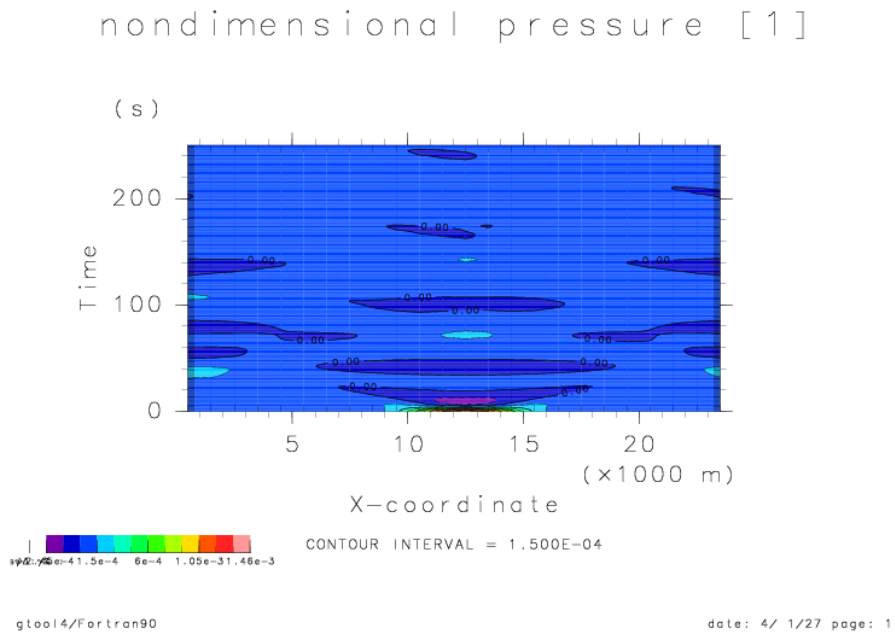


図 3.16: case 3-2 における音波の計算結果. エクスナー関数の偏差について, 時刻  $t = 0 \sim 250$  s 間,  $z^* = 5.0 \times 10^3$  における時間-  $x$  軸断面図.

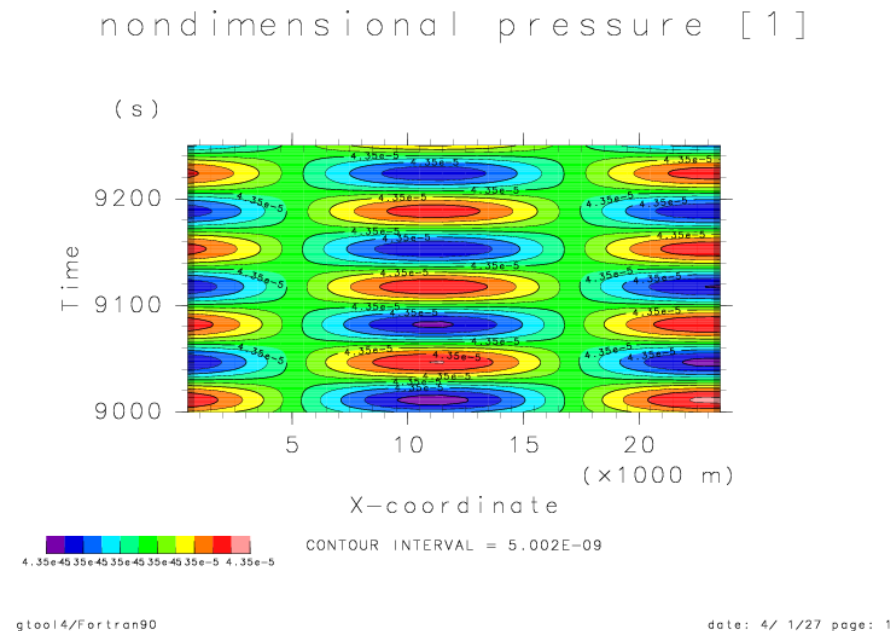


図 3.17: case 3-2 における音波の計算結果. エクスナー関数の偏差について, 時刻  $t = 9000 \sim 9250$  s 間,  $z^* = 5.0 \times 10^3$  における時間-  $x$  軸断面図. ただし上のカラーバーとではコンターが異なることに注意.

### 3.2.4 サーマルの計算

前節までに得られた安定計算に必要な音波減衰項と数値粘性項の係数を用いて、サーマルの数値実験を行う。サーマルの計算によって、浮力によって駆動される流れを計算できるかを確認する。サーマルの計算に用いた数値モデルには拡散項が加えられている。運動量渦拡散係数として一定値 (10, 50, 100 m<sup>2</sup>/s) を用いる:

$$\text{case 4-1: } K_m = 10 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{case 4-2: } K_m = 50 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{case 4-3: } K_m = 100 \text{ m}^2/\text{s}$$

case 4-1 ~ 4-3 の数値実験を行う際の設定を表 3.4 に示す。ここでの数値モデルはコリオリ項のみ 0 とする。

表 3.4: case 4-1 ~ 4-3 の数値実験における設定.

水平計算領域	: $2.4 \times 10^4 \text{ m}$
鉛直計算領域	: $1.0 \times 10^4 \text{ m}$
水平格子間隔 $\Delta x$	: $1.0 \times 10^3 \text{ m}$
鉛直格子間隔 $\Delta z^*$	: $5.0 \times 10^2 \text{ m}$ ( $z^*$ 方向に等間隔)
短い時間間隔 $\Delta \tau$	: 2 s
長い時間間隔 $\Delta t$	: 10 s
計算時間 $t$	: $2.0 \times 10^3 \text{ s}$
初期擾乱	: 中心 $(x, z^*) = (1.2 \times 10^4, 0.0)$ , 振幅 $5.0 \times 10^2 \text{ m}$ , 半振幅 $x = \sqrt{5.0} \times 10^3, z^* = \sqrt{5.0} \times 10^3$ の 2次元ガウス型の温度
基本場	: $z^* = 5000 \text{ m}$ まで乾燥断熱減率で温度減少, $z^* = 5000 \text{ m}$ より上は $z^* = 5000 \text{ m}$ での温度で 等温, 静水圧平衡
音波減衰項の係数 $\alpha$	: $2.5 \times 10^{-2}$
水平数値粘性項の係数 $\nu_h$	: 5.0
鉛直数値粘性項の係数 $\nu_v$	: 1.25

図 3.18 ~ 図 3.32 の結果から、上昇するサーマルを表現できたことが確認できる。case 4-1 ~ 4-3 のどれも  $t = 500 \text{ s}$  あたりからサーマルが上昇し始めるのが確認できる。 $t = 800 \text{ s}$  あたりでサーマルの先端が  $z^* = 5000 \text{ m}$  に達する。 $t = 800 \text{ s}$  あた



りで,  $z^* = 5.0 \times 10^3 \text{ m}$  で浮力を失いサーマルが潰れて水平に広がっていくのがわかる.

サーマルの数値実験において,  $t = 700 \text{ s}$  あたり (図 3.20, 図 3.25 および図 3.30) で下部境界付近から擾乱が生じている.  $t = 1000 \text{ s}$  である図 3.22, 図 3.27 および図 3.32 では, さらに大きくなっている. この擾乱は 2 次精度の中心差分での移流計算によるノイズであると考えられる. 運動量渦拡散係数を大きくするとノイズが小さくなることからいえる.

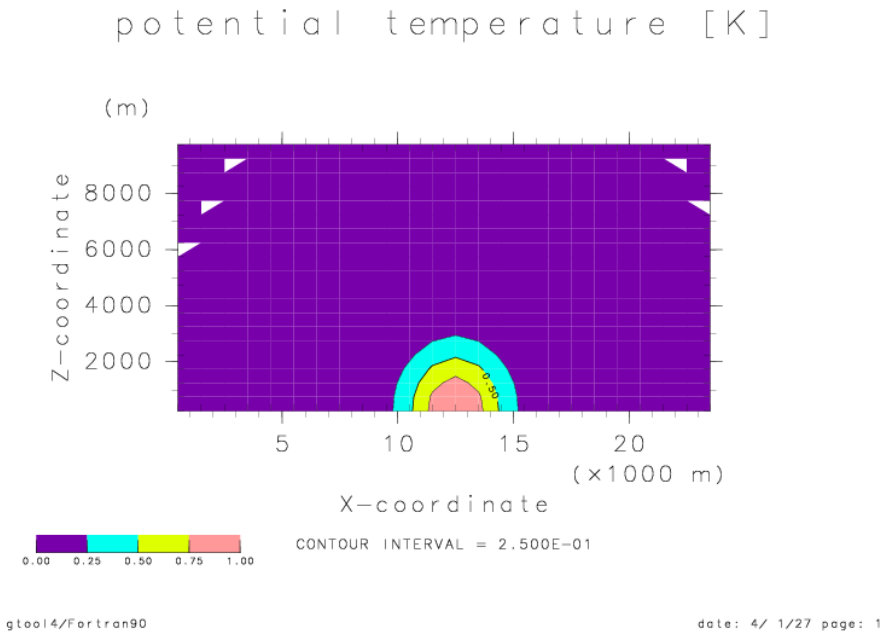


図 3.18: case 4-1 における時刻  $t = 0 \text{ s}$  での温位の偏差の計算結果.

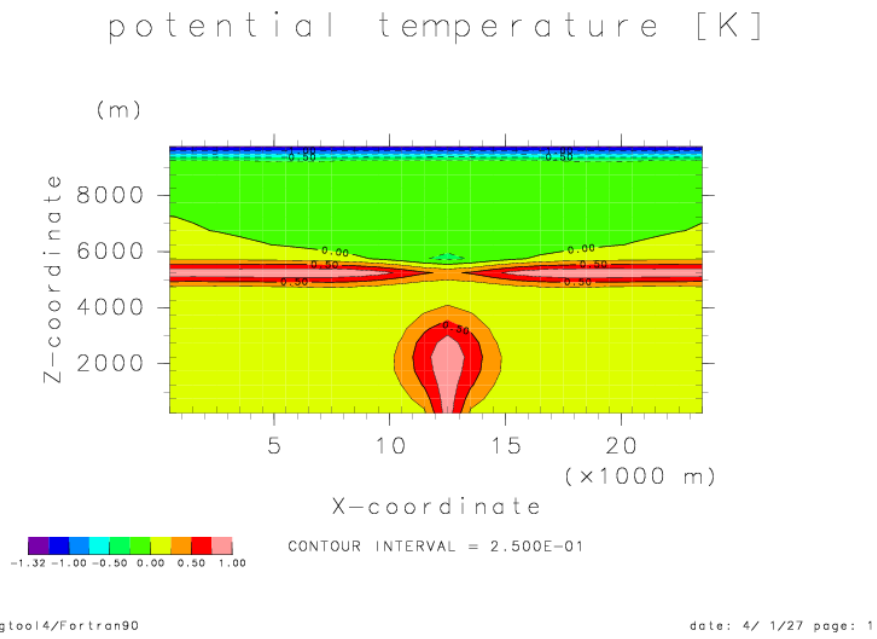


図 3.19: case 4-1 における時刻  $t = 500$  s での温位の偏差の計算結果.

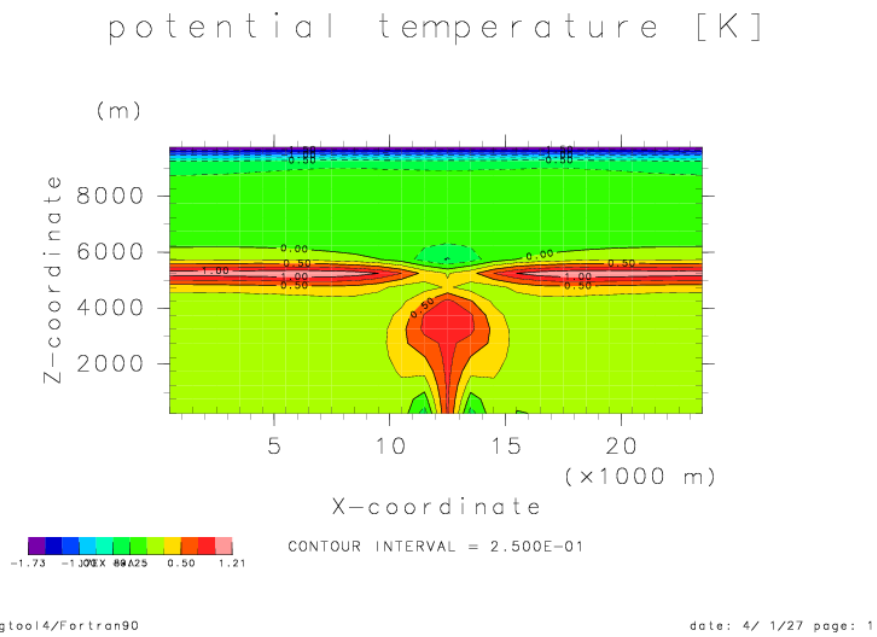


図 3.20: case 4-1 における時刻  $t = 700$  s での温位の偏差の計算結果.

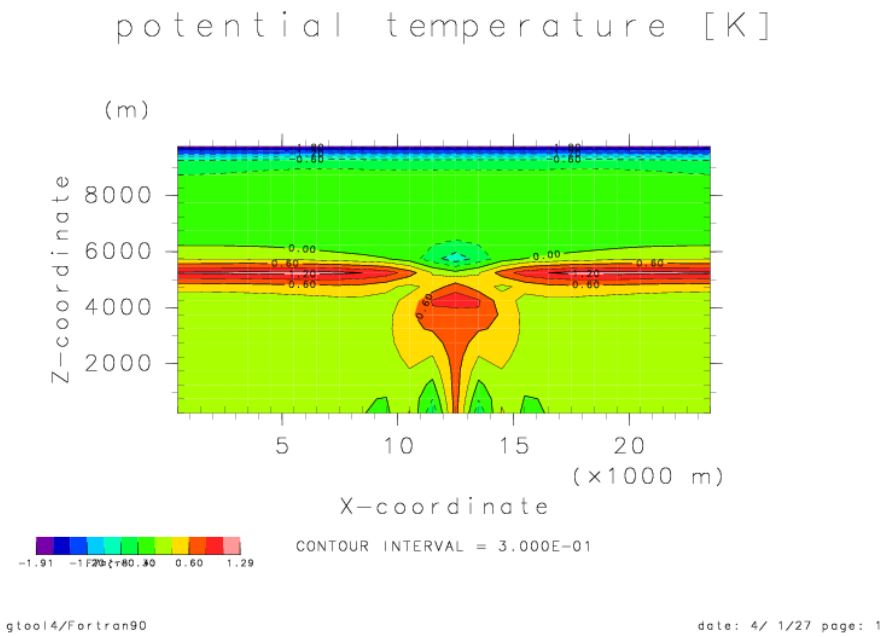


図 3.21: case 4-1 における時刻  $t = 800$  s での温位の偏差の計算結果.

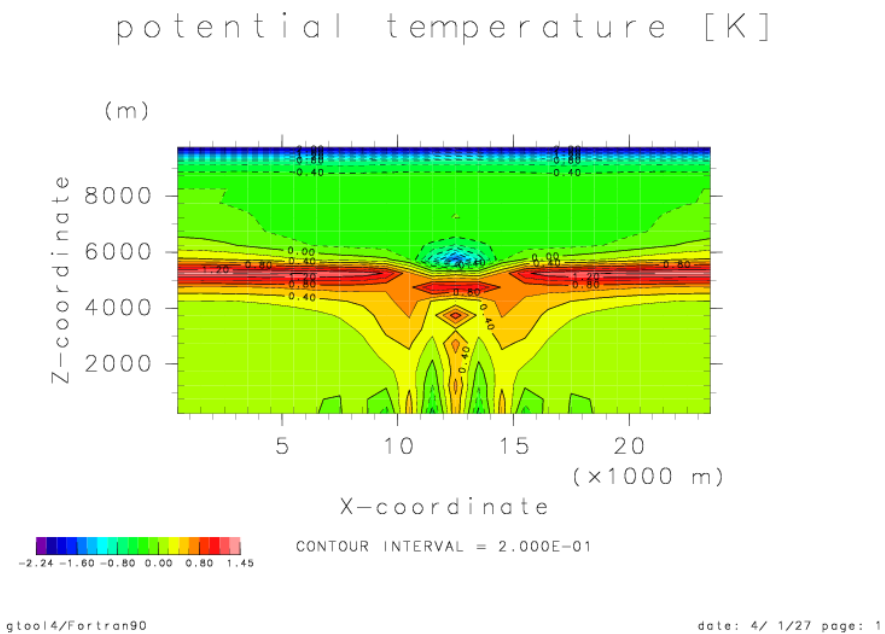


図 3.22: case 4-1 における時刻  $t = 1000$  s での温位の偏差の計算結果.

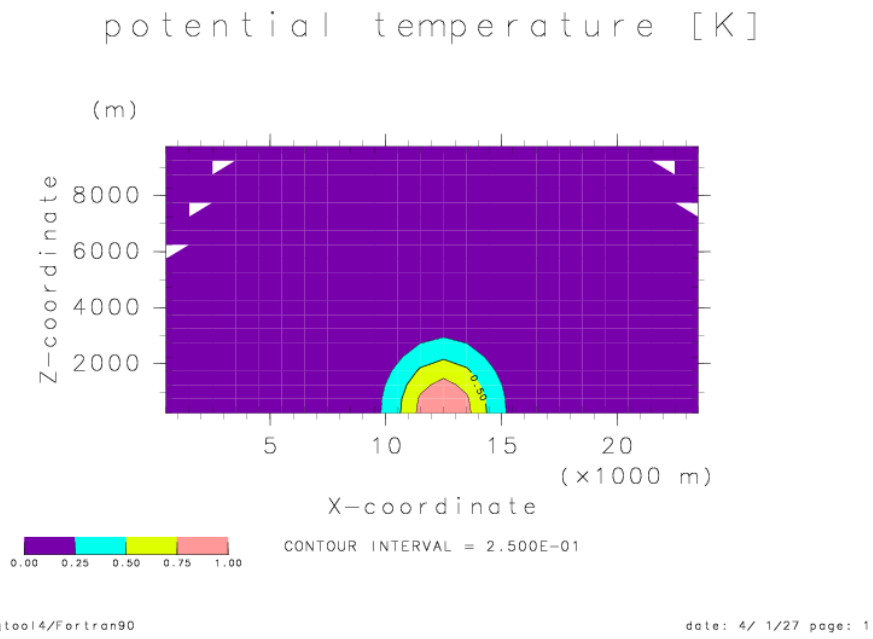


図 3.23: case 4-2 における時刻  $t = 0$  s での温位の偏差の計算結果.

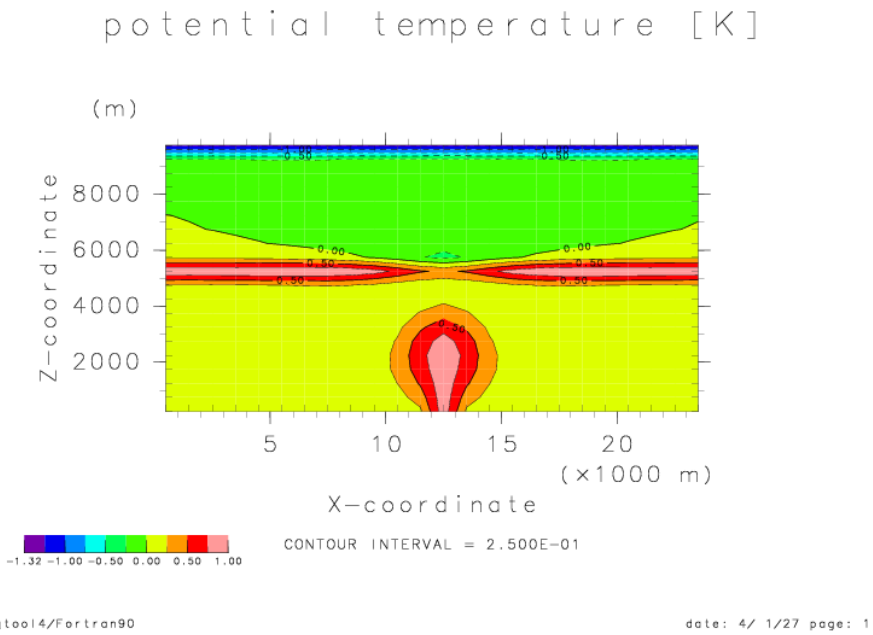


図 3.24: case 4-2 における時刻  $t = 500$  s での温位の偏差の計算結果.

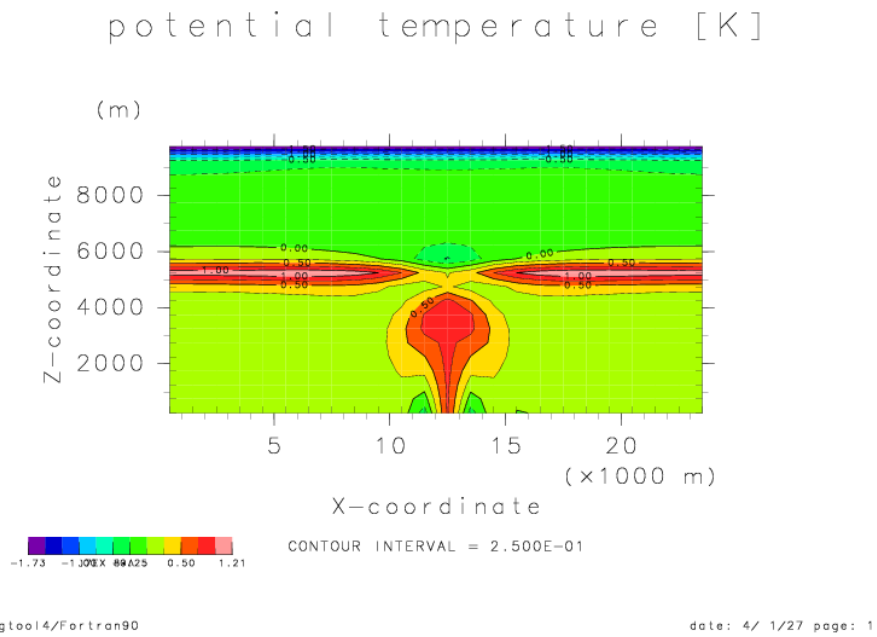


図 3.25: case 4-2 における時刻  $t = 700$  s での温位の偏差の計算結果.

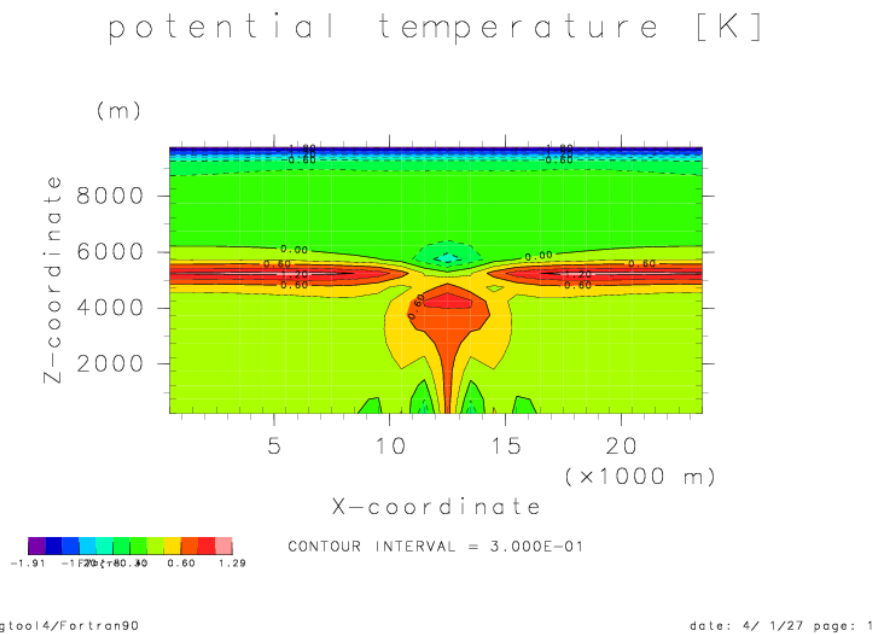


図 3.26: case 4-2 における時刻  $t = 800$  s での温位の偏差の計算結果.

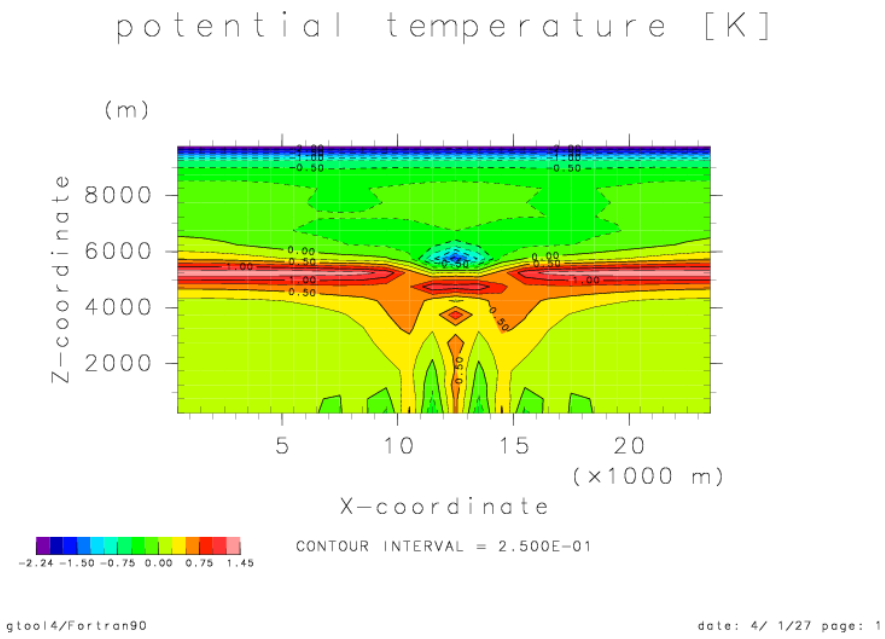


図 3.27: case 4-2 における時刻  $t = 1000$  s での温位の偏差の計算結果.

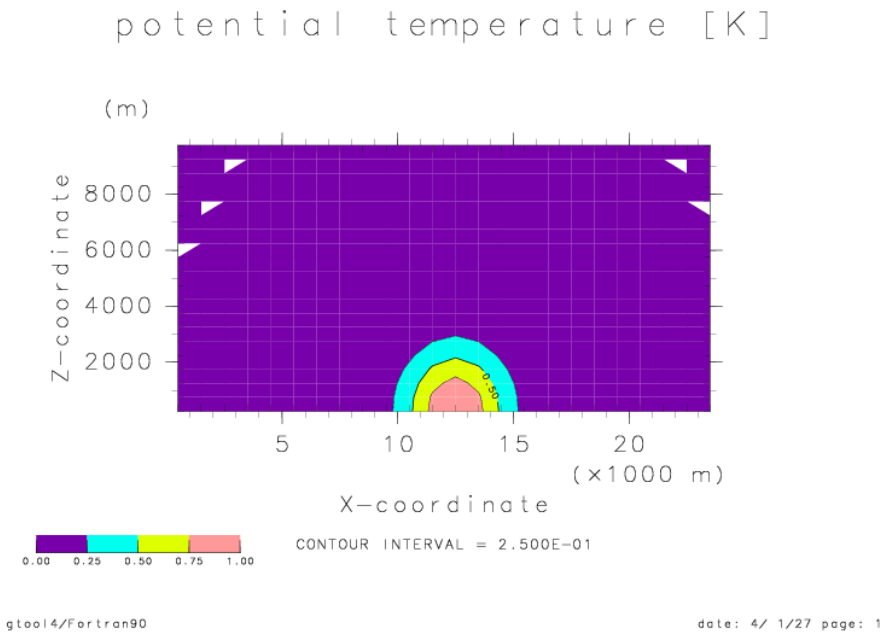


図 3.28: case 4-3 における時刻  $t = 0$  s での温位の偏差の計算結果.

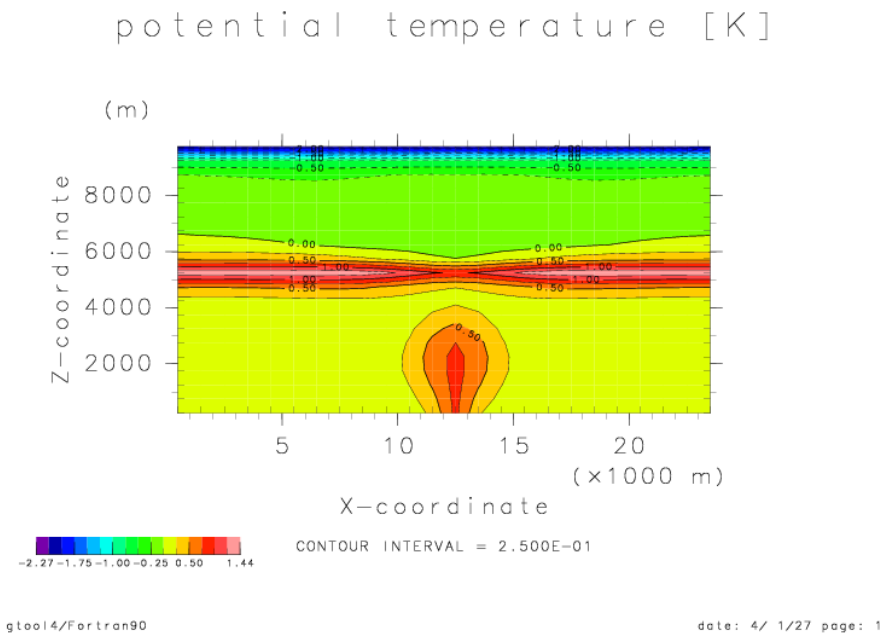


図 3.29: case 4-3 における時刻  $t = 500$  s での温位の偏差の計算結果.

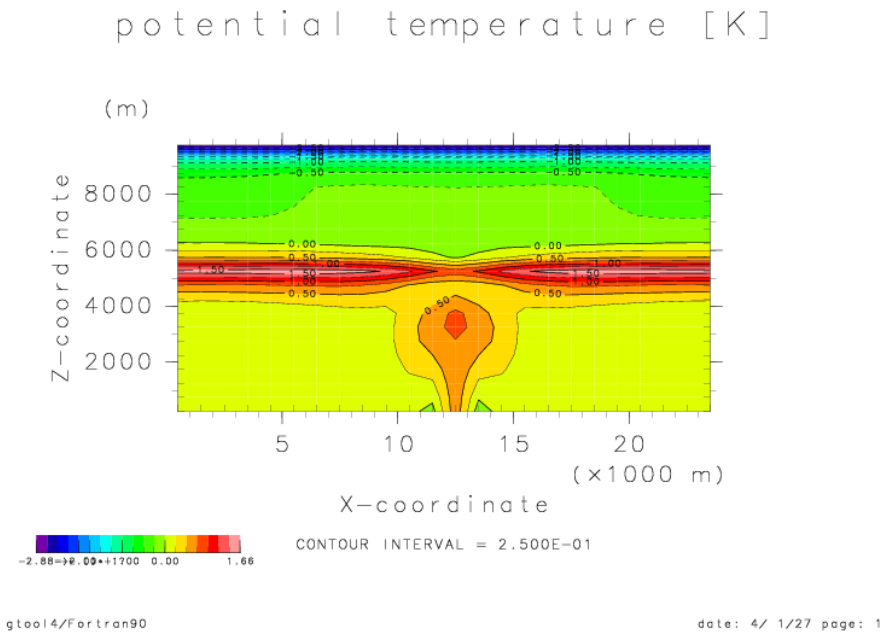


図 3.30: case 4-3 における時刻  $t = 700$  s での温位の偏差の計算結果.

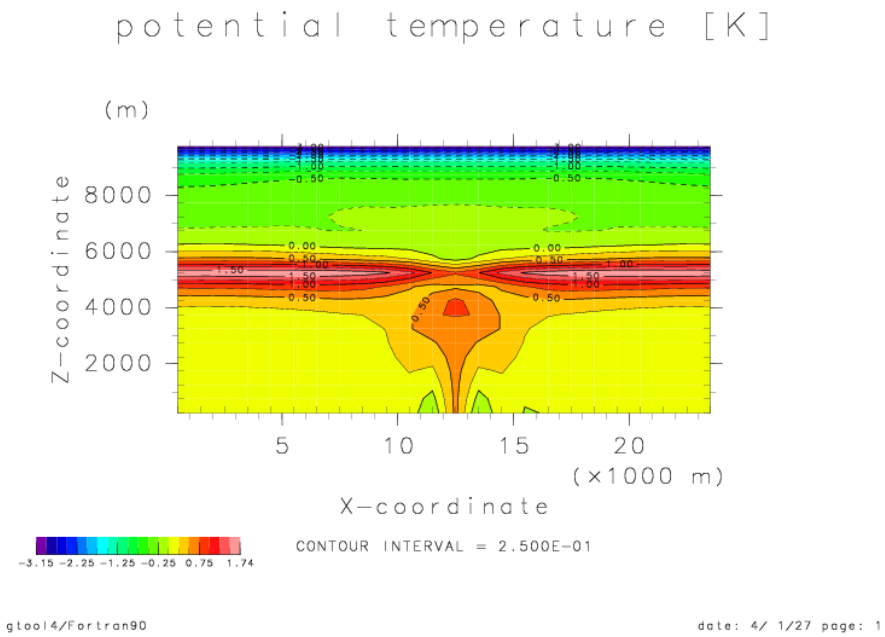


図 3.31: case 4-3 における時刻  $t = 800$  s での温位の偏差の計算結果.

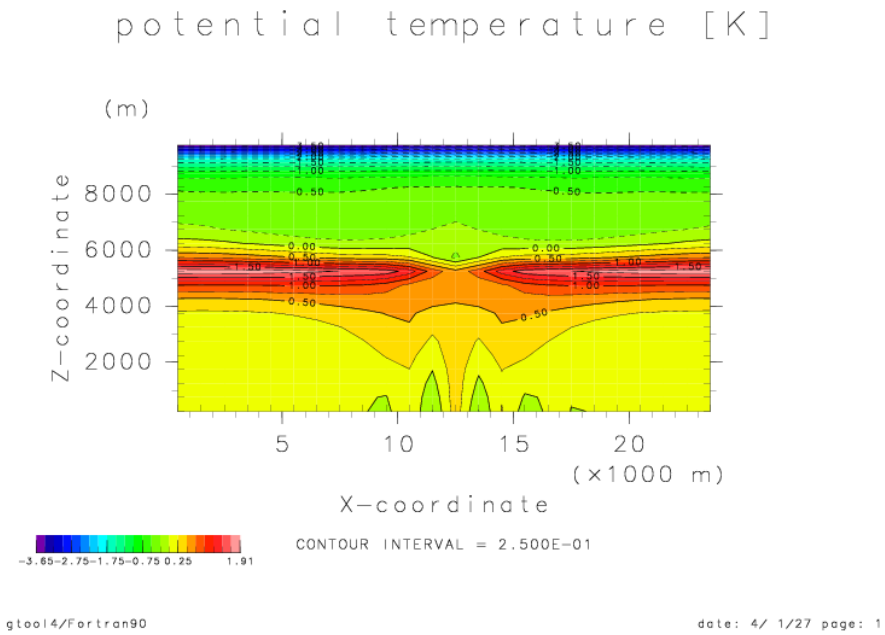


図 3.32: case 4-3 における時刻  $t = 1000$  s での温位の偏差の計算結果.



## 第4章 まとめ

本研究では、地形に沿った座標系における非静力学モデルを作成するための基礎となるべき定式化と離散化を示した。直交直線座標系における定式化は Klemm and Wilhelmson (1978) に従い、地形に沿った座標系は斉藤 (1999) に従って定式化を示した。離散化では計算不安定を抑えるため、音波減衰項と数値粘性項を人工的に加え、Asselin (1972) の時間フィルターを用いた。

定式化の際、Klemm and Wilhelmson (1978) の数理モデルには消去されている項があることを見つけた。本論文のサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー方程式中の項 (2.19) と (2.20) が、Klemm and Wilhelmson (1978) では離散化の段階でなくなっている。またこれらの項がないことに関する議論はない。

定式化と離散化を行った後、乾燥大気について 2 次元の非静力学対流モデルを作成した。作成した数値モデルは音波と簡単なサーマルの計算ができる。作成した数値モデルを用いて数値実験を行った結果、以下のことがわかった:

- $\Delta x = 1,000 \text{ m}$ ,  $\Delta \tau = 1.0 \text{ s}$  の場合、音波減衰項の係数は  $\alpha = 2.5 \times 10^{-2}$  が適当である。
- $\Delta x = 1,000 \text{ m}$ ,  $\Delta \tau = 1.0 \text{ s}$  の場合、数値粘性項の係数は  $\nu_h = 5.0$ ,  $\nu_v = 1.25$  が適当である。

本研究で作成した数値モデルに運動量渦拡散係数の時間発展方程式を組み込むと、2 次元非静力学対流数値モデルが完成する。運動量渦拡散係数の式を組み込んだ数値モデルを用いると、Klemm and Wilhelmson (1978) の離散化で抜けている 2 項の効果を調べることができる。

## 謝辞

本研究を進めるにあたって多くの指導と助言をして頂いた方々に深く感謝します。

指導教官である林祥介教授には本研究を始めるきっかけを頂き、研究を進める上で多くの助言を頂きました。九州大学理学部地球惑星科学科の中島健介助手には、地理的距離があるにもかかわらず、定式化から離散化、プログラミングに至るまで様々な指導と助言を頂きました。北海道大学大学院地球環境科学研究科の石渡正樹助手にはプログラミングや修論の内容等に関して様々な助言を頂きました。地球流体力学研究室の小高正嗣助手と同研究室博士課程の杉山耕一朗さんにはなかなか進まない研究に毎週のようにつき合って頂き、多くの指導や助言をして頂きました。同研究室博士課程の小西丈予さんには定式化やプログラミングで詰まったとき等に助言や励ましを頂きました。九州大学大学院理学府地球惑星科学専攻地球流体力学研究分野博士課程の中野満寿男さんには修士論文を参考にさせていただきだけでなく、定式化等に関して助言も頂きました。本研究の大きな支えとなったCReSSを開発された名古屋大学地球水循環研究センターの坪木和久さんと財団法人高度情報科学技術研究機構の榊原篤志さんには紙面をかりて御礼申し上げます。

北海道大学低温科学研究所寒冷海洋圏科学部門雲科学分野の方々や名古屋大学地球水循環研究センター局域水循環過程研究部門第1研究室の院生の方々には、本研究を進めるにあたり多くの助言を頂きました。地球流体力学研究室・惑星物理学研究室の方々には研究に関する議論だけでなく、多くの励ましも頂きました。本当にありがとうございました。

本研究の数値モデルを作成するにあたり、コンパイラにはFujitsu Fortran & C Package ver.3 を使わせて頂きました。また、作図には地球流体電脳倶楽部の gtool4 Fortran90 ツール・ライブラリ (<http://www.gfd-dennou.org/arch/gtool4/>) を利用させて頂きました。

# 付録 A 乾燥大気における準圧縮モデルの定式化の補足

本章では主に第2章の定式化で解説していないことについての詳細を述べる。予報変数, 基本場の設定や記号などは本文中と同じである。

## A.1 地形に沿った座標系

ここでは基礎方程式系を地形に沿った座標系に変換するために, 座標系, 速度および空間微分の定義をする。

斉藤 (1999) 同様に, 地形に沿った座標  $(x^*, y^*, z^*)$  を

$$\begin{aligned} x^* &= x, \\ y^* &= y, \\ z^* &= z^*(x, y, z) \end{aligned}$$

とする。  $z^*$  は (2.21) で定義される (図 2.1)。

地形に沿った座標系での速度を  $(u^*, v^*, \omega)$  とすると, 直交直線座標系での速度は

$$u = u^* \frac{\partial x}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial x}{\partial y^*} + \omega \frac{\partial x}{\partial z^*}, \quad (\text{A.1})$$

$$v = u^* \frac{\partial y}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial y}{\partial y^*} + \omega \frac{\partial y}{\partial z^*}, \quad (\text{A.2})$$

$$w = u^* \frac{\partial z}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial z}{\partial y^*} + \omega \frac{\partial z}{\partial z^*} \quad (\text{A.3})$$

と書ける。上式 (A.1)-(A.3) を  $u^*, v^*, \omega$  について解くと,

$$G^{1/2} u^* = u J_{y^* z^*}^{yz} + v J_{y^* z^*}^{zx} + w J_{y^* z^*}^{xy}, \quad (\text{A.4})$$

$$G^{1/2}v^* = uJ_{z^*x^*}^{yz} + vJ_{z^*x^*}^{zx} + wJ_{z^*x^*}^{xy}, \quad (\text{A.5})$$

$$G^{1/2}\omega = uJ_{x^*y^*}^{yz} + vJ_{x^*y^*}^{zx} + wJ_{x^*y^*}^{xy} \quad (\text{A.6})$$

を得る。ただし  $J$  は 2 次元のヤコビアンで、例えば

$$\begin{aligned} J_{y^*z^*}^{yz} &\equiv \frac{\partial(y, z)}{\partial(y^*, z^*)} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial y^*} & \frac{\partial y}{\partial z^*} \\ \frac{\partial z}{\partial y^*} & \frac{\partial z}{\partial z^*} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$G$  は 3 次元のヤコビアンで

$$\begin{aligned} G &\equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^*, y^*, z^*)} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^*} & \frac{\partial x}{\partial y^*} & \frac{\partial x}{\partial z^*} \\ \frac{\partial y}{\partial x^*} & \frac{\partial y}{\partial y^*} & \frac{\partial y}{\partial z^*} \\ \frac{\partial z}{\partial x^*} & \frac{\partial z}{\partial y^*} & \frac{\partial z}{\partial z^*} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と定義される。したがって (2.21) を代入して整理すると、地形に沿った座標系での速度は

$$U = u, \quad (\text{A.7})$$

$$V = v, \quad (\text{A.8})$$

$$W = G^{13}u + G^{23}v + \frac{1}{G^{1/2}}w \quad (\text{A.9})$$

と書ける。

直交直線座標系から地形に沿う座標系へ変換する場合、ある変数  $\phi$  の空間微分は

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial\phi}{\partial z^*}, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial\phi}{\partial z^*}, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial\phi}{\partial z^*} \quad (\text{A.12})$$

となる。

## A.2 サブグリッドスケールの拡散

予報変数  $A(= u, v, w, \pi, \theta, q_v, q_c, q_r)$  をグリッドスケールで表現できる平均成分 ( $\bar{A}$ ) と格子間隔以下 (サブグリッドスケール) の運動を表す変動成分 ( $A''$ ) に分ける:

$$A = \bar{A} + A''.$$

平均の方法としてレイノルズ平均を用いる. このとき平均成分と変動成分は

$$\begin{aligned} \overline{A''} &= 0, \\ \overline{AB} &= \bar{A}\bar{B} + \overline{A''B''}, \\ \overline{A''\bar{B}} &= 0 \end{aligned}$$

を満たす.

直交直線座標系における運動方程式, 連続の式に対してレイノルズ平均操作を行うと,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + c_p \bar{\Theta}_v \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_i} = \delta_{i3} g \left[ \frac{\theta}{\bar{\Theta}} - 1 \right] - \varepsilon_{i3k} f u_k - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i'' u_j''}, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.14})$$

を得る. ただし上付バーの混同を避けるため本節のみ, 基本場での  $\theta$  を  $\bar{\Theta}$  と表す. 上式 (A.13) 中の右辺第 3 項  $-\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i'' u_j''}$  が式 (2.5) 中の  $D_{u_i}$  である. Klemp and Wilhelmson (1978) では, 連続の式を変形した圧力方程式にサブグリッドスケールの拡散項  $D_\pi$  がある.

熱力学の式に対して同様な操作を行うと,

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j'' \theta''}. \quad (\text{A.15})$$

上式 (A.15) 中の  $-\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j'' \theta''}$  が, それぞれ式 (2.9) の拡散項  $D_\theta$  である.

(A.13) の右辺第 3 項に  $\overline{u_i'' u_j''}$ , (A.15) の右辺に  $\overline{u_j'' \theta''}$  があるために,  $\bar{u}_i, \bar{\pi}, \bar{\theta}, \bar{q}_v, \bar{q}_c, \bar{q}_r$  に関して方程式系が閉じていない. 方程式を閉じるために, Klemp and Wilhelmson (1978) では乱流運動エネルギーを用いた 1.5 次のクロージャモデルを使っている.

本数理モデルは Klemp and Wilhelmson (1978) に従う。このとき  $\overline{u_i'' u_j''}$  と  $\overline{u_j'' \theta''}$  を以下のように仮定する:

$$\overline{u_i'' u_j''} = -K_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E, \quad (\text{A.16})$$

$$\overline{u_j'' \theta''} = K_h \frac{\partial \theta}{\partial x_j}. \quad (\text{A.17})$$

$E, K_m$  および  $K_h$  は本文中と同様にして求める。

## 付録 B 湿潤大気における準圧縮モデルの定式化

本章では湿潤大気における 3 次元準圧縮モデルの定式化を示す。

基礎方程式系は, 3 方向の運動方程式と熱力学の式に加え, 水蒸気混合比の式, 雲水混合比の式および雨水混合比の式である.  $x, y$  方向の運動方程式は乾燥空気の場合と同じある.  $z$  または  $z^*$  方向の運動方程式, 熱力学の式およびサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー方程式は蒸発・凝結の効果を考えるため, 乾燥空気の方程式と形が異なる.

### B.1 変数の定義

湿潤大気における予報変数は

- $u$  : 速度の  $x$  成分
- $v$  : 速度の  $y$  成分
- $w$  : 速度の  $z$  成分
- $\Pi$  : 無次元化した圧力 (エクスター関数)
- $\theta$  : 温位
- $q_v$  : 水蒸気の混合比
- $q_c$  : 雲水の混合比
- $q_r$  : 雨水の混合比

であり, 空間の変数  $x, y, z$  と時間の変数  $t$  である.

密度は湿潤空気の状態方程式

$$p = \rho R_d T (1 + 0.61 q_v) \quad (\text{B.1})$$

または

$$\Pi = \left( \frac{R_d}{p_0} \rho \theta_v \right)^{R_d/c_v} \quad (\text{B.2})$$

から診断的に与えられる。ただし本章での  $\rho$  は湿潤空気の密度とする。  $\theta_v$  は仮温位で

$$\theta_v = \theta (1 + 0.61q_v) \quad (\text{B.3})$$

と表される。

## B.2 基本場の定義と分離

変数と基礎方程式系を基本場とそこからの偏差に分離する。分離する変数は  $u, v, w, \Pi, \theta, q_v, q_c, q_r$  および  $\rho$  である。基本場と偏差の表記は本文中と同じとする。ある変数  $\phi$  は

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (\text{B.4})$$

と分離される。以下では、本文と同様に、エクスター関数の偏差  $\Pi'$  を  $\pi$  と表し、速度  $u', v', w'$  を単に  $u, v, w$  と表す。

湿潤大気の場合の基本場は乾燥大気と同様の状態を考え、水平一様 ( $z$  のみの関数) な静止 ( $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$ ) 状態とする。基本場における無次元量の圧力と温位は、乾燥大気と同様であり、仮温位は

$$\bar{\theta}_v = \bar{\theta} (1 + 0.61\bar{q}_v) \quad (\text{B.5})$$

である。湿潤大気における基本場において、鉛直方向の運動方程式は静水圧平衡の式

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} = -\frac{g}{c_p \bar{\theta}_v} \quad (\text{B.6})$$

となる。

基本場の密度は

$$\bar{\rho} = \frac{p_0}{R_d} \frac{\bar{\Pi}^{c_v/R_d}}{\bar{\theta}_v} \quad (\text{B.7})$$

である。



### B.3 直交直線座標系における基礎方程式系

本節では直交直線座標系における基礎方程式系を導出する。湿潤大気の場合、直交直線座標系における基礎方程式は、運動方程式、熱力学の式、準圧縮系の圧力方程式、水蒸気混合比の式、雲水混合比の式および雨水混合比の式である。

運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} + c_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \\ = \delta_{i3} g \left[ \frac{\theta}{\bar{\theta}} - 1 + 0.61 (q_v - \bar{q}_v) - q_c - q_r \right] - \varepsilon_{i3k} f u_k + D_{u_i} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

である。  $i = 1, 2, 3$  で、それぞれ  $x, y$  および  $z$  成分を表す。  $f$  はコリオリパラメータである。  $D_{u_i}$  はサブグリッドスケールの乱流に伴う拡散項であり B.4 節で述べる。

圧力方程式は

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v u_j) = f_\pi, \quad (\text{B.9})$$

$$f_\pi = -u_j \frac{\partial \pi}{\partial x_j} + \frac{R_d \pi}{c_v} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{c^2}{c_p \bar{\theta}_v^2} \frac{d\theta_v}{dt} \quad (\text{B.10})$$

である。  $D_\pi$  はサブグリッドスケールの乱流に伴う拡散項、  $c$  は音波で

$$c^2 = \frac{c_p R_d \Pi \theta_v}{c_v} \quad (\text{B.11})$$

と表され、  $\bar{c}$  は基本場での音波である。圧力方程式 (B.10) はエクスター関数を微分したものと圧縮性流体の連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (\text{B.12})$$

から得られる。

熱力学の式、水蒸気混合比の式、雲水混合比の式および雨水混合比の式は、それぞれ、

$$\frac{d\theta}{dt} = D_\theta + M_\theta, \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{dq_v}{dt} = D_{q_v} + M_{q_v}, \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{dq_c}{dt} = D_{q_c} + M_{q_c}, \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{dq_r}{dt} = D_{q_r} + M_{q_r} \quad (\text{B.16})$$

である. それぞれの方程式中の  $M_\theta, M_{q_v}, M_{q_c}, M_{q_r}$  は微物理過程に伴う生成・消滅項である.  $D_\theta, D_{q_v}, D_{q_c}, D_{q_r}$  はサブグリッドスケールの乱流に伴う拡散項である. 生成・消滅項については B.5 節で, 拡散項については B.4 節で述べる.

密度は湿潤空気の状態方程式

$$\rho = \frac{p_0}{R_d} \frac{\Pi^{c_v/R_d}}{\theta_v} \quad (\text{B.17})$$

より与えられる.

## B.4 直交直線座標系におけるサブグリッドスケールの拡散

乾燥大気の場合と同様に, レイノルズ平均を用いて, グリッドスケールの運動とサブグリッドスケールの運動に分離する. 直交直線座標系における運動方程式, 連続の式に対してレイノルズ平均操作を行うと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + c_p \bar{\Theta}_v \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_i} &= \delta_{i3} g \left[ \frac{\theta}{\bar{\Theta}} - 1 + 0.61 (q_v - \bar{Q}_v) - q_c - q_r \right] \\ &\quad - \varepsilon_{i3k} f u_k - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i'' u_j''}, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{B.19})$$

を得る. ただし上付バーの混同を避けるため本節でのみ, 基本場での  $\theta, \theta_v, q_v$  をそれぞれ  $\bar{\Theta}, \bar{\Theta}_v, \bar{Q}_v$  と表す.

また, 熱力学の式, 水蒸気・雲水・雨水の混合比の式に対しても同様な操作を行うと,

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j'' \phi''}. \quad (\text{B.20})$$

ただし  $\phi = \theta, q_v, q_c, q_r$  である. 上式 (B.20) 中の  $-\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j'' \phi''}$  が, それぞれ式 (B.13) ~ (B.16) の拡散項  $D_\phi$  である.

(B.18) の右辺第 3 項に  $\overline{u_i'' u_j''}$ , (B.20) の右辺に  $\overline{u_j'' \phi''}$  があるために,  $\bar{u}_i, \bar{\pi}, \bar{\theta}, \bar{q}_v, \bar{q}_c, \bar{q}_r$  に関して方程式系が閉じていない. 方程式を閉じるために, 本数値モデルでは乾燥

大気と同様に Klemp and Wilhelmson (1978) に従う。このとき  $\overline{u_i''u_j''}$  と  $\overline{u_j''\phi''}$  を以下のように仮定する:

$$\overline{u_i''u_j''} = -K_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E, \quad (\text{B.21})$$

$$\overline{u_j''\phi''} = K_h \frac{\partial \phi}{\partial x_j}. \quad (\text{B.22})$$

$E, K_m$  および  $K_h$  を求める。  $E$  は以下の時間発展方程式から求められる:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & g \left\{ -AK_h \frac{\partial \theta_e}{\partial z} + K_h (1 - \gamma A) \frac{\partial q_v}{\partial z} + K_h \frac{\partial q_c}{\partial z} \right\} \\ & + 2K_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{2} |\varepsilon_{ijk}| K_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \\ & - \frac{3}{2} \delta_{ij} E \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( K_m \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) - \left( \frac{C_\varepsilon}{l} \right) E^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$A = \frac{1}{\bar{\theta}} \left\{ \frac{1 + \frac{1.61\varepsilon L q_v}{R_d T}}{1 + \frac{\varepsilon L^2 q_v}{c_p R_d T^2}} \right\}. \quad (\text{B.24})$$

ただし  $\theta_e$  は相当温位,  $\gamma = L / (c_p \bar{\Pi})$ ,  $\theta_e = \theta (1 + L q_v / (c_p T))$  である。

$E$  が得られると,  $K_m$  は (2.17) から求められる。Deardorff (1975) によると  $C_\varepsilon = C_m = 0.2$  である。CReSS (坪木ら, 2001) では  $C_\varepsilon = 3.9$  (最下層),  $C_\varepsilon = 0.93$  (それ以外),  $C_m = 0.1$  としている。

式 (B.23) を数値計算したとき  $E$  が負になると扱いが困る。数値モデルでは, 関係式 (2.18) と (2.17) を用いて  $K_m$  のみにした式を用いる:

$$\begin{aligned} \frac{dK_m}{dt} = & 3g \left\{ -AK_m \frac{\partial \theta_e}{\partial z} + K_m (1 - \gamma A) \frac{\partial q_v}{\partial z} + K_m \frac{\partial q_c}{\partial z} \right\} \\ & + 2C_m^2 l^2 \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{2} |\varepsilon_{ijk}| C_m^2 l^2 \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{1}{3} \delta_{ij} K_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\ & + \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} \right) + \delta_{ij} \left( \frac{\partial K_m}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2} K_m^2. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

## B.5 直交直線座標系における雲・降水の微物理過程

水蒸気を含む空気塊が上昇すると、水蒸気から雲水になり雲が形成され、さらに降水粒子へと成長すると降水が起こる。降水過程には暖かい雨と冷たい雨の 2 種類がある。暖かい雨は氷相過程を含まない降水過程である。このような雨をもたらす雲は雲内の全領域が  $0^{\circ}\text{C}$  以上にあり、暖かい雲といわれる。冷たい雨は氷相過程を含む降水過程である。このような雨をもたらす雲は、雲内の全領域または一部が  $0^{\circ}\text{C}$  以下にあり、冷たい雲といわれる。ここでは暖かい雨のみを考える。

暖かい雲のモデル化にはバルク法のパラメタリゼーションを用いる。暖かい雲についてのバルク法では、水物質に関する予報変数として水蒸気混合比  $q_v$ 、雲水混合比  $q_c$  および雨水混合比  $q_r$  の 3 つを用いる。暖かい雲内における微物理過程は図 B.1 のようになっている。考慮する微物理過程は以下の 4 つである。凝結または蒸発による水蒸気と雲水間の変換  $dq_{vs}/dt$ 、蒸発による雨水から水蒸気への変換  $E_r$ 、併合成長による雲水から雨水への変換  $A_r$ 、衝突併合による雲水から雨水への変換  $C_r$ 、雨水の鉛直フラックス  $F_r$  である。ここでは水蒸気が直接雨水になる凝結する過程は無視する。 $q_{vs}$ 、 $E_r$ 、 $A_r$ 、 $C_r$ 、 $F_r$  の詳細は以下で述べる。雲・降水の微物理過程が関係するのはこれら 3 つの混合比の式 (B.43) ~ (B.45)、および熱力学の式 (B.42) である。直交直線座標系における方程式の雲・降水微物理過程に伴う生成・消滅項は、以下のように記述される：

$$M_{\theta} = -\gamma \left( \frac{dq_{vs}}{dt} + E_r \right), \quad (\text{B.26})$$

$$M_{q_v} = \frac{dq_{vs}}{dt} + E_r, \quad (\text{B.27})$$

$$M_{q_c} = -\frac{dq_{vs}}{dt} - A_r - C_r, \quad (\text{B.28})$$

$$M_{q_r} = F_r - E_r + A_r + C_r. \quad (\text{B.29})$$

- 凝結または蒸発による水蒸気から雲水間の変換:  $\frac{dq_{vs}}{dt}$

この変換を計算するときは、Soong and Ogura (1973) の湿潤飽和調節法 (D.4 節参照) を用いる。 $q_{vs}$  は飽和混合比であり、Tetens の公式を用いて、

$$q_{vs} = \frac{3.8}{\bar{p}} \exp \left( 17.27 \frac{\bar{\Pi}\theta - 273}{\bar{\Pi}\theta - 36} \right) \quad (\text{B.30})$$

と表される。

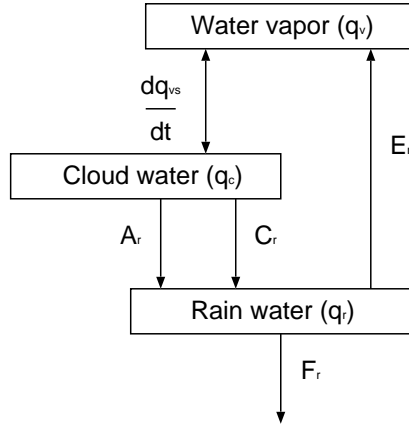


図 B.1: 考慮する微物理過程: 凝結または蒸発による水蒸気から雲水間の変換, 蒸発による雨水から水蒸気への変換, 雲水から雨水への変換, 雨水の鉛直フラックスである.

- 蒸発による雨水から水蒸気への変換:  $E_r$

この変換は Ogura and Takahashi (1971) と同様に

$$E_r = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\left(1 - \frac{q_v}{q_{vs}}\right) C (\bar{\rho} q_r)^{0.525}}{5.4 \times 10^5 + \frac{2.55 \times 10^6}{\bar{\rho} q_{vs}}} \quad (\text{B.31})$$

と表される. ただし  $C$  は ventilation factor で  $C = 1.6 + 124.9 (\bar{\rho} q_r)^{0.2046}$  である.

- 雲水から雨水への変換:  $A_r, C_r$

併合成長による変換  $A_r$  と衝突併合による変換  $C_r$  は, Kessler (1969) のパラメタリゼーションを用いて

$$A_r = k_1 (q_c - a), \quad (\text{B.32})$$

$$C_r = k_2 q_c q_r^{0.875} \quad (\text{B.33})$$

と書ける. ただし  $k_1 = 0.001 \text{ s}^{-1}$ ,  $a = 0.001 \text{ kg kg}^{-1}$ ,  $k_2 = 2.2 \text{ s}^{-1}$  である.

- 雨水の鉛直フラックス:  $F_r$

$$F_r = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} V q_r). \quad (\text{B.34})$$

$V$  は雨水の終端速度である. Soong and Ogura (1973) の終端速度に密度の変化を加えて

$$V = 36.34 (\bar{\rho} q_r)^{0.1346} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.35})$$

のように与えられる。ただし  $\rho_0$  は基本場の地表面での密度である。

## B.6 地形に沿った座標系における基礎方程式系

本節では、前節で導出した直交直線座標系での方程式系を地形に沿う座標系に変換する。座標系の設定は乾燥大気の場合と同様である。

静水圧平衡の式および前節で導出した基礎方程式系 (B.8), (B.10), (B.13) ~ (B.16) を、直交直線座標系から地形に沿った座標系に変換する。

静水圧平衡の式は

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z^*} = -\frac{G^{1/2}g}{c_p \bar{\theta}_v} \quad (\text{B.36})$$

となる。

運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z^*} + c_p \bar{\theta}_v \left( \frac{\partial \pi}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial \pi}{\partial z^*} \right) = f v + D_u, \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial z^*} + c_p \bar{\theta}_v \left( \frac{\partial \pi}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial \pi}{\partial z^*} \right) = -f u + D_v, \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \omega \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{c_p \bar{\theta}_v}{G^{1/2}} \frac{\partial \pi}{\partial z^*} \\ = g \left[ \frac{\theta}{\bar{\theta}} - 1 + 0.61 (q_v - \bar{q}_v) - q_c - q_r \right] + D_w \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

となる。拡散項  $D_u, D_v, D_w$  は B.4 節で述べる。

圧力方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{c^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \left\{ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v u)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v v)}{\partial y} + G^{13} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v u)}{\partial z^*} \right. \\ \left. + G^{23} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v v)}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w)}{\partial z^*} \right\} = f_\pi \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned}
 f_\pi = & -u \frac{\partial \pi}{\partial x} - v \frac{\partial \pi}{\partial y} - \omega \frac{\partial \pi}{\partial z^*} \\
 & + \frac{R_d \pi}{c_v} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \left( G^{13} + G^{23} + \frac{1}{G^{1/2}} \right) \frac{\partial w}{\partial z^*} \right\} \\
 & + \frac{c^2}{c_p \theta_v^2} \left\{ \frac{\partial \theta_v}{\partial t} + \frac{\partial \theta_v}{\partial x} + \frac{\partial \theta_v}{\partial y} + \left( G^{13} + G^{23} + \frac{1}{G^{1/2}} \right) \frac{\partial \theta_v}{\partial z^*} \right\}. \quad (\text{B.41})
 \end{aligned}$$

Klemp and Wilhelmson (1978) に従い  $f_\pi = 0$  とすると、準圧縮モデルの圧力方程式になる。  $f_\pi = 0$  とすることは線形化を行って非断熱項 ((B.41) の右辺第 3 項) を無視することを意味する。

熱力学の式、水蒸気混合比の式、雲水混合比の式および雨水混合比の式は、それぞれ、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial z^*} = M_\theta + D_\theta, \quad (\text{B.42})$$

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + u \frac{\partial q_v}{\partial x} + v \frac{\partial q_v}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_v}{\partial z^*} = M_{q_v} + D_{q_v}, \quad (\text{B.43})$$

$$\frac{\partial q_c}{\partial t} + u \frac{\partial q_c}{\partial x} + v \frac{\partial q_c}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_c}{\partial z^*} = M_{q_c} + D_{q_c}, \quad (\text{B.44})$$

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} + u \frac{\partial q_r}{\partial x} + v \frac{\partial q_r}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_r}{\partial z^*} = M_{q_r} + D_{q_r}. \quad (\text{B.45})$$

と書ける。それぞれの方程式中の乱流項  $D_\theta, D_{q_v}, D_{q_c}, D_{q_r}$  は B.4 節で、微物理項  $M_\theta, M_{q_v}, M_{q_c}, M_{q_r}$  は B.5 節で述べる。

密度は、湿潤空気の状態方程式

$$\rho = \frac{p_0}{R_d} \frac{\Pi^{c_v/c_p}}{\theta_v} \quad (\text{B.46})$$

から診断的に得られる。

## B.7 地形に沿った座標系におけるサブグリッドスケールの拡散

地形に沿った座標系において考える微物理過程は、直交直線座標系における微物理過程と同じである。

地形に沿った座標系における各方程式の拡散項は以下ようになる。  $x, y, z$  方向の

運動方程式の拡散項は、それぞれ、

$$\begin{aligned}
D_u = & 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right) \right\} \\
& + \left( \frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \right\} \\
& + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ K_m \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
& - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right), \tag{B.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_v = & \left( \frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \right\} \\
& + 2 \left( \frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \right\} \\
& + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ K_m \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
& - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right), \tag{B.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_w = & \left( \frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
& + \left( \frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
& + 2 \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( K_m \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
& - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \tag{B.49}
\end{aligned}$$

となる。

熱力学の式、水蒸気・雲水・雨水混合比の式の中の拡散項は、それぞれ、

$$\begin{aligned}
D_\phi = & \left( \frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left( K_h \frac{\partial \phi}{\partial x} + K_h G^{13} \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right) \\
& + \left( \frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left( K_h \frac{\partial \phi}{\partial y} + K_h G^{23} \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right) \\
& + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{K_h}{G^{1/2}} \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right) \tag{B.50}
\end{aligned}$$

となる。



乱流運動エネルギー方程式は

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + \omega \frac{\partial E}{\partial z^*} \\
&= \frac{g}{G^{1/2}} \left\{ -AK_h \frac{\partial \theta_e}{\partial z^*} + K_h (1 - \gamma A) \frac{\partial q_v}{\partial z^*} + K_h \frac{\partial q_c}{\partial z^*} \right\} \\
&+ 2K_m \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 + \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right)^2 \right\} \\
&+ K_m \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 \right. \\
&\quad + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 \right\} \\
&- \frac{2}{3} E \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
&+ \left( \frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left( K_h \frac{\partial E}{\partial x} + K_h G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \\
&+ \left( \frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left( K_h \frac{\partial E}{\partial y} + K_h G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \\
&+ \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) - \left( \frac{C_\varepsilon}{l} \right) E^{3/2}
\end{aligned} \tag{B.51}$$

である。運動量渦拡散係数に関する方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_m}{\partial t} = & - \left( u \frac{\partial K_m}{\partial x} + v \frac{\partial K_m}{\partial y} + \omega \frac{\partial K_m}{\partial z^*} \right) + \frac{3gC_m^2 l^2}{2G^{1/2}} \left( -A \frac{\partial \theta_e}{\partial z^*} + \frac{\partial q_l}{\partial z^*} \right) \\
& + C_m^2 l^2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 + \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
& + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} + \frac{\partial u}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 \right. \\
& \quad + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
& - \frac{K_m}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} + \frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left( \frac{\partial K_m^2}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left( \frac{\partial K_m^2}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z} \right\} \\
& + \left( \frac{\partial K_m}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial K_m}{\partial z^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial K_m}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial K_m}{\partial z^*} \right)^2 + \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \\
& - \frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2} K_m^2 \tag{B.52}
\end{aligned}$$

となる。

## B.8 地形に沿った座標系における雲・降水の微物理過程

地形に沿った座標系において考える微物理過程は、直交直線座標系における微物理過程と同じである。

それぞれ、地形に沿った座標系における生成・消滅項は以下ようになる：

$$M_\theta = -\gamma \left\{ \frac{\partial q_{vs}}{\partial t} + u \frac{\partial q_{vs}}{\partial x} + v \frac{\partial q_{vs}}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_{vs}}{\partial z^*} + E_r \right\}, \tag{B.53}$$

$$M_{q_v} = \frac{\partial q_{vs}}{\partial t} + u \frac{\partial q_{vs}}{\partial x} + v \frac{\partial q_{vs}}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_{vs}}{\partial z^*} + E_r, \tag{B.54}$$

$$M_{q_c} = - \left( \frac{\partial q_{vs}}{\partial t} + u \frac{\partial q_{vs}}{\partial x} + v \frac{\partial q_{vs}}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_{vs}}{\partial z^*} \right) - A_r - C_r, \tag{B.55}$$

$$M_{q_r} = F_r - E_r + A_r + C_r. \tag{B.56}$$

## 付録 C 乾燥大気における準圧縮モデルの離散化

本章では乾燥大気における準圧縮モデルの離散化について述べる。本数値モデルの離散化の方法は以下のとおりである:

- 空間微分の離散化は中心差分を用いる。変数の配置はスタッガード格子を用いる。
- 時間積分の離散化は、音波に関係する項を短い時間間隔で解き、それ以外の項を長い時間間隔で解く時間分割法を用いる。音波に関係する項のうち、水平方向に対して陽解法を、鉛直方向に対して陰解法を用いる。

### C.1 空間微分の離散化

空間微分は中心差分で離散化する。格子点の構造と変数の配置を図 C.1 と図 C.2 に示す。変数はスタッガードに配置され、水平方向を Arakawa C グリッド、鉛直方向を Lorenz グリッドとした。このとき、すべてのスカラー量 (気圧, 温位, 水蒸気混合比, 雲水混合比, 雨水混合比) は格子ボックスの中心に配置される。ベクトル量の水平成分 (速度  $u, v$ ) は、鉛直方向をスカラー量と同じレベルにして、 $u$  を  $x$  負方向に半格子ずらし、 $v$  を  $y$  負方向に半格子ずらす。ベクトル量の鉛直成分  $w$  は、水平方向をスカラー量と同じ位置にして、 $z$  負方向に半格子ずらす。

また、座標変換に伴うヤコビアン  $G^{1/2}$  および  $G^{13}, G^{23}$  は以下のように配置される。 $G^{1/2}$  は格子ボックスの中心に配置される。 $G^{13}$  は、 $u$  の定義点から  $z$  負方向に半格子ずらした点に配置される。 $G^{23}$  は、 $v$  の定義点からさらに  $z$  負方向に半格子ずらした点に配置される。座標  $x, y, z^*$  についても半格子ずらし、ベクトル量と同じ位置に配置される。

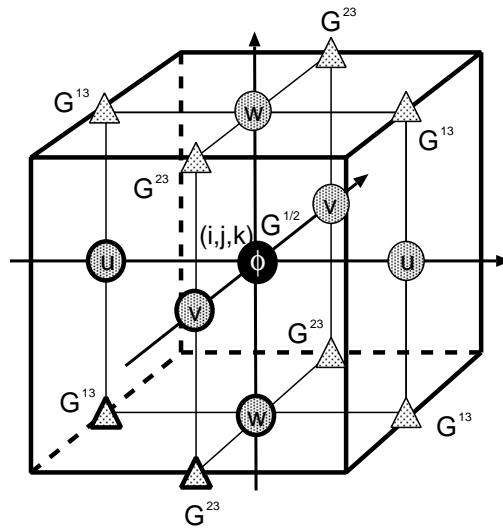


図 C.1:  $(i, j, k)$  番目の格子における変数のスタaggerドな配置図. ベクトル量は半格子ずれ, スカラー量は格子の中心に配置される.

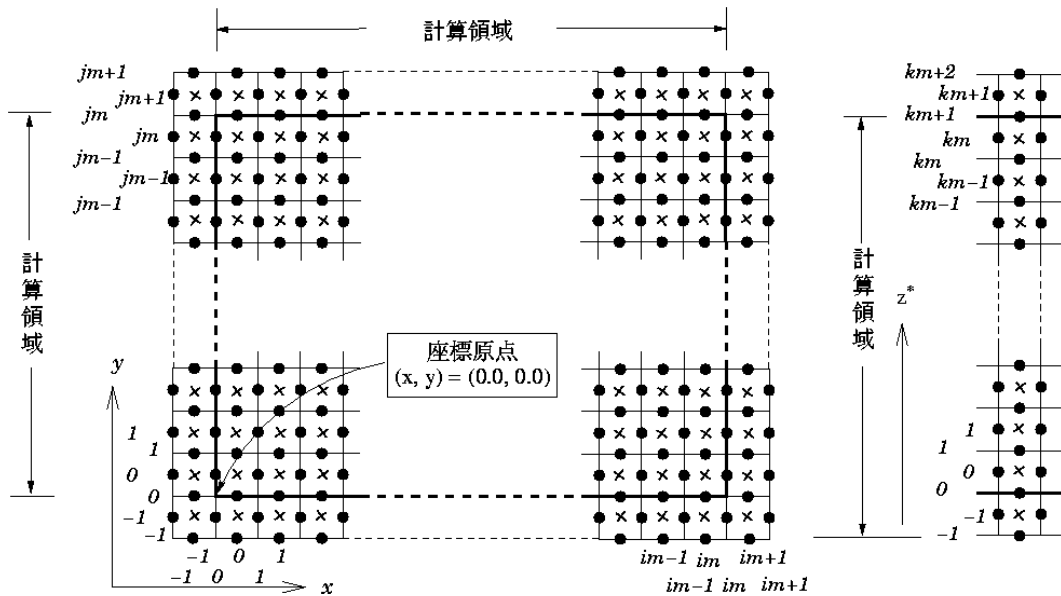


図 C.2: 全計算領域における変数の配置図. 黒丸は半格子ずらしたベクトル量,  $\times$  印はスカラー量の位置を表す. 計算領域の外の格子は境界における微分に必要な格子である.

このようなスタッガード格子を用いる場合、ある位置  $(i, j, k)$  での値を求めるためには平均操作が必要である。この平均化のオペレータを以下のように定義する。

任意のスカラー量の変数  $\phi$  を空間の  $x$  方向 (または  $y, z^*$  方向) に平均する。2 次精度の中心差分に現れる 2 点の平均は、例えば、

$$\overline{\phi}_{i,j,k}^x \equiv \frac{1}{2} \left( \phi_{i-\frac{1}{2},j,k} + \phi_{i+\frac{1}{2},j,k} \right) \quad (\text{C.1})$$

とする。ただし下付添字  $i, j, k$  は側面からそれぞれ  $x, y, z$  方向に  $i, j, k$  番目の格子点であることを表す。

平均化の添字が 2 つある場合、例えば  $x, z^*$  方向の平均化は

$$\overline{\phi}_{i,j,k}^{xz^*} \equiv \frac{1}{4} \left( \phi_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + \phi_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + \phi_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + \phi_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{C.2})$$

とする。

微分オペレータは

$$(\partial_x \phi)_{i,j,k} \equiv \frac{1}{\Delta x} \left( \phi_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k} - \phi_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} \right) \quad (\text{C.3})$$

と定義する。平均化オペレータと同様に、下付添字  $i$  は側面から  $i$  番目の格子点であることを表し、ある方向  $x$  の格子間隔を  $\Delta x$  とする。

2 階の微分オペレータは以下のように定義する:

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 \phi)_{i,j,k} &\equiv \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\phi_{i+\Delta x,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i-\Delta x,j,k}}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i+\Delta x,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i-\Delta x,j,k}). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

直交直線座標での鉛直速度  $w$  と地形に沿う座標系における鉛直速度  $\omega$  を同じ点で定義する:

$$\omega = \overline{u}^{z^*} G^{13^x} + \overline{v}^{z^*} G^{23^y} + \frac{w}{G^{1/2 z^*}}. \quad (\text{C.5})$$

## C.2 時間積分の離散化

大気中には音波、内部重力波やロスビー波が存在する。普通、音波は気象学的に興味がない。数値計算を行う際音波が CFL 条件を決めるため、時間間隔を非常に小

さくしなければならない。計算時間が長い場合、音波に関する項をとそれ以外の項を別の時間間隔で解く時間分割法（またはモード分離時間積分法）で解く。さらに音波に関する項は鉛直方向のみ陰解法（鉛直陰解法）で解く。

時間分割法（図 C.3）では、音波に関係する項  $(u, v, w, \pi)$  を短い時間間隔  $\Delta\tau$  で解き、それ以外の項を長い時間間隔  $\Delta t$  で解く。ただし  $\Delta t$  を  $n$  分割したものを  $\Delta\tau$  とする：

$$\Delta t = n\Delta\tau. \tag{C.6}$$

また、音波を含む方程式中の音波に関係しない項を長い時間間隔で解き、 $t$  から  $t + \Delta t$  までは  $t$  での値（一定値）を用いる。

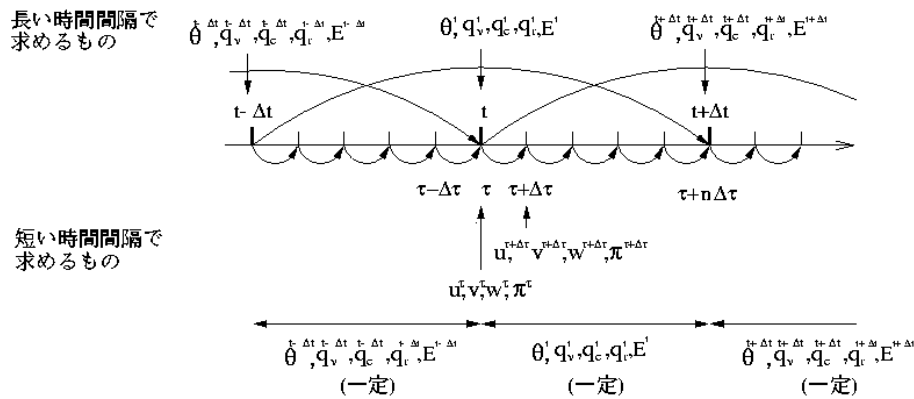


図 C.3: 時間分割法の概念図。音波に関係しない量を長い時間間隔で、音波に関係する量を短い時間間隔で解く。短い時間間隔で解いているとき、音波に関係しない量は一定値である。

### C.3 乾燥大気における基礎方程式系の離散化

予報変数の  $\tau + \Delta\tau, t + \Delta t$  における値を数値的に求めるために、第 2 章に示した基礎方程式系を離散化する。2.3.3 節と 2.3.2 節で述べたように、基礎方程式には計算不安定を抑えるために音波減衰項と数値粘性項を加えてある。

### C.3.1 水平方向の運動方程式

$(i, j, k)$  番目の格子について, 水平方向の運動方程式 (2.29) と (2.30) を陽解法で離散化する. これら方程式中の音波に関する項を短い時間間隔  $\Delta\tau$  で, その他の項を長い時間間隔  $\Delta t$  で離散化する.

式 (2.29) と (2.30) は, それぞれ,

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^{\tau+\Delta\tau} - u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^{\tau}}{\Delta\tau} \\ &= -c_p \bar{\theta} \left[ \left\{ (\partial_x \pi)_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} - \alpha (\partial_x Div)_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} \right\}^{\tau} \right. \\ & \quad \left. + \overline{G^{13}z^*} \left\{ (\partial_{z^*} \bar{\pi}^{xz^*})_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} - \alpha (\partial_{z^*} \overline{Div}^{xz^*})_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} \right\}^{\tau} \right] \\ & \quad - \text{Adv.} u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + \text{Cori.} u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + (Du)_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^{t-\Delta t}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^{\tau+\Delta\tau} - v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^{\tau}}{\Delta\tau} \\ &= -c_p \bar{\theta} \left[ \left\{ (\partial_y \pi)_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k} - \alpha (\partial_x Div)_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k} \right\}^{\tau} \right. \\ & \quad \left. + \overline{G^{23}z^*} \left\{ (\partial_{z^*} \bar{\pi}^{yz^*})_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k} - \alpha (\partial_{z^*} \overline{Div}^{yz^*})_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k} \right\}^{\tau} \right] \\ & \quad - \text{Adv.} v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t + \text{Cori.} v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t + (Dv)_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

と離散化される. ただし

$$\begin{aligned} Div_{i,j,k} &= (\partial_x u)_{i,j,k} + (\partial_y v)_{i,j,k} + \overline{G^{13}z^*}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{i,j,k} \\ & \quad + \overline{G^{23}yz^*}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{i,j,k} + \frac{1}{G_{i,j,k}^{1/2}} (\partial_{z^*} w)_{i,j,k} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

であり, スカラー量と同じ位置にある.

水平方向の運動方程式 (C.7) と (C.8) をそれぞれ数値計算すると,  $u^{\tau+\Delta\tau}$  と  $v^{\tau+\Delta\tau}$  が得られる.

長い時間間隔  $t$  で計算する項を離散化したものは以下ようになる. 前述したように, これらの項は  $t$  から  $t + \Delta t$  までの間,  $t$  における値 (一定値) を用いて計算される. 移流項は

$$\begin{aligned} \text{Adv.}u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t &= (u\partial_x\bar{u}^x)_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + (\bar{v}^{xy}\partial_y\bar{u}^y)_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t \\ &\quad + (\bar{\omega}^{xz*}\partial_{z^*}\bar{u}^{z*})_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + \text{Diff.}u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t, \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \text{Adv.}v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t &= (\bar{u}^{xy}\partial_x\bar{v}^x)_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t + (v\partial_y\bar{v}^y)_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t \\ &\quad + (\bar{\omega}^{yz*}\partial_{z^*}\bar{v}^{z*})_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t + \text{Diff.}v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

数値粘性項は

$$\text{Diff.}u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t = \nu_{2h} \left[ \partial_x^2 u + \partial_y^2 u \right]_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + \nu_{2v} \left[ \partial_{z^*}^2 u \right]_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t, \quad (\text{C.12})$$

$$\text{Diff.}v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t = \nu_{2h} \left[ \partial_x^2 v + \partial_y^2 v \right]_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t + \nu_{2v} \left[ \partial_{z^*}^2 v \right]_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t. \quad (\text{C.13})$$

コリオリ項は

$$\text{Cori.}u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t = \left[ \bar{f}\bar{v}^{yx} \right]_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t, \quad (\text{C.14})$$

$$\text{Cori.}v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t = \left[ \bar{f}\bar{u}^{xy} \right]_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t. \quad (\text{C.15})$$

拡散項 (右辺の下付添字と上付添字  $t - \Delta t$  は省略した) は

$$\begin{aligned} D_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} &= 2\partial_x \left\{ K_m (\partial_x u) + K_m \overline{G^{13}xz^*} (\partial_{z^*}\bar{u}^{z*}) \right\} \\ &\quad + \partial_y \left\{ \overline{K_m^{xy}} (\partial_y u) + \overline{K_m^{xy}} (\partial_x v) + \overline{K_m^{xy}G^{23}xz^*} (\partial_{z^*}\bar{u}^{yz*}) \right. \\ &\quad \quad \left. + \overline{K_m^{xy}G^{13}yz^*} (\partial_{z^*}\bar{v}^{xz*}) \right\} \\ &\quad + 2\overline{G^{13}z^*} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{xz^*}} (\partial_x \bar{u}^{xz*}) + \overline{K_m^{xz^*}G^{13}} (\partial_{z^*}u) \right\} \\ &\quad + \overline{G^{23}xyz^*} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{xz^*}} (\partial_y \bar{u}^{yz*}) + \overline{K_m^{xz^*}} \partial_x \bar{v}^{yz*} \right. \\ &\quad \quad \left. + \overline{K_m^{xz^*}G^{23}xy} (\partial_{z^*}u) + \overline{K_m^{xz^*}G^{13}z^*} (\partial_{z^*}\bar{v}^{xy}) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{G^{1/2}x} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{xz^*}} (\partial_x w) + \frac{\overline{K_m^{xz^*}}}{G^{1/2}xz^*} (\partial_{z^*}u) + \overline{K_m^{xz^*}G^{13}} \partial_{z^*}\bar{w}^{xz^*} \right\} \\ &\quad - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left\{ (\partial_x K_m^2) + \overline{G^{13}z^*} (\partial_{z^*}K_m^2) \right. \\ &\quad \quad + (\partial_y \overline{K_m^2}^{xy}) + \overline{G^{23}xz^*} (\partial_{z^*}\overline{K_m^2}^{yz*}) \\ &\quad \quad \left. + \frac{1}{G^{1/2}x} (\partial_{z^*}\overline{K_m^2}^{xz*}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$



$$\begin{aligned}
 D_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k} = & \partial_x \left\{ \overline{K_m}^{xy} (\partial_x v) + \overline{K_m}^{xy} (\partial_y u) \right. \\
 & \left. + \overline{K_m}^{xy} \overline{G^{23}xz^*} (\partial_{z^*} \overline{u}^{yz^*}) + \overline{K_m}^{xy} \overline{G^{13}yz^*} \partial_{z^*} (\overline{v}^{xz^*}) \right\} \\
 & + 2\partial_y \left\{ K_m (\partial_y v) + K_m \overline{G^{23}yz^*} (\partial_{z^*} \overline{v}^{yz^*}) \right\} \\
 & + \overline{G^{13}xyz^*} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}^{yz^*} (\partial_x \overline{v}^{xz^*}) + \overline{K_m}^{yz^*} (\partial_y \overline{u}^{xz^*}) \right. \\
 & \left. + \overline{K_m}^{yz^*} G^{23} (\partial_{z^*}) \overline{u}^{xy} + \overline{K_m}^{yz^*} \overline{G^{13}xy} (\partial_{z^*} v) \right\} \\
 & + 2\overline{G^{23}z^*} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}^{yz^*} (\partial_y \overline{v}^{yz^*}) + \overline{K_m}^{yz^*} G^{23} (\partial_{z^*} v) \right\} \\
 & - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left\{ (\partial_x \overline{K_m}^{xy}) + \overline{G^{13}yz^*} (\partial_{z^*} \overline{K_m}^{yz^*}) \right. \\
 & \quad \left. + (\partial_y K_m^2) + \overline{G^{23}z^*} (\partial_{z^*} \overline{K_m}^{yz^*}) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{G^{1/2}y} (\partial_{z^*} \overline{K_m}^{yz^*}) \right\}. \tag{C.17}
 \end{aligned}$$

### C.3.2 鉛直方向の運動方程式と圧力方程式

鉛直方向の運動方程式 (2.31) と圧力方程式 (2.33) を陰解法で離散化する。これら方程式中の音波に関する項を短い時間間隔  $\Delta\tau$  で、その他の項を長い時間間隔  $\Delta t$  で離散化する。陰解法で離散化するために、 $w, \pi$  は重み  $\beta (\neq 0)$  をつけて  $\tau$  と  $\tau + \Delta\tau$  で平均をしたものを用いる。本数値モデルでは  $\beta = 1$  とする。

鉛直方向の運動方程式は

$$\begin{aligned}
 & \frac{w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{\tau+\Delta\tau} - w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{\tau}}{\Delta\tau} \\
 & = \alpha \left( \frac{c_p \bar{\theta}}{G^{1/2}z^*} \right)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}} (\partial_{z^*} Div)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{\tau} \\
 & \quad - \left( \frac{c_p \bar{\theta}}{G^{1/2}z^*} \right)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}} \left[ \beta (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{\tau} \right] \\
 & \quad - Adv.w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t + Buoy.w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t + (D_w)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{t-\Delta t}, \tag{C.18}
 \end{aligned}$$

圧力方程式は

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} - \pi_{i,j,k}^{\tau}}{\Delta\tau} &+ \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \left\{ \beta (\partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta} w)_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) (\partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta} w)_{i,j,k}^{\tau} \right\} \\
 &= -\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}} \left[ (\partial_x u)_{i,j,k} + (\partial_y v)_{i,j,k} + \overline{G^{13}}_{i,j,k}^{xz^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{i,j,k} \right. \\
 &\quad \left. + \overline{G^{23}}_{i,j,k}^{yz^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{i,j,k} \right]^{\tau+\Delta\tau} \quad (C.19)
 \end{aligned}$$

となる。

長い時間間隔  $t$  で計算する項について離散化したものを書き下す。移流項は

$$\begin{aligned}
 \text{Adv.} w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t &= (\bar{u}^{xz^*} \partial_x \bar{w}^x)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t + (\bar{v}^{yz^*} \partial_y \bar{w}^y)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t \\
 &\quad + (\omega \partial_{z^*} \bar{w}^{z^*})_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t + \text{Diff.} w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t. \quad (C.20)
 \end{aligned}$$

数値粘性項は

$$\text{Diff.} w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t = \nu_{2h} \left[ \partial_x^2 w + \partial_y^2 w \right]_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t + \nu_{2v} \left[ \partial_{z^*}^2 w \right]_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t. \quad (C.21)$$

浮力項は

$$\text{Buoy.} w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t = g \left[ \frac{\bar{\theta}^{z^*}}{\bar{\theta}} - 1 \right]_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t. \quad (C.22)$$

拡散項 (右辺の下付添字と上付添字  $t - \Delta t$  は省略) は

$$\begin{aligned}
 D_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}} &= \partial_x \left\{ \overline{K_m}^{xz^*} (\partial_x w) + \frac{\overline{K_m}^{xz^*}}{G^{1/2} z^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*}) + \overline{K_m}^{xz^*} G^{13} (\partial_{z^*} \bar{w}^{xz^*}) \right\} \\
 &\quad + \partial_y \left\{ \overline{K_m}^{yz^*} (\partial_y w) + \frac{\overline{K_m}^{yz^*}}{G^{1/2} yz^*} (\partial_{z^*} v) + \overline{K_m}^{yz^*} G^{23} (\partial_{z^*} \bar{w}^{yz^*}) \right\} \\
 &\quad + \overline{G^{13}}^x \partial_{z^*} \left\{ K_m (\partial_x \bar{w}^{xz^*}) + \frac{K_m}{G^{1/2}} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*}) + K_m \overline{G^{13}}^{xz^*} (\partial_{z^*} w) \right\} \\
 &\quad + \overline{G^{23}}^y \partial_{z^*} \left\{ K_m (\partial_y \bar{w}^{yz^*}) + \frac{K_m}{G^{1/2}} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*}) + K_m \overline{G^{23}}^{yz^*} (\partial_{z^*} w) \right\} \\
 &\quad + \frac{2}{G^{1/2} z^*} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2}} (\partial_{z^*} w) \right\} \\
 &\quad - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left\{ (\partial_x \overline{K_m^2}^{xz^*}) + \overline{G^{13}}^x (\partial_{z^*} K_m^2) \right. \\
 &\quad \left. + (\partial_y \overline{K_m^2}^{yz^*}) + \overline{G^{23}}^y (\partial_{z^*} K_m^2) + \frac{1}{G^{1/2} z^*} (\partial_{z^*} K_m^2) \right\} \quad (C.23)
 \end{aligned}$$

式 (C.18) と (C.19) から直接  $w^{\tau+\Delta\tau}$ ,  $\pi^{\tau+\Delta\tau}$  を求めることはできない. これら 2 式を連立して  $w^{\tau+\Delta\tau}$  を消去し,  $\pi^{\tau+\Delta\tau}$  を求め, 式 (C.18) から  $w^{\tau+\Delta\tau}$  を求める.

以下で具体的に連立する. ここからは予報変数毎に格子番号をつけ,  $i, j$  を省略する. また  $w$  と同じ位置にある  $(i, j, k)$  番目の変数を  $w_{w(k)}$  などと表す. 離散化した鉛直方向の運動方程式 (C.18) より,

$$\begin{aligned} w_{w(k)}^{\tau+\Delta\tau} &= w_{w(k)}^\tau \\ &\quad - \left( \frac{c_p \bar{\theta} \Delta\tau}{G^{1/2} z^*} \right)_{w(k)} \left\{ -\alpha (\partial_{z^*} \text{Div})_{w(k)}^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{w(k)}^\tau \right\} \\ &\quad + F \cdot w_{w(k)}^t \Delta\tau - \beta \left( \frac{c_p \bar{\theta} \Delta\tau}{G^{1/2} z^*} \right)_{w(k)} (\partial_{z^*} \pi)_{w(k)}^{\tau+\Delta\tau}, \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

$$F \cdot w_{w(k)}^t = -\text{Adv} \cdot w_{w(k)}^t + \text{Buoy} \cdot w_{w(k)}^t + (D_w)_{w(k)}^{t-\Delta t}. \quad (\text{C.25})$$

離散化した圧力方程式 (D.13) より,

$$\begin{aligned} \pi_k^{\tau+\Delta\tau} &+ \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_k \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta} w) \right\}_k^{\tau+\Delta\tau} \\ &= \pi_k^\tau - (1 - \beta) \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_k \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta} w) \right\}_k^\tau \\ &\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\theta}} \left[ (\partial_x u)_k + (\partial_y v)_k \right. \\ &\quad \left. + \overline{G^{13}}_k^{xz^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_k + \overline{G^{23}}_k^{yz^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_k \right]^{\tau+\Delta\tau} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

である.

(C.24) を代入して  $w^{\tau+\Delta\tau}$  を消去すると,

$$\begin{aligned} \pi_k^{\tau+\Delta\tau} &- \beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_k \left[ \partial_{z^*} \left\{ \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right) (\partial_{z^*} \pi) \right\} \right]_k^{\tau+\Delta\tau} \\ &= \pi_k^\tau - (1 - \beta) \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_k \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta} w) \right\}_k^\tau \\ &\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\theta}} \left[ (\partial_x u)_k + (\partial_y v)_k + \overline{G^{13}}_k^{xz^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_k + \overline{G^{23}}_k^{yz^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_k \right]^{\tau+\Delta\tau} \\ &\quad - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_k \\ &\quad \times \left[ \partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta} \left\{ w^\tau - \left( \frac{c_p \bar{\theta} \Delta\tau}{G^{1/2} z^*} \right) \left\{ -\alpha (\partial_{z^*} \text{Div})^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - F \cdot w^t \Delta\tau \right\} \right]_{w(k)}. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

左辺について  $z^*$  方向の微分をオペレータなしで書き下すと,

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \pi_k^{\tau+\Delta\tau} \\
 &\quad -\beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \right)_k \\
 &\quad \times \frac{1}{\Delta z^*} \left[ \left( \frac{\bar{\rho}\bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k+1)} \frac{1}{\Delta z^*} (\pi_{k+1} - \pi_k) \right. \\
 &\quad \quad \left. - \left( \frac{\bar{\rho}\bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k)} \frac{1}{\Delta z^*} (\pi_k - \pi_{k-1}) \right]^{\tau+\Delta\tau} \\
 &= \pi_k^{\tau+\Delta\tau} \\
 &\quad -\beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^{*2}} \\
 &\quad \times \left[ \left( \frac{\bar{\rho}\bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k+1)} \pi_{k+1} - \left\{ \left( \frac{\bar{\rho}\bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k+1)} + \left( \frac{\bar{\rho}\bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k)} \right\} \pi_k \right. \\
 &\quad \quad \left. + \left( \frac{\bar{\rho}\bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k)} \pi_{k-1} \right]^{\tau+\Delta\tau}. \tag{C.28}
 \end{aligned}$$

本数値モデルにおける上部と下部の境界条件は, それぞれ

$$\omega = 0 \quad (z^* = H; k = km + 1), \tag{C.29}$$

$$\omega = u \frac{\partial z_s}{\partial x} + v \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (z^* = 0; k = 0) \tag{C.30}$$

とする. 上部境界における鉛直方向の運動方程式を離散化したものは

$$\begin{aligned}
 \beta (\partial_{z^*} \pi)_{w(km+1)}^{\tau+\Delta\tau} &= \alpha (\partial_{z^*} Div)_{w(km+1)}^{\tau} - (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{w(km+1)}^{\tau} \\
 &\quad + \left( \frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}} F \cdot w^t \right)_{w(km+1)}. \tag{C.31}
 \end{aligned}$$

このときの圧力方程式は

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \pi_{km}^{\tau+\Delta\tau} \\
 &\quad + \beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left[ \left( \frac{\bar{\rho}\bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(km)} (\pi_{km} - \pi_{km-1}) \right]^{\tau+\Delta\tau}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) &= \pi_{km}^\tau - (1 - \beta) \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{km} \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta} w) \right\}_{km}^\tau \\
 &\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}} \left[ (\partial_x u)_{km} + (\partial_y v)_{km} \right. \\
 &\quad \quad \left. + \overline{G^{13}}_{km}^{xz^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{km} + \overline{G^{23}}_{km}^{yz^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{km} \right]^{\tau + \Delta \tau} \\
 &\quad - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{km} \\
 &\quad \times \left[ \partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta} \left\{ w^\tau - \left( \frac{c_p \bar{\theta} \Delta \tau}{G^{1/2} z^*} \right) \{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \} \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - F \cdot w^t \Delta \tau \right\} \right]_{km} \\
 &\quad + \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^*} \left( \frac{c_p \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(km+1)} \\
 &\quad \times \left\{ \alpha (\partial_{z^*} Div)_{w(km+1)}^\tau - (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{w(km+1)}^\tau \right. \\
 &\quad \quad \left. + \left( \frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}} F \cdot w^t \right)_{w(km+1)} \right\} \quad (C.32)
 \end{aligned}$$

である。また、下部境界における鉛直方向の運動方程式を離散化したものは

$$\begin{aligned}
 \beta (\partial_{z^*} \pi)_{w(0)}^{\tau + \Delta \tau} &= \alpha (\partial_{z^*} Div)_{w(0)}^\tau - (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{w(0)}^\tau \\
 &\quad + \left( \frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}} F \cdot w^t \right)_{w(0)} . \quad (C.33)
 \end{aligned}$$

このときの圧力方程式は

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \pi_0^{\tau + \Delta \tau} \\
 &\quad - \beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_0 \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left[ \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(1)} (\pi_1 - \pi_0) \right]^{\tau + \Delta \tau}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) &= \pi_0^\tau - (1 - \beta) \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_0 \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta} w) \right\}_0^\tau \\
 &\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}} \left[ (\partial_x u)_0 + (\partial_y v)_0 \right. \\
 &\quad \quad \left. + \overline{G^{13}}_0^{xz^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_1 + \overline{G^{23}}_0^{yz^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_0 \right]^{\tau + \Delta \tau} \\
 &\quad - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_0 \\
 &\quad \times \left[ \partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta} \left\{ w^\tau - \left( \frac{c_p \bar{\theta} \Delta \tau}{G^{1/2} z^*} \right) \{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \} \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - F \cdot w^t \Delta \tau \right\} \right]_0 \\
 &\quad - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^*} \left( \frac{c_p \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(0)} \\
 &\quad \times \left\{ \alpha (\partial_{z^*} Div)_{w(0)}^\tau - (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{w(0)}^\tau + \left( \frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}} F \cdot w^t \right)_{w(0)} \right\} \quad (\text{C.34})
 \end{aligned}$$

である。

これらの式は以下のように行列を用いてまとめて書くことができる：

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & & 0 \\ C_0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & B_{km-1} \\ 0 & & C_{km-1} & A_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_0 & \cdots & \pi_0 \\ \pi_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \pi_{km} & \cdots & \cdots & \pi_{km} \end{pmatrix}^{\tau + \Delta \tau} \\
 &= \begin{pmatrix} D_0 & D_0 & \cdots & D_0 \\ D_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{km} & \cdots & \cdots & D_{km} \end{pmatrix}^\tau. \quad (\text{C.35})
 \end{aligned}$$

この連立 1 次方程式の係数行列は 3 項行列なので、LU 分解を行って計算すると大幅に計算量を減らすことができる。こうして求められた  $\pi^{\tau + \Delta \tau}$  と鉛直方向の運動方程式 (C.18) から  $w^{\tau + \Delta \tau}$  を求める。ただし

$$\begin{aligned}
 A_k &= 1 + \beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left\{ \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k+1)} + \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k)} \right\}, \\
 &\quad (k = 1, 3, \dots, km - 1), \\
 A_0 &= 1 + \beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_0 \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(1)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{km} &= 1 + \beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(km)}, \\
 B_k &= -\beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k+1)}, \\
 C_k &= -\beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{k+1} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k+1)}, \tag{C.36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_k &= \pi_k^\tau - (1 - \beta) \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_k \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta} w) \right\}_k^\tau \\
 &\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}} \left[ (\partial_x u)_k + (\partial_y v)_k + \overline{G^{13}{}^{xz^*}}_k (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_k \right. \\
 &\quad \quad \left. + \overline{G^{23}{}^{yz^*}}_k (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_k \right]_{k}^{\tau + \Delta \tau} \\
 &\quad - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_k \\
 &\quad \times \left[ \partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta} \left\{ w^\tau - \left( \frac{c_p \bar{\theta} \Delta \tau}{G^{1/2} z^*} \right) \left\{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \right\} \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - F \cdot w^t \Delta \tau \right\} \right]_k, \\
 &\quad (k = 1, 3, \dots, km - 3), \tag{C.37}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_0 &= \pi_0^\tau - (1 - \beta) \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_0 \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta} w) \right\}_0^\tau \\
 &\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}} \left[ (\partial_x u)_0 + (\partial_y v)_0 \right. \\
 &\quad \quad \left. + \overline{G^{13}{}^{xz^*}}_0 (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_0 + \overline{G^{23}{}^{yz^*}}_1 (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_0 \right]_{0}^{\tau + \Delta \tau} \\
 &\quad - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_0 \\
 &\quad \times \left[ \partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta} \left\{ w^\tau - \left( \frac{c_p \bar{\theta} \Delta \tau}{G^{1/2} z^*} \right) \left\{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \right\} \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - F \cdot w^t \Delta \tau \right\} \right]_0 \\
 &\quad - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_0 \frac{1}{\Delta z^*} \left( \frac{c_p \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(0)} \\
 &\quad \times \left\{ \alpha (\partial_{z^*} Div)_{w(0)}^\tau - (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{w(0)}^\tau + \left( \frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}} F \cdot w^t \right)_{w(0)} \right\}, \tag{C.38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{km-2} = & \pi_{km-2}^\tau - (1 - \beta) \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{km-2} \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta} w) \right\}_{km-2}^\tau \\
 & - \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}} \left[ (\partial_x u)_{km-2} + (\partial_y v)_{km-2} \right. \\
 & \quad \left. + \overline{G^{13} x z^*}_{km} (\partial_{z^*} \bar{u}^{x z^*})_{km-2} + \overline{G^{23} y z^*}_{km} (\partial_{z^*} \bar{v}^{y z^*})_{km-2} \right]^{\tau + \Delta \tau} \\
 & - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{km-2} \\
 & \times \left[ \partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta} \left\{ w^\tau - \left( \frac{c_p \bar{\theta} \Delta \tau}{G^{1/2} z^*} \right) \left\{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \right\} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - F \cdot w^t \Delta \tau \right\} \right]_{km-2} \\
 & + \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{km-2} \frac{1}{\Delta z^*} \left( \frac{c_p \bar{\theta}^2}{G^{1/2}} \right)_{w(km-1)} \\
 & \times \left\{ \alpha (\partial_{z^*} Div)_{w(km-1)}^\tau - (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{w(km-1)}^\tau \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}} F \cdot w^t \right)_{w(km-1)} \right\} \quad (C.39)
 \end{aligned}$$

### C.3.3 熱力学の式

熱力学の式 (2.34) を中心差分で離散化する。時間間隔は長い時間間隔  $\Delta t$  である。本節では変数の下付添字  $i, j, k$  を省略する。

熱力学の式は

$$\frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = -\text{Adv} \cdot \theta^t + D_\theta^{t-\Delta t}. \quad (C.40)$$

となる。

前節までに求めた  $u^{\tau+\Delta\tau}$ ,  $v^{\tau+\Delta\tau}$ ,  $w^{\tau+\Delta\tau}$  および  $\pi^{\tau+\Delta\tau}$  を用いると  $\theta^{\tau+\Delta\tau}$  を求めることができる。2.3.4 節で述べたように計算モードを抑えるため、Asselin (1972) の時間フィルタを用いる。

上式 (C.40) 中の各項は以下のように離散化される; 移流項は

$$\text{Adv} \cdot \theta^t = \left[ \overline{u \partial_x \theta^x} + \overline{v \partial_y \theta^y} + \overline{\omega \partial_{z^*} \theta^{z^*}} \right]^t + \text{Diff} \cdot \theta^t. \quad (C.41)$$



数値粘性項は

$$\text{Diff.}\theta^t = \nu_{2h} \left[ \partial_x^2 \theta + \partial_y^2 \theta \right]^t + \nu_{2v} \left[ \partial_{z^*}^2 \theta \right]^t. \quad (\text{C.42})$$

拡散項は

$$\begin{aligned} D_\theta^{t-\Delta t} = & 3\partial_x \left\{ \overline{K_m^x} (\partial_x \theta) + \overline{K_m^x G^{13z^*}} (\partial_{z^*} \overline{\theta^{xz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\ & + 3\partial_y \left\{ \overline{K_m^y} (\partial_y \theta) + \overline{K_m^y G^{23z^*}} (\partial_{z^*} \overline{\theta^{yz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\ & + 3\overline{G^{13xz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_x \overline{\theta^{xz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{13x}} (\partial_{z^*} \theta) \right\}^{t-\Delta t} \\ & + 3\overline{G^{23yz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_y \overline{\theta^{yz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{23y}} (\partial_{z^*} \theta) \right\}^{t-\Delta t} \\ & + \frac{3}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2z^*}} (\partial_{z^*} \theta) \right\}^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

となる.

### C.3.4 サブグリッドスケールの乱流運動エネルギー方程式

サブグリッドスケールの乱流運動エネルギー方程式を運動量渦拡散係数で書き換えた式 (B.52) は長い時間間隔  $t$  で計算される. ここでは変数の下付添字  $i, j, k$  は省略する.

$$\begin{aligned}
 \frac{K_m^{t+\Delta t} - K_m^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = & -\text{Adv}.K_m^t + \frac{3gC_m^2 l^2}{2G^{1/2}\bar{\theta}} \left(-\partial_{z^*}\bar{\theta}^{z^*}\right)^t \\
 & + C_m^2 l^2 \left\{ \left(\partial_x u + \overline{G^{13}xz^*} \partial_{z^*}\bar{u}^{xz^*}\right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left(\partial_y v + \overline{G^{23}yz^*} \partial_{z^*}\bar{v}^{yz^*}\right)^2 + \left(\frac{1}{G^{1/2}}\partial_{z^*}w\right)^2 \right\}^t \\
 & + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left\{ \left(\partial_x \bar{v}^{xy} + \partial_y \bar{u}^{xy} + \overline{G^{13}xz^*} \partial_{z^*}\bar{v}^{yz^*} + \overline{G^{23}yz^*} \partial_{z^*}\bar{u}^{xz^*}\right)^2 \right. \\
 & \quad + \left(\partial_x w + \overline{G^{13}xz^*} \partial_{z^*}w + \frac{1}{G^{1/2}}\partial_{z^*}\bar{u}^{xz^*}\right)^2 \\
 & \quad \left. + \left(\partial_y \bar{w}^{yz^*} + \overline{G^{23}yz^*} \partial_{z^*}w + \frac{1}{G^{1/2}}\partial_{z^*}\bar{v}^{yz^*}\right)^2 \right\}^t \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \partial_x^2 K_m^2 + \partial_x \left(\overline{G^{13}z^*} \partial_{z^*} \overline{K_m^2}^{xz^*}\right) \right. \\
 & \quad + \partial_{z^*} \left(\overline{G^{13}x} \partial_x \overline{K_m^2}^{xz^*}\right) + \overline{G^{13}xz^*} \partial_{z^*} \left(\overline{G^{13}x} \partial_{z^*} K_m^2\right) \\
 & \quad + \partial_y^2 K_m^2 + \partial_y \left(\overline{G^{23}z^*} \partial_{z^*} \overline{K_m^2}^{yz^*}\right) \\
 & \quad + \partial_{z^*} \left(\overline{G^{23}y} \partial_y \overline{K_m^2}^{yz^*}\right) + \overline{G^{23}yz^*} \partial_{z^*} \left(\overline{G^{23}y} \partial_{z^*} K_m^2\right) \\
 & \quad \left. + \frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left(\frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} K_m^2\right) \right\}^t \\
 & + \left\{ \left(\partial_x \overline{K_m^2}^x + \overline{G^{13}xz^*} \partial_{z^*} \overline{K_m^2}^{z^*}\right)^2 \right. \\
 & \quad + \left(\partial_y \overline{K_m^2}^y + \overline{G^{23}yz^*} \partial_{z^*} \overline{K_m^2}^{z^*}\right)^2 \\
 & \quad \left. + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \overline{K_m^2}^{z^*}\right)^2 \right\}^t \\
 & - \frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2} K_m^2 \tag{C.44}
 \end{aligned}$$

となる。移流項と数値粘性項はそれぞれ以下のようになる：

$$\text{Adv}.K_m^t = \left[ \overline{u \partial_x K_m^2} + \overline{v \partial_y K_m^2} + \overline{\omega \partial_{z^*} K_m^2} \right]^t + \text{Diff}.K_m^t, \tag{C.45}$$

$$\text{Diff}.K_m^t = \nu_{2h} \left[ \partial_x^2 K_m^2 + \partial_y^2 K_m^2 \right]^t + \nu_{2v} \left[ \partial_{z^*}^2 K_m^2 \right]^t. \tag{C.46}$$

## 付録D 湿潤大気における準圧縮モデルの離散化

本章では湿潤大気における基礎方程式系の離散化の方法について述べる。ここでの離散化の方法は以下のとおりである:

- 空間微分の離散化は中心差分を用いる。変数の配置はスタッガード格子を用いる。
- 時間積分の離散化は、音波に関係する項を短い時間間隔で解き、それ以外の項を長い時間間隔で解く時間分割法を用いる。音波に関係する項のうち、水平方向に対して陽解法を、鉛直方向に対して陰解法を用いる。

### D.1 空間微分の離散化

湿潤大気についての空間微分の離散化は、乾燥大気の場合と同様なので、C.1節を参照のこと。

### D.2 時間積分の離散化

湿潤大気についての時間積分の離散化は、乾燥大気の場合と同様なので、C.2節を参照のこと。

---

### D.3 湿潤大気における基礎方程式系の離散化

予報変数の  $\tau + \Delta\tau, t + \Delta t$  での値を求めるために、付録 B 章で求めた湿潤大気における基礎方程式系を離散化する。2.3.3 節と 2.3.2 節で述べたように、基礎方程式には計算不安定を抑えるために音波減衰項と数値粘性項を加えてある。

#### D.3.1 水平方向の運動方程式

$(i, j, k)$  番目の格子について、水平方向の運動方程式 (B.37) と (B.38) を陽解法で離散化する。これら方程式中の音波に関する項は、短い時間間隔  $\Delta\tau$  で離散化される。

式 (B.37) と (B.38) は、それぞれ、

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^{\tau+\Delta\tau} - u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^{\tau}}{\Delta\tau} \\ &= -c_p \bar{\theta}_v \left[ \left\{ (\partial_x \pi)_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} - \alpha (\partial_x Div)_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} \right\}^{\tau} \right. \\ & \quad \left. + \overline{G^{13}z^*} \left\{ (\partial_{z^*} \bar{\pi}^{xz^*})_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} - \alpha (\partial_{z^*} \overline{Div}^{xz^*})_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} \right\}^{\tau} \right] \\ & \quad - \text{Adv.} u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + \text{Cori.} u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + (Du)_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^{t-\Delta t}, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^{\tau+\Delta\tau} - v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^{\tau}}{\Delta\tau} \\ &= -c_p \bar{\theta}_v \left[ \left\{ (\partial_y \pi)_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k} - \alpha (\partial_x Div)_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k} \right\}^{\tau} \right. \\ & \quad \left. + \overline{G^{23}z^*} \left\{ (\partial_{z^*} \bar{\pi}^{yz^*})_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k} - \alpha (\partial_{z^*} \overline{Div}^{yz^*})_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k} \right\}^{\tau} \right] \\ & \quad - \text{Adv.} v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t + \text{Cori.} v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t + (Dv)_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

と離散化される。ただし

$$\begin{aligned} Div_{i,j,k} &= (\partial_x u)_{i,j,k} + (\partial_y v)_{i,j,k} + \overline{G^{13}z^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{i,j,k} \\ & \quad + \overline{G^{23}yz^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{i,j,k} + \frac{1}{G_{i,j,k}^{1/2}} (\partial_{z^*} w)_{i,j,k} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

であり、スカラー量と同じ位置にある。

水平方向の運動方程式 (D.1) と (D.2) を計算すると,  $u^{\tau+\Delta\tau}$  と  $v^{\tau+\Delta\tau}$  が得られる.

長い時間間隔  $t$  で計算する項を離散化したものは以下ようになる. 前述したように, これらの項は  $t$  から  $t + \Delta t$  までの間,  $t$  における値 (一定値) を用いて計算される. 移流項は

$$\begin{aligned} \text{Adv.}u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t &= (u\partial_x\bar{u}^x)_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + (\bar{v}^{xy}\partial_y\bar{u}^y)_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t \\ &\quad + (\bar{\omega}^{xz^*}\partial_{z^*}\bar{u}^{z^*})_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + \text{Diff.}u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned} \text{Adv.}v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t &= (\bar{u}^{xy}\partial_x\bar{v}^x)_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t + (v\partial_y\bar{v}^y)_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t \\ &\quad + (\bar{\omega}^{yz^*}\partial_{z^*}\bar{v}^{z^*})_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t + \text{Diff.}v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

数値粘性項は

$$\text{Diff.}u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t = \nu_{2h} [\partial_x^2 u + \partial_y^2 u]_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + \nu_{2v} [\partial_{z^*}^2 u]_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t, \quad (\text{D.6})$$

$$\text{Diff.}v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t = \nu_{2h} [\partial_x^2 v + \partial_y^2 v]_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t + \nu_{2v} [\partial_{z^*}^2 v]_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t. \quad (\text{D.7})$$

コリオリ項は

$$\text{Cori.}u_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t = [\overline{f\bar{v}^y}^x]_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k}^t, \quad (\text{D.8})$$

$$\text{Cori.}v_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t = [\overline{f\bar{u}^x}^y]_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k}^t. \quad (\text{D.9})$$

拡散項 (右辺の下付添字と上付添字  $t - \Delta t$  は省略した) は

$$\begin{aligned}
 D_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} = & 2\partial_x \left\{ K_m (\partial_x u) + K_m \overline{G^{13}{}^{xz^*}} (\partial_{z^*} \overline{u}^{xz^*}) \right\} \\
 & + \partial_y \left\{ \overline{K_m}{}^{xy} (\partial_y u) + \overline{K_m}{}^{xy} (\partial_x v) + \overline{K_m}{}^{xy} \overline{G^{23}{}^{xz^*}} (\partial_{z^*} \overline{u}^{yz^*}) \right. \\
 & \quad \left. + \overline{K_m}{}^{xy} \overline{G^{13}{}^{yz^*}} (\partial_{z^*} \overline{v}^{xz^*}) \right\} \\
 & + 2\overline{G^{13}{}^{z^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}{}^{xz^*} (\partial_x \overline{u}^{xz^*}) + \overline{K_m}{}^{xz^*} G^{13} (\partial_{z^*} u) \right\} \\
 & + \overline{G^{23}{}^{xyz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}{}^{xz^*} (\partial_y \overline{u}^{yz^*}) + \overline{K_m}{}^{xz^*} \partial_x \overline{v}^{yz^*} \right. \\
 & \quad \left. + \overline{K_m}{}^{xz^*} \overline{G^{23}{}^{xy}} (\partial_{z^*} u) + \overline{K_m}{}^{xz^*} \overline{G^{13}{}^{z^*}} (\partial_{z^*} \overline{v}^{xy}) \right\} \\
 & + \frac{1}{G^{1/2}{}^x} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}{}^{xz^*} (\partial_x w) + \frac{\overline{K_m}{}^{xz^*}}{G^{1/2}{}^{xz^*}} (\partial_{z^*} u) + \overline{K_m}{}^{xz^*} G^{13} \partial_{z^*} \overline{w}^{xz^*} \right\} \\
 & - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left\{ (\partial_x K_m^2) + \overline{G^{13}{}^{z^*}} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{xz^*}) \right. \\
 & \quad + (\partial_y \overline{K_m}{}^{xy}) + \overline{G^{23}{}^{xz^*}} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{yz^*}) \\
 & \quad \left. + \frac{1}{G^{1/2}{}^x} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{xz^*}) \right\}, \tag{D.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{i,j-\frac{\Delta y}{2},k} = & \partial_x \left\{ \overline{K_m}{}^{xy} (\partial_x v) + \overline{K_m}{}^{xy} (\partial_y u) \right. \\
 & \quad \left. + \overline{K_m}{}^{xy} \overline{G^{23}{}^{xz^*}} (\partial_{z^*} \overline{u}^{yz^*}) + \overline{K_m}{}^{xy} \overline{G^{13}{}^{yz^*}} \partial_{z^*} (\overline{v}^{xz^*}) \right\} \\
 & + 2\partial_y \left\{ K_m (\partial_y v) + K_m \overline{G^{23}{}^{yz^*}} (\partial_{z^*} \overline{v}^{yz^*}) \right\} \\
 & + \overline{G^{13}{}^{xyz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}{}^{yz^*} (\partial_x \overline{v}^{xz^*}) + \overline{K_m}{}^{yz^*} (\partial_y \overline{u}^{xz^*}) \right. \\
 & \quad \left. + \overline{K_m}{}^{yz^*} G^{23} (\partial_{z^*}) \overline{u}^{xy} + \overline{K_m}{}^{yz^*} \overline{G^{13}{}^{xy}} (\partial_{z^*} v) \right\} \\
 & + 2\overline{G^{23}{}^{z^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}{}^{yz^*} (\partial_y \overline{v}^{yz^*}) + \overline{K_m}{}^{yz^*} G^{23} (\partial_{z^*} v) \right\} \\
 & - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left\{ (\partial_x \overline{K_m}{}^{xy}) + \overline{G^{13}{}^{yz^*}} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{yz^*}) \right. \\
 & \quad + (\partial_y K_m^2) + \overline{G^{23}{}^{z^*}} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{yz^*}) \\
 & \quad \left. + \frac{1}{G^{1/2}{}^y} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{yz^*}) \right\}. \tag{D.11}
 \end{aligned}$$

### D.3.2 鉛直方向の運動方程式と圧力方程式

鉛直方向の運動方程式 (B.39) と圧力方程式 (B.41) を陰解法で離散化する。これら方程式は短い時間間隔  $\Delta\tau$  で離散化される。鉛直陰解法では  $w, \pi$  は重み  $\beta (\neq 0)$  をつけて  $\tau$  と  $\tau + \Delta\tau$  で平均をしたものを用いる。

鉛直方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{\tau+\Delta\tau} - w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{\tau}}{\Delta\tau} \\ &= \alpha \left( \frac{c_p \bar{\theta}_v}{G^{1/2} z^*} \right)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}} (\partial_{z^*} \text{Div})_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{\tau} \\ & \quad - \left( \frac{c_p \bar{\theta}_v}{G^{1/2} z^*} \right)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}} \left[ \beta (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{\tau} \right] \\ & \quad - \text{Adv.} w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t + \text{Buoy.} w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t + (D_w)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^{t-\Delta t}, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

圧力方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{\pi_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} - \pi_{i,j,k}^{\tau}}{\Delta\tau} + \frac{1}{G^{1/2} c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \left\{ \beta (\partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta}_v w)_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) (\partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta}_v w)_{i,j,k}^{\tau} \right\} \\ &= -\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}_v} \left[ (\partial_x u)_{i,j,k} + (\partial_y v)_{i,j,k} + \overline{G^{13} z^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{i,j,k} \right. \\ & \quad \left. + \overline{G^{23} y z^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{i,j,k} \right]^{\tau+\Delta\tau} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

となる。

長い時間間隔  $t$  で計算する項について離散化したものを書き下す。移流項は

$$\begin{aligned} \text{Adv.} w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t &= \left( \bar{u}^{xz^*} \partial_x \bar{w}^x \right)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t + \left( \bar{v}^{yz^*} \partial_y \bar{w}^y \right)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t \\ & \quad + \left( \omega \partial_{z^*} \bar{w}^{z^*} \right)_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t + \text{Diff.} w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

数値粘性項は

$$\text{Diff.} w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t = \nu_{2h} \left[ \partial_x^2 w + \partial_y^2 w \right]_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t + \nu_{2v} \left[ \partial_{z^*}^2 w \right]_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t. \quad (\text{D.15})$$

浮力項は

$$\text{Buoy.} w_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t = g \left[ \frac{\bar{\theta}^{z^*}}{\bar{\theta}} - 1 + 0.61 \left( \bar{q}_v^{z^*} - \bar{q}_v^{z^*} \right) - \bar{q}_c^{z^*} - \bar{q}_r^{z^*} \right]_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}^t. \quad (\text{D.16})$$

拡散項 (右辺の下付添字と上付添字  $t - \Delta t$  は省略) は

$$\begin{aligned}
 D_{i,j,k-\frac{\Delta z^*}{2}} &= \partial_x \left\{ \overline{K_m}^{xz^*} (\partial_x w) + \frac{\overline{K_m}^{xz^*}}{G^{1/2} z^*} (\partial_{z^*} \overline{u}^{xz^*}) + \overline{K_m}^{xz^*} G^{13} (\partial_{z^*} \overline{w}^{xz^*}) \right\} \\
 &+ \partial_y \left\{ \overline{K_m}^{yz^*} (\partial_y w) + \frac{\overline{K_m}^{yz^*}}{G^{1/2} yz^*} (\partial_{z^*} v) + \overline{K_m}^{yz^*} G^{23} (\partial_{z^*} \overline{w}^{yz^*}) \right\} \\
 &+ \overline{G^{13} x} \partial_{z^*} \left\{ K_m (\partial_x \overline{w}^{xz^*}) + \frac{K_m}{G^{1/2}} (\partial_{z^*} \overline{u}^{xz^*}) + K_m \overline{G^{13} xz^*} (\partial_{z^*} w) \right\} \\
 &+ \overline{G^{23} y} \partial_{z^*} \left\{ K_m (\partial_y \overline{w}^{yz^*}) + \frac{K_m}{G^{1/2}} (\partial_{z^*} \overline{v}^{yz^*}) + K_m \overline{G^{23} yz^*} (\partial_{z^*} w) \right\} \\
 &+ \frac{2}{G^{1/2} z^*} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2}} (\partial_{z^*} w) \right\} \\
 &- \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left\{ (\partial_x \overline{K_m}^{xz^*}) + \overline{G^{13} x} (\partial_{z^*} K_m^2) \right. \\
 &\quad \left. + (\partial_y \overline{K_m}^{yz^*}) + \overline{G^{23} y} (\partial_{z^*} K_m^2) + \frac{1}{G^{1/2} z^*} (\partial_{z^*} K_m^2) \right\} \quad (D.17)
 \end{aligned}$$

式 (D.12) と (D.13) から直接  $w^{\tau+\Delta\tau}$ ,  $\pi^{\tau+\Delta\tau}$  を求めることはできない。これらの式を連立して  $w^{\tau+\Delta\tau}$  を消去し,  $\pi^{\tau+\Delta\tau}$  を求める。次に式 (D.12) から  $w^{\tau+\Delta\tau}$  を求める。連立の方法は乾燥大気の場合と同様なので省略する。圧力に関する行列は以下のようなになる:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & & 0 \\ C_0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & B_{km-1} \\ 0 & & C_{km-1} & A_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_0 & \cdots & \pi_0 \\ \pi_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \pi_{km} & \cdots & \cdots & \pi_{km} \end{pmatrix}^{\tau+\Delta\tau} \\
 &= \begin{pmatrix} D_0 & D_0 & \cdots & D_0 \\ D_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{km} & \cdots & \cdots & D_{km} \end{pmatrix}^{\tau} \cdot \quad (D.18)
 \end{aligned}$$

この連立 1 次方程式の係数行列は 3 項行列なので, LU 分解を行って計算すると大幅に計算量を減らすことができる。こうして求められた  $\pi^{\tau+\Delta\tau}$  と鉛直方向の運動方程式 (D.12) から  $w^{\tau+\Delta\tau}$  を求める。  $A_n, B_n, C_n (n = 0, 1, \dots, n)$  は以下のようにある:

$$A_k = 1 + \beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left\{ \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k+1)} + \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k)} \right\} \quad (D.19)$$

$$(k = 1, 3, \dots, km - 1) \quad (D.20)$$



$$A_0 = 1 + \beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_0 \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{w(1)}, \quad (\text{D.21})$$

$$A_{km} = 1 + \beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{w(km)}, \quad (\text{D.22})$$

$$B_k = -\beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k+1)}, \quad (\text{D.23})$$

$$C_k = -\beta^2 \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{k+1} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left( \frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{w(k+1)}, \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} D_k = & \pi_k^\tau - (1 - \beta) \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w) \right\}_k^\tau \\ & - \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}_v} \left[ (\partial_x u)_k + (\partial_y v)_k + \overline{G^{13}}_k^{xz^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_k \right. \\ & \quad \left. + \overline{G^{23}}_k^{yz^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_k \right]_{k}^{\tau + \Delta \tau} \\ & - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \\ & \times \left[ \partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \left( \frac{c_p \bar{\theta}_v \Delta \tau}{G^{1/2} z^*} \right) \{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - F \cdot w^t \Delta \tau \right\} \right]_k, \\ & (k = 1, 3, \dots, km - 3), \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

$$\begin{aligned}
 D_0 = & \pi_0^\tau - (1 - \beta) \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_0 \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w) \right\}_0^\tau \\
 & - \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}_v} \left[ (\partial_x u)_0 + (\partial_y v)_0 \right. \\
 & \quad \left. + \overline{G^{13}}_0^{xz^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_0 + \overline{G^{23}}_1^{yz^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_0 \right]^{\tau + \Delta \tau} \\
 & - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_0 \\
 & \times \left[ \partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \left( \frac{c_p \bar{\theta}_v \Delta \tau}{G^{1/2} z^*} \right) \left\{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \right\} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - F \cdot w^t \Delta \tau \right\} \right]_0 \\
 & - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_0 \frac{1}{\Delta z^*} \left( \frac{c_p \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{w(0)} \\
 & \times \left\{ \alpha (\partial_{z^*} Div)_{w(0)}^\tau - (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{w(0)}^\tau + \left( \frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}_v} F \cdot w^t \right)_{w(0)} \right\}, \quad (D.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{km-2} = & \pi_{km-2}^\tau - (1 - \beta) \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km-2} \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w) \right\}_{km-2}^\tau \\
 & - \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}_v} \left[ (\partial_x u)_{km-2} + (\partial_y v)_{km-2} \right. \\
 & \quad \left. + \overline{G^{13}}_{km}^{xz^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{km-2} + \overline{G^{23}}_{km}^{yz^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{km-2} \right]^{\tau + \Delta \tau} \\
 & - \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km-2} \\
 & \times \left[ \partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \left( \frac{c_p \bar{\theta}_v \Delta \tau}{G^{1/2} z^*} \right) \left\{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \right\} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - F \cdot w^t \Delta \tau \right\} \right]_{km-2} \\
 & + \beta \left( \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km-2} \frac{1}{\Delta z^*} \left( \frac{c_p \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{w(km-1)} \\
 & \times \left\{ \alpha (\partial_{z^*} Div)_{w(km-1)}^\tau - (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{w(km-1)}^\tau \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}_v} F \cdot w^t \right)_{w(km-1)} \right\} \quad (D.27)
 \end{aligned}$$

### D.3.3 熱力学の式と混合比の方程式

熱力学の式 (B.42) と水蒸気・雲水および雨水の混合比の方程式 (B.43) ~ (B.45) を中央差分で離散化する。時間間隔は長い時間間隔  $\Delta t$  である。本節では変数の下付添字  $i, j, k$  を省略する。

熱力学の式は

$$\frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = -\text{Adv.}\theta^t + M_\theta^t + D_\theta^{t-\Delta t}. \quad (\text{D.28})$$

水蒸気混合比の方程式は

$$\frac{q_v^{t+\Delta t} - q_v^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = -\text{Adv.}q_v^t + M_{q_v}^t + D_{q_v}^{t-\Delta t}. \quad (\text{D.29})$$

ここでは過飽和がない場合を考える。求めた水蒸気の混合比と飽和混合比の値が  $q_v^{t+\Delta t} > q_{vs}^{t+\Delta t}$  となった場合、湿潤飽和調節法 (D.4 参照) を用いる。

雲水混合比の方程式は

$$\frac{q_c^{t+\Delta t} - q_c^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = -\text{Adv.}q_c^t + M_{q_c}^t + D_{q_c}^{t-\Delta t}, \quad (\text{D.30})$$

雨水混合比の方程式は

$$\frac{q_r^{t+\Delta t} - q_r^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = -\text{Adv.}q_r^t + M_{q_r}^t + D_{q_r}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.31})$$

となる。

これまでに求めた  $u^{\tau+\Delta\tau}, v^{\tau+\Delta\tau}, w^{\tau+\Delta\tau}$  および  $\pi^{\tau+\Delta\tau}$  を用いて  $\theta^{\tau+\Delta\tau}, q_v^{\tau+\Delta\tau}, q_c^{\tau+\Delta\tau}, q_r^{\tau+\Delta\tau}$  を順に求める。ただし、計算の際、長い時間間隔における中央差分での計算モードを抑えるため、Asselin (1972) の時間フィルタ (2.3.4 節参照) を用いる。

上式 (D.28) ~ (D.31) 中の各項はそれぞれ以下のようになる; 移流項は

$$\text{Adv.}\theta^t = \left[ \overline{u\partial_x\theta^x} + \overline{v\partial_y\theta^y} + \overline{\omega\partial_{z^*}\theta^{z^*}} \right]^t + \text{Diff.}\theta^t, \quad (\text{D.32})$$

$$\text{Adv.}q_v^t = \left[ \overline{u\partial_x q_v^x} + \overline{v\partial_y q_v^y} + \overline{\omega\partial_{z^*} q_v^{z^*}} \right]^t + \text{Diff.}q_v^t, \quad (\text{D.33})$$

$$\text{Adv.}q_c^t = \left[ \overline{u\partial_x q_c^x} + \overline{v\partial_y q_c^y} + \overline{\omega\partial_{z^*} q_c^{z^*}} \right]^t + \text{Diff.}q_c^t, \quad (\text{D.34})$$

$$\text{Adv.}q_r^t = \left[ \overline{u\partial_x q_r^x} + \overline{v\partial_y q_r^y} + \overline{\omega\partial_{z^*} q_r^{z^*}} \right]^t + \text{Diff.}q_r^t. \quad (\text{D.35})$$

数値粘性項は

$$\text{Diff.}\theta^t = \nu_{2h} [\partial_x^2 \theta + \partial_y^2 \theta]^t + \nu_{2v} [\partial_{z^*}^2 \theta]^t, \quad (\text{D.36})$$

$$\text{Diff.}q_v^t = \nu_{2h} [\partial_x^2 q_v + \partial_y^2 q_v]^t + \nu_{2v} [\partial_{z^*}^2 q_v]^t, \quad (\text{D.37})$$

$$\text{Diff.}q_c^t = \nu_{2h} [\partial_x^2 q_c + \partial_y^2 q_c]^t + \nu_{2v} [\partial_{z^*}^2 q_c]^t, \quad (\text{D.38})$$

$$\text{Diff.}q_r^t = \nu_{2h} [\partial_x^2 q_r + \partial_y^2 q_r]^t + \nu_{2v} [\partial_{z^*}^2 q_r]^t. \quad (\text{D.39})$$

生成・消滅項は

$$M_\theta^t = -\gamma \left( \frac{q_{vs}^{t+\Delta t} - q_{vs}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \text{Adv.}q_{vs}^t + E_r^t \right), \quad (\text{D.40})$$

$$M_{q_v}^t = \frac{q_{vs}^{t+\Delta t} - q_{vs}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \text{Adv.}q_{vs}^{t-\Delta t} + E_r^t, \quad (\text{D.41})$$

$$M_{q_c}^t = -\frac{q_{vs}^{t+\Delta t} - q_{vs}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} - \text{Adv.}q_{vs}^t - A_r^t - C_r^t, \quad (\text{D.42})$$

$$M_{q_r}^t = F_r^t - E_r^t + A_r^t + C_r^t. \quad (\text{D.43})$$

また,

$$\text{Adv.}q_{vs}^t = [\overline{u\partial_x q_{vs}}^x + \overline{v\partial_y q_{vs}}^y + \overline{\omega\partial_{z^*} q_{vs}}^{z^*}]^t + \text{Diff.}q_{vs}^t, \quad (\text{D.44})$$

$$\begin{aligned} q_{vs} &= \frac{3.8}{\bar{p}} \exp\left(17.27 \frac{\bar{\Pi}\theta - 273}{\bar{\Pi}\theta - 36}\right) \\ &\simeq q_{vs}^* \left[1 + \frac{4093a\bar{\Pi}}{(\bar{\Pi}\theta^* - 36)^2} (\theta^{t+\Delta t} - \theta^*)\right], \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

$$F_r^t = \left[ \frac{1}{G^{1/2}\bar{\rho}} \partial_{z^*} (\bar{\rho}V q_r) \right]^t, \quad (\text{D.46})$$

$$V = 36.34 (\bar{\rho}q_r)^{0.1346} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{D.47})$$

である。ただし  $q_{vs}^*$  は  $\theta = \theta^*$  のときの  $q_{vs}$  の値である。式 (D.45) の近似は Tetens の式より  $\theta = \theta^*$  について線形化を行った。

拡散項は以下ようになる:

$$\begin{aligned}
 D_{\theta}^{t-\Delta t} = & 3\partial_x \left\{ \overline{K_m^x} (\partial_x \theta) + \overline{K_m^x G^{13z^*}} (\partial_{z^*} \overline{\theta^{xz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\partial_y \left\{ \overline{K_m^y} (\partial_y \theta) + \overline{K_m^y G^{23z^*}} (\partial_{z^*} \overline{\theta^{yz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\overline{G^{13xz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_x \overline{\theta^{xz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{13x}} (\partial_{z^*} \theta) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\overline{G^{23yz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_y \overline{\theta^{yz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{23y}} (\partial_{z^*} \theta) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + \frac{3}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2z^*}} (\partial_{z^*} \theta) \right\}^{t-\Delta t}, \tag{D.48}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{q_v}^{t-\Delta t} = & 3\partial_x \left\{ \overline{K_m^x} (\partial_x q_v) + \overline{K_m^x G^{13z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_v^{xz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\partial_y \left\{ \overline{K_m^y} (\partial_y q_v) + \overline{K_m^y G^{23z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_v^{yz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\overline{G^{13xz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_x \overline{q_v^{xz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{13x}} (\partial_{z^*} q_v) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\overline{G^{23yz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_y \overline{q_v^{yz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{23y}} (\partial_{z^*} q_v) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + \frac{3}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2z^*}} (\partial_{z^*} q_v) \right\}^{t-\Delta t}, \tag{D.49}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{q_c}^{t-\Delta t} = & 3\partial_x \left\{ \overline{K_m^x} (\partial_x q_c) + \overline{K_m^x G^{13z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_c^{xz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\partial_y \left\{ \overline{K_m^y} (\partial_y q_c) + \overline{K_m^y G^{23z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_c^{yz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\overline{G^{13xz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_x \overline{q_c^{xz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{13x}} (\partial_{z^*} q_c) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\overline{G^{23yz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_y \overline{q_c^{yz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{23y}} (\partial_{z^*} q_c) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + \frac{3}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2z^*}} (\partial_{z^*} q_c) \right\}^{t-\Delta t}, \tag{D.50}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{q_r}^{t-\Delta t} = & 3\partial_x \left\{ \overline{K_m^x} (\partial_x q_r) + \overline{K_m^x G^{13z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_r^{xz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\partial_y \left\{ \overline{K_m^y} (\partial_y q_r) + \overline{K_m^y G^{23z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_r^{yz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\overline{G^{13xz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_x \overline{q_r^{xz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{13x}} (\partial_{z^*} q_r) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + 3\overline{G^{23yz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_y \overline{q_r^{yz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{23y}} (\partial_{z^*} q_r) \right\}^{t-\Delta t} \\
 & + \frac{3}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2z^*}} (\partial_{z^*} q_r) \right\}^{t-\Delta t}. \tag{D.51}
 \end{aligned}$$

### D.3.4 サブグリッドスケールの乱流運動エネルギー方程式

サブグリッドスケールの乱流運動エネルギー方程式を運動量渦拡散係数で書き換えた式 (B.52) は長い時間間隔  $t$  で計算される. ここでは変数の下付添字  $i, j, k$  は省略する.

$$\begin{aligned}
 \frac{K_m^{t+\Delta t} - K_m^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = & -\text{Adv.}K_m^t + \frac{3gC_m^2 l^2}{2G^{1/2}} \left( -A\partial_{z^*}\bar{\theta}_e^{z^*} + \partial_{z^*}\bar{q}^{z^*} \right)^t \\
 & + C_m^2 l^2 \left\{ \left( \partial_x u + \overline{G^{13}xz^*} \partial_{z^*}\bar{u}^{xz^*} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left( \partial_y v + \overline{G^{23}yz^*} \partial_{z^*}\bar{v}^{yz^*} \right)^2 + \left( \frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} w \right)^2 \right\}^t \\
 & + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left\{ \left( \partial_x \bar{v}^{xy} + \partial_y \bar{u}^{xy} + \overline{G^{13}xz^*} \partial_{z^*}\bar{v}^{yz^*} + \overline{G^{23}yz^*} \partial_{z^*}\bar{u}^{xz^*} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left( \partial_x w + \overline{G^{13}xz^*} \partial_{z^*} w + \frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left( \partial_y \bar{w}^{yz^*} + \overline{G^{23}yz^*} \partial_{z^*} w + \frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*} \right)^2 \right\}^t \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \partial_x^2 K_m^2 + \partial_x \left( \overline{G^{13}z^*} \partial_{z^*} \overline{K_m^2}^{xz^*} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \partial_{z^*} \left( \overline{G^{13}x} \partial_x \overline{K_m^2}^{xz^*} \right) + \overline{G^{13}xz^*} \partial_{z^*} \left( \overline{G^{13}x} \partial_{z^*} K_m^2 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \partial_y^2 K_m^2 + \partial_y \left( \overline{G^{23}z^*} \partial_{z^*} \overline{K_m^2}^{yz^*} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \partial_{z^*} \left( \overline{G^{23}y} \partial_y \overline{K_m^2}^{yz^*} \right) + \overline{G^{23}yz^*} \partial_{z^*} \left( \overline{G^{23}y} \partial_{z^*} K_m^2 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left( \frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} K_m^2 \right) \right\}^t \\
 & + \left\{ \left( \partial_x \overline{K_m^x} + \overline{G^{13}xz^*} \partial_{z^*} \overline{K_m^z} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left( \partial_y \overline{K_m^y} + \overline{G^{23}yz^*} \partial_{z^*} \overline{K_m^z} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \overline{K_m^z} \right)^2 \right\}^t \\
 & - \frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2} K_m^2 \tag{D.52}
 \end{aligned}$$

となる. 移流項と数値粘性項はそれぞれ以下のようになる:

$$\text{Adv.}K_m^t = \left[ \overline{u\partial_x K_m^x} + \overline{v\partial_y K_m^y} + \overline{\omega\partial_{z^*} K_m^z} \right]^t + \text{Diff.}K_m^t, \tag{D.53}$$

$$\text{Diff.}K_m^t = \nu_{2h} \left[ \partial_x^2 K_m + \partial_y^2 K_m \right]^t + \nu_{2v} \left[ \partial_{z^*}^2 K_m \right]^t. \tag{D.54}$$

## D.4 湿潤飽和調節法

ここでは過飽和なしの場合を考える。過飽和しないように温位と混合比を計算するために、湿潤飽和調節法 (Soong and Ogura, 1973) を用いる。以下でその方法について述べる。

先に示したように、温位、水蒸気と雲水の混合比の方程式は

$$\frac{d\phi}{dt} = M_\phi + D_\phi \quad (\text{D.55})$$

と書ける。ただし  $\phi = \theta, q_v, q_c$  であり、 $D_\phi$  は拡散項、微物理過程の生成・消滅項は

$$M_\theta = -\gamma \left\{ \frac{dq_{vs}}{dt} + E_r \right\}, \quad (\text{D.56})$$

$$M_{q_v} = \frac{dq_{vs}}{dt} + E_r, \quad (\text{D.57})$$

$$M_{q_c} = -\frac{dq_{vs}}{dt} - A_r - C_r, \quad (\text{D.58})$$

$$q_{vs} = \frac{3.8}{\bar{p}} \exp \left( 17.27 \frac{\bar{\Pi}\theta - 273}{\bar{\Pi}\theta - 36} \right) \quad (\text{D.59})$$

である。

ここで湿潤調節法に必要な方程式を求める。(温位式)+ $\gamma$ ×(水蒸気混合比の式) より

$$\frac{d\theta}{dt} + \gamma \frac{dq_v}{dt} = D_\theta + D_{q_v}, \quad (\text{D.60})$$

(水蒸気混合比の式)+(雲水混合比の式) より

$$\frac{dq_v}{dt} + \frac{dq_c}{dt} = D_{q_v} + D_{q_c} + E_r - A_r - C_r \quad (\text{D.61})$$

である。

予報方程式 (D.55) から計算された  $t + \Delta t$  での各値を仮に  $\theta^*, q_v^*, q_c^*$  と表す。ここでは過飽和しないという条件で考えているので、 $q_v^* > q_{vs}^*$  ならば湿潤飽和調節を行って  $t + \Delta t$  での各値を求める。 $q_v^* \leq q_{vs}^*$  ならば予報方程式から得られた値を用いる。以下で湿潤飽和調節法を解説する。

式 (D.60) から

$$\frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \gamma \frac{q_v^{t+\Delta t} - q_v^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = D_\theta^{t-\Delta t} + D_{q_v}^{t-\Delta t}, \quad (\text{D.62})$$

$$\frac{\theta^* - \theta^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \gamma \frac{q_v^* - q_v^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = D_\theta^{t-\Delta t} + D_{q_v}^{t-\Delta t}. \quad (\text{D.63})$$

辺々引くと

$$\theta^{t+\Delta t} + \gamma q_v^{t+\Delta t} = \theta^* + \gamma q_v^* \quad (\text{D.64})$$

が成り立つ。

過飽和しないので、飽和に達した後の  $t + \Delta t$  における水蒸気の混合比と飽和混合比は等しくなければならない:

$$\begin{aligned} q_v^{t+\Delta t} &= q_{vs}^{t+\Delta t} \\ &= b \exp \left[ \frac{a (\bar{\Pi} \theta^{t+\Delta t} - 273)}{\bar{\Pi} \theta^{t+\Delta t} - 36} \right] \\ &\approx q_{vs}^* \left\{ 1 + \frac{273a\bar{\Pi}}{(\bar{\Pi}\theta^* - 36)^2} (\theta^{t+\Delta t} - \theta^*) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

ただし  $a = 7.5 \ln 10$ ,  $b = 3.8/\bar{p}$  である。したがって、式 (D.64) は

$$\begin{aligned} \theta^{t+\Delta t} &= \theta^* + \gamma (q_v^* - q_{vs}^{t+\Delta t}) \\ &= \theta^* + \gamma r_1 (q_v^* - q_{vs}^*) \end{aligned} \quad (\text{D.66})$$

となる。ただし

$$r_1 = \left[ 1 + \gamma q_{vs}^* \frac{273a\bar{\Pi}}{(\bar{\Pi}\theta^* - 36)^2} \right]^{-1}. \quad (\text{D.67})$$

式 (D.64) と (D.66) から

$$q_v^{t+\Delta t} = q_v^* + \frac{1}{\gamma} (\theta^* - \theta^{t+\Delta t}) \quad (\text{D.68})$$

また、(D.64) を求めたのと同様に、(D.61) より

$$q_v^{t+\Delta t} + q_c^{t+\Delta t} = q_v^* + q_c^* \quad (\text{D.69})$$

が得られる。式 (D.66), (D.68), (D.69) より暫定的に  $\theta, q_v, q_c$  の値を求める。

$q_c^{t+\Delta t} > 0$ , つまり雲水ができる場合、式 (D.66), (D.68), (D.69) を繰り返し用いて値が収束するまで計算する<sup>1</sup>

<sup>1</sup>凝結して周りの温度が上がるため、蒸発が起こるのを繰り返す。この状態が落ち着くまで計算する。



$q_c^{t+\Delta t} \leq 0$ , つまり雲水ができない場合,

$$q_c^{t+\Delta t} = 0, \quad (\text{D.70})$$

$$q_v^{t+\Delta t} = q_v^* + q_c^*, \quad (\text{D.71})$$

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^* - \gamma q_c^* \quad (\text{D.72})$$

を用いる。ここで式 (D.71) は式 (D.69) から, 式 (D.72) は (D.68) と (D.71) から求められる。

## 参考文献

- Asselin, R., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Weather Rev.*, **100**, 487-490.
- Deardorff, J. W., 1972: Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 91-115.
- Deardorff, J. W., 1975: The development of boundary-layer turbulence models for use in studying the severe storm environment. *Proc. SESAME Meeting*, Boulder, NOAA-ERL, 251-261.
- Houze, R. A., 1993: Cloud dynamics. Academic Press.
- Ikawa, M. and K. Saito, 1991: Description of a nonhydrostatic model developed at the Forecast Research Department of the MRI. *Technical Reports of the MRI*, **28**, 238pp.
- Kessler, E., 1969: On the Distribution and Continuity of Water Substance in Atmospheric Circulation. Meteor. Monogr., *Amer. Meteor. Soc.*, **32**, 84 pp.
- Klemp J. B. and Robert B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070-1096.
- 中野満寿男, 2003: 鉛直シアーが台風初期渦形成に及ぼす影響. 九州大学大学院理学府 地球惑星科学専攻 修士論文.
- 小倉義光, 1997: メソ気象の基礎理論, 東京大学出版会, 215pp.
- Ogura, Y. and N. A. Phillips, 1962: Scale analysis of deep and shallow water convection in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 173-179.
- Ogura, Y., and T. Takahashi, 1971: Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell. *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 895-911.
-

- Ogura, Y. and M. Yoshizaki, 1988: Numerical study of orographic-convective precipitation over the eastern Arabic Sea and the Ghats Mountains during the summer monsoon. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 2097-2122.
- 大宮司久明, 三宅裕, 吉澤徹, 1998: 乱流の数値流体力学—モデルと計算法. 東京大学出版会, 652pp.
- 斉藤和雄 編, 1999: 非静力学モデル. 気象研究ノート 第 196 号, 日本気象学会, 195pp.
- Skamarock, William C. and Joseph B. Klemp, 1992: The stability of time-split methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equation. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109-2127.
- Soong, S-T., and Y. Ogura, 1973: A comparison between axi-symmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893
- Takahashi, T. and T. Kawano, 1998: Numerical sensitivity study of rainband precipitation and evolution. *J. Atmos. Soc.*, **55**, 57-87.
- 豊田 英司, 石渡 正樹, 竹広 真一, 林 祥介, gtool4 開発グループ, 2002: gtool4 Fortran90 ツール・ライブラリ, <http://www.gfd-dennou.org/arch/gtool4/>, 地球流体電脳倶楽部.
- 坪木和久, 榊原篤志, 2001: CReSS ユーザーズガイド 第 2 版.  
[http://www.tokyo.rist.or.jp/CReSS\\_Fujin/CReSS.top.html](http://www.tokyo.rist.or.jp/CReSS_Fujin/CReSS.top.html)
- Wilhelmson, R. B., 1977: On the thermodynamic equation for deep convection. *Mon. Wea. Rev.*, **105**, 545-547.
- Wilhelmson, R., and Y. Ogura, 1972: The pressure perturbation and the numerical modeling of a cloud. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1295-1307.
- Wilhelmson, R. B., and Y. Ogura, 1977: The pressure perturbation and the numerical modeling of a cloud. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1295-1307.
- Xue, M., K. K. Droegemeier, V. Wong, A. Shapiro and K. Brewster, 1995: Advanced Regional Prediction System, Version 4.0. *Center for Analysis and Prediction of Storms, University of Oklahoma*, 380pp.
-