

非静力学モデルの方程式系

神戸大学理学部地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室
学部4年 今関 翔

2009/02/28

要旨

本論文では気象研究ノート (1999) の齊藤和雄 著, 『第二章 非静力学モデルの分類』に基づいて非静力学方程式系の定式化を行った.

まずは非静力学系モデルを使う必要性を, 静力学方程式系と非静力学方程式系での扱う運動のスケールや, 用いる近似の違いの比較をしたり, 静力学系モデルと非静力学系モデルでの降水予測の結果を比較することで考察した. 非静力学方程式系の定式化については, まず, 非静力学方程式系は連続の式の近似の仕方により分類されるのでこの分類についてから述べた. そして分類された方程式系ごとの基礎方程式系の定式化を行った. 非静力学方程式系は鉛直方向の運動, すなわち対流が重要になるような運動を扱うのに適している. この方程式系で行われる近似としては, 連続の式で表される大気密度の近似や, 場の変数を基本場と偏差に分け, 基本場の値を鉛直方向にのみ依存するとしたり, 定数として扱うというような近似, 基本場まわりでの方程式系の線形近似などがある. よって, それぞれの近似に応じて, 分類された方程式系をどのような現象に扱うべきかについても簡単に定式化と共に行った.

目次

第1章	はじめに	3
第2章	非静力学系モデルの必要性	4
2.1	静力学系と非静力学系	4
2.2	静力学系・非静力学系モデルの予測値の比較	5
第3章	非静力学方程式系の分類	6
第4章	非静力学方程式系の定式化	8
4.1	流体力学における基礎方程式	8
4.2	非弾性方程式系	10
4.2.1	非弾性方程式系	10
4.2.2	非圧縮方程式系	14
4.3	弾性方程式系	14
4.3.1	準圧縮方程式系	15
4.3.2	完全圧縮方程式系	17
第5章	まとめ	20

非静力学モデルの方程式系	2
謝辞	22
付録 A 定式化における式の導出	23
参考文献	34

第1章 はじめに

積乱雲は強い上昇流により発達し、激しい集中豪雨をもたらす。そして、天気予報において集中豪雨を予測することは大変重要である。天気予報のための数値シミュレーションモデルである気象庁のNHMでは、実際に非静力学方程式系が用いられている。そのため、鉛直方向の運動が重要である積乱雲を数値シミュレーションするには非静力学方程式系が適するだろう。NHMの他にも、NCAR (米国大気科学センター) とPSU (ペンシルバニア州立大学) によるメソスケールモデルのMM5, CSU (コロラド州立大学) のRAMSなどの数値シミュレーションモデルには非静力学方程式系が用いられている。当初は、非静力学方程式系を用いた数値シミュレーションモデル (非静力学系モデル) は、対流などの小スケールの現象を理解するための研究道具として開発され、気象庁の天気予報モデルなどには静力学方程式系に基づくものが用いられていた。しかし、上記のような数値シミュレーションモデルがあるように現在では非静力学モデルが主として用いられるようになった。

本研究では非静力学方程式系に基づく数値シミュレーションモデルの必要性の考察、非静力学方程式系の分類・定式化をする。本文の構成は以下のとおりである。第2章で非静力学系モデルの必要性について考察した。第3章で非静力学方程式系の分類について連続の式を用いて示した。第4章では分類された方程式系ごとに、その基礎方程式系の定式化をした。そして第5章がまとめである。

第2章 非静力学系モデルの必要性

2.1 静力学系と非静力学系

先にも述べたように、当初、気象庁で用いられていた天気予報モデルなどは静力学方程式系に基づくものであった。まずは、なぜ静力学系が主に用いられてきたのかを考える。そのために、静力学系と非静力学系で扱われる運動の違いについて簡単に述べる。静力学系では大気鉛直方向の加速度を極めて小さいものと見なし、鉛直の圧力勾配と重力が等しいとする静力学近似、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (2.1.1)$$

をしている。ここで ρ は大気の密度、 p は気圧、 g は重力加速度、 z は鉛直方向の長さスケールである。静力学系で扱っているのは、(運動の水平スケール) \gg (運動の鉛直スケール) という場である。当てはまるものとしては、総観規模 (数千 km) の気象現象がそうであり、例としてふつう天気図に見られる温帯低気圧や移動性高気圧、気圧の谷や尾根などである。

次に非静力学系では、鉛直風の加速度がとても大きいため静力学近似が使えない場を考える。そのため 3 成分の運動方程式を扱うこととなり静力学系よりも計算が複雑となる。非静力学系の運動スケールに当てはまる現象の例としては上昇気流が卓越する積乱雲の中での風の運動がそうである。

静力学系と非静力学系を比較すると、必要となる風速の成分について、静力学系では静力学近似により水平成分のみ扱えばよく、非静力学系では水平成分に加え鉛直成分も扱わなくてはならないという違いがわかる。そのため非静力学系は静力学系よりも方程式系が複雑なため計算に時間がかかり、実用には向かないものであったことが考えられる。そのため、天気予報モデルなどには計算を簡単化できる静力学方程式系が用いられていたのだろう。

計算を簡単化できるという点のみに着目すると、静力学方程式系を用いればいいように思われる。それにもかかわらず、非静力学方程式系を用いるのは何故なの

だろうか. これについて検討するため, 次節では静力学・非静力学方程式系に基づく数値シミュレーションモデルによる予測値の精度を比較して考察する.

2.2 静力学系・非静力学系モデルの予測値の比較

Kato (1997) では静力学・非静力学方程式系に基づく数値モデルでのシミュレーション結果の比較を行った. 図 2.2.1 は気象研究所で開発された非静力学モデル (Ikawa and Saito, 1991) とそのモデルの鉛直の運動方程式を静力学平衡の式に置き換えた静力学モデル (Kato and Saito, 1995) を用いて降水に関する予測をし, その予測値を比較したものである. このモデルでは三つの降水スキーム (PES, PMS, MAS) を用いている. 降水スキームは, 数値シミュレーションモデルにおいて降水現象があることをどのように表すのかを決めているものである. 降水スキームが異なる場合での予測値の比較も行っている. スキームによって多少の違いはあるが, 静力学系モデルは非静力学系モデルに比べて, 総降水量・降水面積を過大評価していることがわかる.

静力学系は運動方程式に静力学近似を用いることで計算を簡略化できるという利点をもつ. それに対し, 非静力学系では静力学近似を使わないため 3 成分の運動方程式が必要であり, 方程式系が複雑になる. しかし, 上昇流が卓越する積乱雲を数値シミュレーションするには非静力学方程式系が必要である. また, 計算機の性能の向上により複雑な計算が可能となってきたことで, 非静力学方程式系に基づく数値シミュレーションモデルを使うことが現実的なものとなった.

Δx	Scheme	$P_{a>1}N[\times 10^{11} m^2]$	$\frac{P_{a>1}H}{P_{a>1}N}$	$P_{total}N[\times 10^9 kg]$	$\frac{P_{total}H}{P_{total}N}$
5 km	PES	1.13	1.22	1.61	1.25
	PMS	1.14	1.21	1.55	1.24
10 km	PES	0.97	1.12	1.55	1.12
	PMS	0.99	1.06	1.49	1.10
	MAS	1.67	1.06	2.32	1.06

図 2.1: 積分時間 (9 時間) の間に非静力学モデルが予想した, 1 mm 以上の降水があった領域面積 $P_{a>1}$ 及び総降水量 P_{total} , 非静力学モデルに対する静力学モデルの予測値の比. H と N はそれぞれ静力学 (hydrostatic) モデルと非静力学 (Non-hydrostatic) モデルを意味する. PES, PMS, MAS は異なる三つの降水スキームである.

第3章 非静力学方程式系の分類

ここでは非静力学方程式系の分類について述べる。

まず、非静力学系は大気の圧縮性の有無で大別され、圧縮性の有るものは弾性方程式系、無いものは非弾性方程式系と呼ばれている。大気の圧縮性の有無は、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

において $\partial \rho / \partial t$ があるかどうかで表される。弾性方程式系と非弾性方程式系は密度の近似の程度によってさらに分類できる。分類された各方程式系の定式化は次章で行うものとし、ここではそれぞれの方程式系の名称と密度の近似の程度について記す。

完全圧縮方程式系: 近似を行わない厳密な連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

を用いる。

準圧縮方程式系: 大気の圧縮性は認めるが、密度を

$$\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$$

のように水平一様な基本場の値 $\bar{\rho}(z)$ とそこからの偏差 $\rho'(x, y, z, t)$ に分け、密度を基本場のまわりで線形近似した

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

を用いる。ここで d/dt はラグランジュ微分である。

非弾性方程式系: 準圧縮モデルと同様に密度を水平一様な基本場とそこからの偏差に分け、大気の圧縮性を無視した連続の式

$$\frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} = 0$$

を用いている. なお, ここでは, 基本場の値に比べて偏差がはるかに小さいとして $\nabla \cdot (\rho' \mathbf{u})$ を無視している.

非圧縮方程式系: 大気の圧縮性を無視し, 非弾性方程式系と同様に, 密度を基本場と偏差に分けて考えるが, 基本場の値を時間・場所に関して共に一様な値としている. 連続の式は非圧縮を表す式となり

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

である. ここで, 基本場の値に比べて偏差がはるかに小さいとして $\nabla \cdot (\rho' \mathbf{u})$ を無視している.

最後にモデルの分類についてまとめた簡単な樹形図を載せておく.

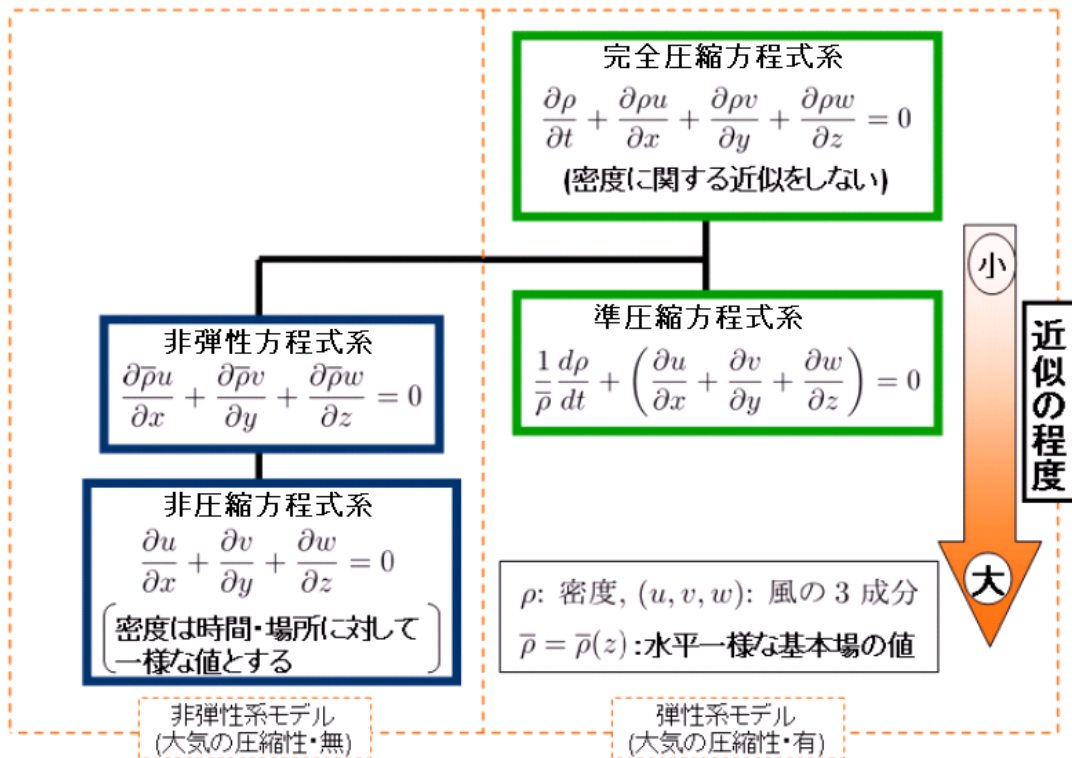


図 3.1: 非静力学方程式系の分類についての樹形図.

第4章 非静力学方程式系の定式化

4.1 流体力学における基礎方程式

3章でも述べたように、非静力学方程式系は密度の近似の仕方によっていくつかの方程式系に分類される。その近似された方程式系との比較のために、ここでは初めに近似が行われていない場合の方程式系を示しておく。その方程式系は大気の状態を表すためのものであるから流体力学における基礎方程式系と言え、同時に、密度の近似を行っていないことから完全圧縮方程式系でもある。ここで言う大気の状態とは気温や気圧などの物理量である。また、直行直線座標系で乾燥大気について考えるため、大気の状態は、気温 T 、気圧 p 、風の3成分 (u, v, w) で表現される。これらに密度 ρ を加えた以下の6つの基礎方程式が存在する。なお、ここからの定式化では簡単のため地球回転の影響を無視し、乾燥大気を扱うものとしている。

・連続の式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (4.1.1)$$

ここで ρ は大気の密度、 (u, v, w) は風速の3成分である。

・ナビエ・ストークスの運動方程式:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \nabla^2 u, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \nabla^2 v, \quad (4.1.3)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = \nu \nabla^2 w. \quad (4.1.4)$$

ここで p は気圧、 g は重力加速度、 ν は動粘性率である。各方程式の左辺第二項は圧力傾度力、右辺は乱流粘性項を表す。また、鉛直の運動方程式の左辺第三項は単位体積あたりの重力である。

・熱力学の式^{*1}:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{Q}{C_p \pi} + \frac{\kappa}{\pi} \nabla^2 T. \quad (4.1.5)$$

ここで T は温度, θ は温位, π はエクスター関数 (無次元化した気圧), Q は非断熱加熱, C_p は乾燥大気の定圧比熱, R は乾燥大気に対する気体定数, κ は熱拡散率である. これはエントロピーの定義式を熱力学第一法則と温位 θ によって表したものである.

・状態方程式:

$$p = \rho RT. \quad (4.1.6)$$

また, θ と π はそれぞれ以下で定義される.

$$\pi \equiv \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p}, \quad (4.1.7)$$

$$\theta \equiv \frac{T}{\pi}. \quad (4.1.8)$$

ここで p_0 は標準気圧である.

ここまでで 6 つの変数に対する 6 つの方程式が存在するため流体力学の基礎方程式系は閉じたが, 従属変数として p の代わりに π を用いる場合の運動方程式も導いておく.

(4.1.7), (4.1.8) より状態方程式 (4.1.6) は,

$$\rho = \frac{p_0}{R\theta} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{C_v/C_p} \quad (4.1.9)$$

となる^{*2}. ここで C_v は乾燥大気の定積比熱であり, $C_v = C_p - R$ である. 次に (4.1.7), (4.1.8), (4.1.9) より,

$$\frac{1}{\rho} dp = C_p \theta d\pi \quad (4.1.10)$$

^{*1}(4.1.5) の導出は付録 A.1 を参照.

^{*2}(4.1.9) の導出をする. (4.1.7), (4.1.8) より

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\pi\theta} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-R/C_p} \quad (a1)$$

であるから, (4.1.6) に代入して,

$$\rho = \frac{p}{R\theta} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-R/C_p} = \frac{1}{R\theta} p^{\frac{C_p-R}{C_p}} p_0^{\frac{R}{C_p}} = \frac{1}{R\theta} p^{\frac{C_p-R}{C_p}} p_0^{-\frac{C_p-R}{C_p}} = \frac{p_0}{R\theta} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{C_v/C_p} \quad (4.1.10)$$

を得る.

となる^{*3}. よって, (4.1.10) を (4.1.2) ~ (4.1.4) に用いて,

$$\frac{du}{dt} + C_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} = \nu \nabla^2 u, \quad (4.1.11)$$

$$\frac{dv}{dt} + C_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} = \nu \nabla^2 v, \quad (4.1.12)$$

$$\frac{dw}{dt} + C_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial z} + g = \nu \nabla^2 w \quad (4.1.13)$$

を得る. これにより p の代わりに π を用いた運動方程式が得られた.

4.2 非弾性方程式系

この節では非静力学方程式系の中の, 大気の圧縮性を無視した方程式系である非弾性方程式系の定式化を行う.

4.2.1 非弾性方程式系

非弾性方程式系は大気の圧縮性を無視した方程式系で, 場の変数 $\phi(x, y, z, t)$ は以下のように水平一様な基本場 $\bar{\phi}(z)$ とそこからの偏差 $\phi'(x, y, z, t)$ に分けて取り扱われる.

$$p = \bar{p} + p', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad \theta = \bar{\theta} + \theta'. \quad (4.2.1)$$

連続の式は

$$\frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} = 0 \quad (4.2.2)$$

である. ここで大気の圧縮性の無視のため密度の時間変化項を無視し, また, 基本場の値に比べて偏差がはるかに小さいとして $\nabla \cdot (\rho' \mathbf{u})$ も無視している.

運動方程式は

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \nabla^2 u, \quad (4.2.3)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \nabla^2 v, \quad (4.2.4)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g \right) = \nu \nabla^2 w \quad (4.2.5)$$

^{*3}(4.1.10) の導出は付録 A.2 を参照.

となる^{*4}。ここで、基本場の値に対しては静力学の式

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g = 0 \quad (4.2.6)$$

を使っている。

熱力学の式は (4.1.5) に基本場と偏差に分けた温位を代入したもので、

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = \frac{Q}{C_p \pi} + \frac{\kappa}{\pi} \nabla^2 T \quad (4.2.7)$$

であり、状態方程式は (4.1.6) を用いる。

鉛直の運動方程式は状態方程式から密度偏差を導くことでさらに変形できるので以下で定式化をする。

(4.1.6) ~ (4.1.8) より、

$$\rho' \simeq -\bar{\rho} \frac{\theta'}{\theta} + \frac{p'}{C_s^2} \quad (4.2.8)$$

を得る^{*5}。ここで、(4.2.8) の右辺は基本場の値による線形近似を表す。また C_s^2 は音速の自乗であり、

$$C_s^2 = \frac{C_p}{C_v} RT \quad (4.2.9)$$

で表され、気圧や密度と同様に、基本場の値 $\bar{C}_s^2(z)$ と偏差 $C_s'(x, y, z, t)$ に分けられている。このように密度の偏差を温位の偏差と気圧の偏差によって表現できた。(4.2.3) を (4.2.5) に代入すると鉛直の運動方程式は、

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{p'}{C_s^2} g \right) = \frac{\theta'}{\theta} g + \nu \nabla^2 w \quad (4.2.10)$$

となる。左辺第三項、右辺第一項は密度の偏差による浮力を表す。

ここまでで方程式系は閉じているが、運動方程式を以下の形に変形することもできる。

まずはフラックス形式^{*6}の運動方程式を導出する。

^{*4}(4.2.3) ~ (4.2.5) の導出は付録 A.3 を参照。

^{*5}(4.2.8) の導出は付録 A.4 を参照。

^{*6}フラックス形式とは、物理量の時間変化を空間に固定した微小体積への流入・流出により表現することである。

連続の式 (4.2.2) を用いると,

$$\begin{aligned}\bar{\rho} \frac{d\phi}{dt} &= \bar{\rho} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial \bar{\rho} \phi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} u \phi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v \phi}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w \phi}{\partial z}\end{aligned}\quad (4.2.11)$$

を得る^{*7}. これを運動方程式 (4.2.3), (4.2.4), (4.2.10) に用いるとフラックス形式の運動方程式が得られ,

$$\frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial t} + \left(\frac{\partial \bar{\rho} u^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} u v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} u w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = \bar{\rho} \nu \nabla u, \quad (4.2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial t} + \left(\frac{\partial \bar{\rho} v u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} v w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p'}{\partial y} = \bar{\rho} \nu \nabla v, \quad (4.2.13)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial t} + \left(\frac{\partial \bar{\rho} w u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} w v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w^2}{\partial z} \right) + \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{p'}{C_s^2} g = \bar{\rho} \frac{\theta'}{\theta} g + \bar{\rho} \nu \nabla w \quad (4.2.14)$$

となる. ここで各方程式の左辺第二項はフラックス形式の移流項である. フラックス形式への書き換えには, 側面境界を通しての質量移流が計算しやすくなるという利点がある.

次に気圧として p の代わりに π を用いる方程式系における運動方程式を導出する.

まず, 基本場に対する静力学の式を,

$$C_p \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + g = 0 \quad (4.2.15)$$

^{*7}(4.2.11) を導出する. まず, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ であるから

$$\rho \frac{d\phi}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (a2)$$

である. 次に

$$\frac{\partial \rho u \phi}{\partial x} = \phi \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho v \phi}{\partial y} = \phi \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho w \phi}{\partial z} = \phi \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \rho w \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

である. これらを辺々加え, $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ として線形近似により, ρ' を含む項を無視し, さらに (4.2.2) を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\rho} u \phi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v \phi}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w \phi}{\partial z} &= \phi \left(\frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} \right) + \bar{\rho} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \bar{\rho} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

を得る. これを (a2) に代入して (4.2.11) となる.

と書き換える^{*8}. (4.2.15) を用いて

$$C_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial z} + g = C_p (\bar{\theta} + \theta') \frac{\partial (\bar{\pi} + \pi')}{\partial z} + g \simeq C_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g \quad (4.2.16)$$

を得る^{*9}. (4.2.16) によって (4.2.3) ~ (4.2.5) は,

$$\frac{du}{dt} + C_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial x} = \nu \nabla^2 u, \quad (4.2.17)$$

$$\frac{dv}{dt} + C_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial y} = \nu \nabla^2 v, \quad (4.2.18)$$

$$\frac{dw}{dt} + C_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial z} = \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g + \nu \nabla^2 w \quad (4.2.19)$$

と近似される. (4.2.10) と (4.2.19) を比較するとわかるように, (4.2.19) には鉛直方向の運動方程式に浮力に関する気圧偏差の項が出てこないことが, 予報変数に π を用いる方式の一つの利点である.

通常, 流体の圧縮性の影響が無視できない大きさになるのはマッハ数にして 0.3 以上と言われる. これはおよそ時速 400 km くらいである. それゆえに通常の気象現象では大気の圧縮性は無視できるほど小さいと言え, そのため非弾性近似は良い精度で成り立つものである. しかし, 水平一様な基本場まわりでの線形近似を行うため, 例えば気圧偏差が大きくなるような場, 高気圧と低気圧をどちらも含んでしまうような水平方向に広い領域や, 等圧線の間隔が狭い, すなわち水平風速が大きい領域などには不向きであろう.

^{*8}(4.2.15) を導出する. (4.1.10) を再掲すると,

$$\frac{1}{\rho} dp = C_p \theta d\pi \quad (4.1.10)$$

であるから, この両辺を z で偏微分して

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = C_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial z}$$

これを基本場の値に適用するので線形近似を行い,

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = C_p \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z}$$

とする. これを (4.2.6) に代入して

$$C_p \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + g = 0 \quad (4.2.15)$$

を得る.

^{*9}(4.2.16) の導出は付録 A.5 を参照.

4.2.2 非圧縮方程式系

非圧縮方程式系は、大気の圧縮性は無視し、場の変数を時間・場所によらない一様な値としての基本場 ϕ_0 とそこからの偏差 $\phi'(x, y, z, t)$ に分けて考え、すなわち以下のようなになる。

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad \theta = \theta_0 + \theta'$$

連続の式は、変数に基本場の値を用いるため非圧縮の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.2.20)$$

となる。この場合の方程式系はブシネスク系と呼ばれる。

運動方程式は、

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \nabla^2 u \quad (4.2.21)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \nabla^2 v \quad (4.2.22)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{\theta'}{\theta_0} g + \nu \nabla^2 w \quad (4.2.23)$$

となる。これらは非弾性モデルの運動方程式を簡略化したものである。すなわち、(4.2.3), (4.2.4), (4.2.10) について場の変数 (ρ, p, θ) を基本場の値 (ρ_0, p_0, θ_0) と偏差 (ρ', p', θ') に分け、さらに (4.2.10) の左辺第二項の浮力に関する気圧偏差を消去したのになっている。

熱力学の式と状態方程式はそれぞれ、(4.2.7) と (4.1.6) である。

非圧縮系モデルは、基礎研究や高度による密度変化が大きくなり浅い対流を対象にしたシミュレーションに用いられることがある。しかし、基本場の値を定数としたり、鉛直の運動方程式から浮力に関する気圧偏差を消去したりするように近似が大きいと、対流圏全層のように広い範囲での再現実験には使えない。

4.3 弾性方程式系

ここからは大気の圧縮性を考慮する弾性方程式系の定式化を行う。

4.3.1 準圧縮方程式系

準圧縮方程式系は、連続の式に大気の圧縮性を認め、発散から気圧を予報するが、密度は基本場の値を用いる。また場の変数は非弾性方程式系と同様に基本場と偏差に分けて扱う。

準圧縮モデルは気圧に p を用いる場合と π を用いる場合とで連続の式が異なるためそれぞれについての方程式系を導く。

- ・気圧に p を用いる場合

連続の式は以下のものを用いる。

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} = 0. \quad (4.3.1)$$

ここでは $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho' \mathbf{u})$ を無視している。また、左辺第一項に大気の圧縮性が表されている。

運動方程式は非弾性方程式系におけるフラックス形式の運動方程式を使い、(4.2.12) ~ (4.2.14) である。

熱力学の式と状態方程式はそれぞれ (4.2.7) と (4.1.6) である。

p を用いる場合の気圧の予報方程式は

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = C_s^2 \left\{ \frac{\bar{\rho}}{\bar{\theta}} \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \left(\frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} \right) \right\} \quad (4.3.2)$$

となる^{*10}。右辺中括弧内の第一項が空気の熱膨張に関する非断熱項と熱拡散であり、第二項以下が大気の質量フラックスの発散を表し、連続の式から圧縮性を示していることがわかる。

方程式系は連続の式・運動方程式・熱力学の式・状態方程式で閉じる。しかし気圧の予報方程式を求めることで、密度・風速・気圧・温度の6つの未知変数に対する、6つの時間に関する1階微分方程式で方程式系を閉じられるようになる。

気圧に p を用いる場合の準圧縮方程式系は、フラックス形式の運動方程式を用いている。しかし、その運動方程式は、非弾性方程式系における運動方程式であるため、大気の圧縮性を無視した連続の式を用いて得られるものである。そのため大

^{*10}(4.3.2) の導出は付録 A.6 を参照。

気の圧縮性を認める準圧縮方程式系では厳密には運動方程式をフラックス形式にはできず、誤差が生じてしまう。

・気圧に π を用いる場合

連続の式は

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.3.3)$$

となる^{*11}。

運動方程式は非弾性モデルと同様に線形化した (4.2.17) ~ (4.2.19) を用いる。

熱力学の式と状態方程式はそれぞれ (4.2.7) と (4.1.6) である。

次に π による気圧の予報式を導出する。状態方程式 (4.1.9) の変形、

$$\pi = \left(\frac{\rho R \theta}{p_0} \right)^{R/C_v} \quad (4.3.4)$$

から^{*12} π の対数微分を線形近似した式、

$$\frac{1}{\pi} \frac{d\pi}{dt} = \frac{R}{C_v} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) \quad (4.3.5)$$

と^{*13}、準圧縮の連続の式 (4.3.3)、音速の自乗の式 (4.2.9) を用いて π の予報方程式、

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{R\pi}{C_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{C_s^2}{C_p \theta^2} \frac{d\theta}{dt} \quad (4.3.6)$$

を得る^{*14}。右辺第一項が風速の発散を表し、大気の圧縮性に関係しており、右辺第二項が熱膨張に関係する気圧変化であり、非断熱加熱と熱拡散で表される。気圧に p を用いる場合と同様に、 π による気圧の予報式を求めることで、密度・風速・気圧・温度の 6 つの未知変数に対する、6 つの時間に関する 1 階微分方程式で方程式系を閉じられるようになる。

準圧縮方程式系では非弾性方程式系では無視した大気の圧縮性を考慮した連続の式を用いている。そのため 6 つの未知変数に対する、6 つの時間に関する 1 階微分方程式が得られる。非弾性方程式系の基礎方程式が状態方程式のような時間微分の項を含まない診断式と、運動方程式のような時間微分の項を含む予報式の混在し

^{*11}(4.3.3) の導出は付録 A.7 を参照。

^{*12}(4.3.4) は (4.1.9) の両辺を R/C_v 乗し、 π について整理すれば得られる。

^{*13}(4.3.5) の導出は付録 A.8 を参照。

^{*14}(4.3.6) は (4.2.9) と (4.3.3) を (4.3.5) に代入し、 θ' を無視すれば得られる。

たものであることを考えると、準圧縮方程式系はその基礎方程式系をまとめやすいという利点がある。しかし精度については、大気の圧縮性を無視した連続の式によって得られた非弾性方程式系のフラックス形式の運動方程式を用いるため、大気の圧縮性を考慮した連続の式を用いる準圧縮方程式系では厳密には運動方程式をフラックス形式にはできず、非弾性方程式系とほぼ同程度の精度になってしまう。また、準圧縮方程式系が適する領域については、非弾性方程式系と同様に水平一様な基本場による線形近似を行うことから、狭い領域に限られるだろう。ただし、大気の圧縮性は考慮しているため、暴風雨のように瞬間最大風速がとても大きくなり、大気の圧縮性の考慮が必要な現象に使える点で非弾性方程式系より優れているだろう。

4.3.2 完全圧縮方程式系

完全圧縮方程式系は大気の圧縮性を認め、近似を行わない厳密な連続の式と状態方程式から気圧を予報するものである。ここで場の変数は基本場の値 $\bar{\phi}$ と偏差 ϕ' に分けて扱う。なお、基本場の値の扱いについて先にまとめておく。気圧の基本場の値 $\bar{p}(z)$ については静力学の式 (4.2.6) を用いる。また、方程式系に対して基本場のまわりでの線形近似は行わない。

連続の式は、(4.1.1) である。

連続の式 (4.1.1) を用いると、

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\phi}{dt} &= \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \phi}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \phi}{\partial z} - \phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \phi}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

となり、気圧に p を用いるフラックス形式のモデルでは運動方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \rho \nabla^2 u, \quad (4.3.8)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho v w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \rho \nabla^2 v, \quad (4.3.9)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho w u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} \right) + \frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho' g + \nu \rho \nabla^2 w. \quad (4.3.10)$$

フラックス形式では側面境界を通しての質量移流を計算しやすいことが利点である。また、左辺第一項は質量フラックスの時間変化、第二項は移流項、第三項は圧力傾度力であり、右辺の ∇^2 が掛かる項は拡散項である。鉛直の運動方程式の右辺第一項は密度の偏差による浮力であり、状態方程式を用いて密度偏差から直接求められる。

熱力学の式と状態方程式はそれぞれ (4.2.7) と (4.1.6) である。

ここで気圧の偏差は状態方程式から、

$$p' = C_s^2 \left(\rho' + \rho \frac{\theta'}{\theta} \right) \quad (4.3.11)$$

となる。(4.3.11) は 4.2 節で状態方程式から得た密度の偏差の式 (4.2.8) の線形近似を行っていないものを、気圧偏差について整理したものである。(4.3.11) と連続の式 (4.1.1) を用いて気圧の予報方程式

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -C_s^2 \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) + C_s^2 \frac{\rho}{\theta} \frac{\partial \theta'}{\partial t} \quad (4.3.12)$$

を得る^{*15}。右辺第一項は風速による大気が発散に起因する気圧変化である。これは連続の式と見比べるとわかるように $\partial \rho / \partial t$ と同値であり、大気の圧縮性を表すことがわかる。右辺第二項は熱的な気圧変化を表しており、大気の熱膨張を表している。その熱的な変化とは、熱力学の式からわかるように非断熱加熱と熱拡散によるものである。上式は気圧の時間変化を大気質量フラックス ρu の発散と温度の時間変化に置き換えている。よって現在の風速、気圧、温度の値を与えれば気圧の単位時間当たりの変化量が得られ、気圧の予報値がわかる。

方程式系は連続の式、運動方程式、熱の式、状態方程式で閉じている。しかし、気圧の予報式を導出することで、密度・風速・気圧・温度の 6 つの未知変数に対する、6 つの時間に関する 1 階微分方程式で方程式系を閉じられるようになる。

ここまでは気圧に p を用いる方程式系が得られたが、気圧に π を用いて表すこともできるので以下に導く。

連続の式は 4.3 節で求めた準圧縮の連続の式 (4.3.3) を線形近似する前の式であり、これは密度に基本場の値を用いないもので、以下のようなになる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.3.13)$$

^{*15}(4.3.12) は (4.3.11) を t に関して偏微分し、連続の式 (4.1.1) を代入すれば得られる。

運動方程式は 4.1 節で示した, (4.1.11) ~ (4.1.13) である.

熱の式, 状態方程式は気圧に p を用いる場合と同様に, それぞれ (4.2.7) と (4.1.6) である.

次に, π を対数微分した

$$\frac{1}{\pi} \frac{d\pi}{dt} = \frac{R}{C_v} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) \quad (4.3.14)$$

と^{*16}, 連続の式 (4.3.13) と音速の式 (4.2.9) を用いて気圧方程式

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{R\pi}{C_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{C_s^2}{C_p \theta^2} \frac{d\theta}{dt} \quad (4.3.15)$$

を得る. 気圧に p を用いる場合と同様に, π による気圧の予報式を求めることで, 密度・風速・気圧・温度の 6 つの未知変数に対する, 6 つの時間に関する 1 階微分方程式で方程式系を閉じられるようになる.

完全圧縮モデルは方程式系に近似を含まない点で準圧縮系や非弾性系よりも精度の点で勝り, 扱える領域に関する制限も小さくなると言えるだろう. しかし, 近似を行っていないだけ計算量は多く, 現実的に完全圧縮方程式系に基づくモデルを利用できるかは計算機の性能に大きく依存してしまうだろう.

^{*16}(4.3.14) は (4.3.5) を求める方法と同様にして得られる.

第5章 まとめ

本論文では非静力学方程式系モデルについて、その必要性について考察し、連続の式による方程式系の分類と定式化を行ってきた。

静力学系と非静力学系での運動スケールの違いや、数値モデルによる予測値の比較などから、積乱雲のような上昇流が卓越するような現象を数値シミュレーションするには非静力学方程式系が適することがわかった。

方程式系の分類については、連続の式における大気の圧縮性の有無から方程式系を大別した。さらに基礎方程式中で用いられる密度の基本場の値が、水平一様なもの、もしくは時間・空間についてともに一様なものとして扱う場合とで分類されることを示した。

定式化については、連続の式による分類に基づいて各方程式系の定式化を行った。ここではそれぞれの方程式系についてまとめる。

ほとんど近似を行わない完全圧縮方程式系は精度の高い数値モデルを作れるが、扱う変数が増える分、計算量が多くなってしまう。このことは、第一章で述べたように3成分の運動方程式を用いるために静力学系よりも方程式系が複雑な非静力学系における大きな問題点であり、よほどの性能の計算機を用いなければ、完全圧縮系モデルの利用は現実的でないだろう。準圧縮方程式系では、大気の圧縮性を認めたが、水平一様な基本場まわりの線形近似を行った。さらに、運動方程式の近似に用いた連続の式は大気の圧縮性を無視したものであった。基本場まわりの線形近似により、高気圧、低気圧がどちらも含まれるような気圧偏差が大きくなる広域での使用には向かないが、大気の圧縮性を示す $\partial\rho'/\partial t$ は方程式系に含むため、暴風雨のような風速がとても大きい現象を扱うことはできるだろう。次に非弾性方程式系は大気の圧縮性を認めず、水平一様な基本場まわりの線形近似を行っている。準圧縮方程式系との違いを見ると大気の圧縮性を無視するという点以外は変わらない方程式系で、扱える領域は準圧縮系と同様に狭くはなるが、風速が極端に大きくなならない通常の気象現象には良い近似で成り立つだろう。最後に非圧縮方程式系についてであるが、これは大気の圧縮性を無視し、変数の基本場の値を

定数として扱っている。そのため高度による密度変化が小さい、浅い対流を数値シミュレーションするには適するものである。

謝辞

林祥介教授, 岩山隆寛准教授には研究テーマと方針を頂きました。高橋芳幸助教, 東邦昭さん, 佐々木洋平さん, 森川靖大さん, 村上真也さん, 納多哲史さんには貴重な時間を割いて頂き, 御指導, 助言を頂きました。

地球および惑星大気科学研究室の皆様には数多くの助言, 御協力を頂きました。ここで改めて深く感謝致します。

付録 A 定式化における式の導出

付録 A.1 熱力学の式 (4.1.5) の導出

熱力学第一法則は

$$U = -W + Q$$

である。ここで U は内部エネルギー, W は系が外界にする仕事, Q は外界から系に入った熱量である。(A.1.1) において, 単位質量あたりの内部エネルギーを e とすると上式は

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -p \frac{dV}{dt} + Q \\ &= -p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + Q \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

となる。ここで p は系から外界にはたらく圧力, V は体積, ρ は密度, Q は内部熱源による単位質量当りの加熱率である。さらに熱拡散を考慮して,

$$\frac{de}{dt} = -p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \kappa \nabla^2 T + Q \quad (\text{A.1.2})$$

を得る。ここで κ は熱拡散率, T は絶対温度である。次にエントロピー S の定義

$$S \equiv \int \frac{dQ}{T}$$

より, $dS \equiv \frac{dQ}{T}$ を用いて,

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{dV}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (\text{A.1.3})$$

となる。よって (A.1.2), (A.1.3) より

$$T \frac{dS}{dt} = \kappa \nabla^2 T + Q \quad (\text{A.1.4})$$

を得る.

次に, 乾燥大気を仮定しているので

$$\rho = \rho(p, T)$$

または

$$S = S(p, T)$$

とおける. ここで S を p と T の二つの独立変数のみに依存するとしたので

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT \quad (\text{A.1.5})$$

となる. ここで, ギブスの自由エネルギー $G(p, T)$ について,

$$G = U - TS + pV$$

より,

$$\begin{aligned} dG &= dU - TdS - SdT + pdV + Vdp \\ &= (dU + pdV - TdS) - SdT + Vdp \\ &= (dU + dW - dQ) - SdT + Vdp \\ &= -SdT + \frac{1}{\rho} dp \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

である. (A.1.6) の下から 2 行目右辺第一項は熱力学第一法則によりゼロとした. また G は p と T の二つの独立変数のみに依存し,

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T dp \quad (\text{A.1.7})$$

であるから, (A.1.7) と (A.1.8) を辺々比較して

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -S, \quad (\text{A.1.8})$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \quad (\text{A.1.9})$$

を得る. (A.1.9), (A.1.10) について

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p \right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T \right)_p$$

を用いると,

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\rho} \right)_p = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p,$$

であるので,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (\text{A.1.10})$$

となる. また, 定圧比熱 C_p の定義より,

$$C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \quad (\text{A.1.11})$$

であるから, (A.1.5) は (A.1.10), (A.1.11) を用いて,

$$dS = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p dp + \frac{C_p}{T} dT \quad (\text{A.1.12})$$

となる. さらに乾燥大気に関する状態方程式は理想気体の場合と同様に

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

とできるので, (A.1.12) はさらに変形でき,

$$\begin{aligned} dS &= \left(\frac{RT}{p}\right)^2 \left(-\frac{p}{RT^2}\right) dp + \frac{C_p}{T} dT \\ &= -R \frac{dp}{p} + C_p \frac{dT}{T} \end{aligned} \quad (\text{A.1.13})$$

となる. (A.1.13) を両辺積分し, 積分定数を S_0 とすると,

$$\begin{aligned} S &= C_p \ln T - R \ln p + S_0 \\ &= C_p \left(\ln T - \frac{R}{C_p} \ln p \right) + S_0 \\ &= C_p \ln T \left(\frac{1}{p} \right)^{R/C_p} + S_0, \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

であり, 上式を整理して

$$\begin{aligned} \frac{S - S_0}{C_p} &= \ln T \left(\frac{1}{p} \right)^{R/C_p} \\ e^{\frac{S - S_0}{C_p}} &= T \left(\frac{1}{p} \right)^{R/C_p} \end{aligned} \quad (\text{A.1.15})$$

となる. ここで, 標準気圧 $p_0 = \text{const}$ を用いて, (A.1.15) の両辺に p_0^{R/C_p} をかけると,

$$p_0^{R/C_p} e^{\frac{S - S_0}{C_p}} = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/C_p} \quad (\text{A.1.16})$$

となる. (4.1.7), (4.1.8) より (A.1.16) は

$$p_0^{R/C_p} e^{\frac{S-S_0}{C_p}} = \theta \quad (\text{A.1.17})$$

であり, 両辺を t で微分して

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{C_p} p_0^{R/C_p} e^{\frac{S-S_0}{C_p}} \frac{dS}{dt} \quad (\text{A.1.18})$$

となる. (A.1.18) に (A.1.17) を代入すると,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{C_p} \frac{dS}{dt} \quad (\text{A.1.19})$$

を得る. (A.1.4) を (A.1.19) に代入すると

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{C_p T} (\kappa \nabla^2 T + \mathcal{Q}) \quad (\text{A.1.20})$$

である. 最後に (4.1.7) より $\frac{\theta}{T} = \frac{1}{\pi}$ であるから,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathcal{Q}}{C_p \pi} + \frac{\kappa}{\pi} \nabla^2 T \quad (4.1.5)$$

が求められた.

付録 A.2 (4.1.10) の導出

(4.1.10) の導出をする。 エクスナー関数 (4.1.7) より

$$p^{R/C_p} = p_0^{R/C_p} \pi$$

であるから、これを両辺微分して、

$$\frac{R}{C_p} p^{\frac{R}{C_p}-1} dp = p_0^{R/C_p} d\pi$$

であり、これを变形して、

$$dp = \frac{C_p}{R} p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-R/C_p} d\pi = \frac{C_p}{R} p \frac{1}{\pi} d\pi \quad (\text{A.2.1})$$

となる。 また、状態方程式 (4.1.6) と 温位 (4.1.8) より、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R\theta\pi}{p} \quad (\text{A.2.2})$$

であるから (A.2.1), (A.2.2) より、

$$\frac{1}{\rho} dp = \frac{R\theta\pi}{p} \cdot \left(\frac{C_p}{R} p \frac{1}{\pi} d\pi \right) = C_p \theta d\pi \quad (\text{4.1.10})$$

を得る。

付録 A.3 (4.2.3) ~ (4.2.5) の導出

(4.2.3) ~ (4.2.5) を導出する.

まず (4.2.3) から求める. (4.1.2) に (4.2.1) を代入すると,

$$\begin{aligned}(\bar{\rho} + \rho') \frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') &= \nu \nabla^2 u, \\ \bar{\rho} \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \frac{du}{dt} + \frac{\partial p'}{\partial x} &= \nu \nabla^2 u\end{aligned}$$

となる. ここで $O\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \ll O(1)$ を用いると (4.2.3) が得られる. また, 同様に (4.2.4) も (4.1.3) に (4.2.1) を代入すると求められる.

最後に (4.2.5) を求める. (4.1.4) に (4.2.1) を代入すると,

$$\begin{aligned}(\bar{\rho} + \rho') \frac{dz}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + p') + (\bar{\rho} + \rho')g &= \nu \nabla^2 z \\ \bar{\rho} \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \bar{p}(z)}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} + \bar{\rho}g + \rho'g &= \nu \nabla^2 z\end{aligned}$$

ここで基本場に対する静力学の式 (4.2.6) と, $O\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \ll O(1)$ を用いて整理すると,

$$\frac{dz}{dt} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho'g \right) = \nu \nabla^2 z \quad (4.2.5)$$

となり, (4.2.5) が求められた.

付録 A.4 (4.2.8) の導出

(4.1.6) ~ (4.1.8) より,

$$\begin{aligned}
\rho' &= \left(\frac{p}{R\theta\pi} \right)' \\
&= \left\{ \frac{p_0}{R\theta} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{C_v/C_p} \right\}' \\
&= \frac{p_0}{R} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{C_v/C_p} \left(-\frac{\theta'}{\theta^2} \right) + \frac{p_0}{R\theta} \frac{C_v}{C_p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{C_v/C_p-1} \frac{p'}{p_0} \\
&= -\frac{p_0}{R\theta} \frac{p}{p_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{C_v/C_p-1} \left(\frac{\theta'}{\theta} \right) + \frac{C_v}{RC_p} \frac{1}{\theta} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-R/C_p} p' \\
&= -\frac{p}{R\theta} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-R/C_p} \frac{\theta'}{\theta} + \frac{C_v}{RC_p} \frac{\pi}{T} \frac{1}{\pi} p' \\
&= -\frac{p}{R\theta\pi} \frac{\theta'}{\theta} + \frac{C_v}{C_p RT} p' \\
&= -\rho \frac{\theta'}{\theta} + \frac{p'}{C_s^2} \\
&\simeq -\bar{\rho} \frac{\theta'}{\theta} + \frac{p'}{C_s^2}
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

となる. 上式の最後の行への変形は ρ, θ, C_s^2 に対する基本場まわりの線形近似を表し, $\rho', \theta', C_s'^2$ を無視している.

付録 A.5 (4.2.16) の導出

(4.2.16) を導出する. (4.2.1) を (4.2.15) に代入して,

$$\begin{aligned} C_p(\bar{\theta} + \theta') \frac{\partial \pi}{\partial z} + g &= C_p(\bar{\theta} + \theta') \frac{\partial(\bar{\pi} + \pi')}{\partial z} + g \\ &= C_p(\bar{\theta} + \theta') \frac{\partial \pi'}{\partial z} + C_p \theta' \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + \left(C_p \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + g \right) \end{aligned}$$

となる. ここで (4.2.15) から上式右辺二行目の第三項はゼロとなり, さらに (4.2.15) を

$$C_p \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} = -\frac{g}{\bar{\theta}}$$

と変形して代入すると

$$\begin{aligned} C_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial z} + g &= C_p \theta \frac{\partial \pi'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g \\ &\simeq C_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

を得る. ここで上式の二行目への変形は線形近似を表す.

付録 A.6 (4.3.2) の導出

(4.3.2) を導出する. (4.2.8) より,

$$p' \simeq \overline{C_s^2} \left(\rho' + \frac{\theta'}{\overline{\theta} \overline{\rho}} \right) \quad (\text{A.6.1})$$

よって両辺を t で微分し, (4.3.1) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} &\simeq \overline{C_s^2} \left(\frac{\overline{\theta}}{\overline{\rho}} \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right) \\ &= \overline{C_s^2} \left\{ \frac{\overline{\rho}}{\overline{\theta}} \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \left(\frac{\partial \overline{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho} w}{\partial z} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

が得られた. ここで $\frac{\partial \overline{C_s^2}}{\partial t}$, $\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}$, $\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t}$ を無視している.

付録 A.7 (4.3.3) の導出

(4.3.3) を導出する. (4.1.1) を用いて $d\rho/dt$ を求めると,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial\rho u}{\partial x} - \rho\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\rho v}{\partial y} - \rho\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\rho w}{\partial z} - \rho\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
 &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z}\right) - \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
 &= -(\bar{\rho} + \rho')\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{A.7.1}
 \end{aligned}$$

となる. ここで $\bar{\rho} \gg \rho'$ により $\rho'\nabla \cdot \mathbf{u}$ を無視して,

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{4.3.3}$$

を得る.

付録 A.8 (4.3.5) の導出

(4.3.6) を導出する. (4.3.4) の両辺の対数をとると,

$$\begin{aligned}\ln \pi &= \frac{R}{C_v} (\ln \rho R \theta - \ln p_0) \\ &= \frac{R}{C_v} \{ \ln \rho + \ln \theta + \ln(R/p_0) \}\end{aligned}\tag{A.8.1}$$

$\ln(R/p_0)$ は定数であるから, 両辺をさらに t で微分すると,

$$\frac{1}{\pi} \frac{d\pi}{dt} = \frac{R}{C_v} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} \right)\tag{A.8.2}$$

である. これを線形近似して

$$\frac{1}{\bar{\pi}} \frac{d\pi}{dt} = \frac{R}{C_v} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\theta}} \frac{d\theta}{dt} \right)\tag{4.3.5}$$

を得る.

参考文献

浅井富雄, 新田尚, 松野太郎, 2000, 基礎気象学, 朝倉書店, 202pp.

Ikawa, M., Saito, K., 1991: Description of a nonhydrostatic model developed at the Forecast Research Department of the MRI, *Tech. Rep. of the MRI*, **28**, 238pp.

Kato, T., 1997: *Hydrostatic and Non-hydrostatic Simulations of Moist Convection; Review and Further Study*, *Meteorology and Atmospheric Physics*, **63**, 39-51

Kato, T., Saito, K., 1995: *Hydrostatic and non-hydrostatic simulation of moist convection: The applicability of hydrostatic approximation to a high-resolution model*, *J. Meteor. Soc. Japan*, **73**, 58-77.

加藤輝之, 1999: 湿潤対流における非静力学効果, 気象研究ノート, 非静力学モデル, 日本気象学会, **196**, 153-167.

日本気象学会, 1998: 気象科学事典, 東京書籍, 637pp.

Ogura, Y., Takahashi, T., 1971: *Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell*, *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 895-911.

斉藤和雄, 1999: 非静力学モデルの分類, 気象研究ノート, 非静力学モデル, 日本気象学会, **196**, 19-35.

Yamasaki, M., 1986: *A three-dimensional tropical cyclone model with parameterized cumulus convection*, *Papers Meteor. Geophys.*, **37**, 205-234.

Zhang, D.-L., Hsie, E.-Y., Moncrieff, M. W., 1988: *A comparison of explicit and implicit predictions of convective and stratiform precipitating weather systems with a meso- β -scale numerical model*, *Quart. Roy. Meteor. Soc.*, **114**, 31-60.