

ベナール・レイリー型対流の線形論に 関する考察

黒田 美紀

地球および惑星大気科学研究室

2010/03/31

要旨

本研究では, Chandrasekhar, S.(1961) に基づいて, 対流発現の条件について線形安定性解析を行った. まず, 水平方向に無限に広がる流体層で, 熱伝導解のまわりで線形化して支配方程式を導出した. その支配方程式から固有値方程式を導出し, 対流が発現する臨界条件を調べた. その結果, 対流が発生するかどうかはレイリー数という無次元量に依存することが確かめられ, その臨界条件は, レイリー数が臨界レイリー数 657.5 となるときであることが確かめられた.

目次

第1章	はじめに	3
第2章	考える系と境界条件	4
2.1	考える系	4
2.2	境界条件	4
第3章	対流発生条件の導出	6
3.1	線形安定性解析	6
3.2	ブシネスク近似	7
3.3	摂動方程式	10
3.3.1	定常項と摂動項	11
3.3.2	スケーリング	13
3.3.3	摂動方程式の導出	14
3.4	固有値方程式	15
3.4.1	固有値方程式の導出	16
3.4.2	臨界レイリー数の導出	17
第4章	速度場と温度擾乱分布の導出と描画	20

4.1	速度場と温度擾乱分布の導出	20
4.1.1	速度場の導出	20
4.1.2	温度擾乱分布の導出	22
4.2	速度場と温度摂動分布の描画	22
第5章 まとめ		25
付録 A 式の導出		27
A-1	(3.3.22) の導出	27
A-2	(4.1.12), (4.1.14) の導出	29

第1章 はじめに

対流は熱、すなわちエネルギーを運搬するという重要な役割を果たす。もっとも狭い意味の対流である熱対流について説明する。流体の層を下から温めて上から冷やす。そうすると、自然に流れが起こる。これが熱対流である。上昇流の所ところは温度が高く、下降流のところでは温度が低い。それは上昇流のところは下で温められて、下降流のところは上で冷やされているからである。力学的に考えると逆の言い方ができる。すなわち、周囲より温度が高いところは軽いから上昇し、周囲より温度が低いところは重いから下降すると言える。このように、熱対流では力学と熱の両方が密接に関係しながら循環が維持されている。このような流れができると、上昇流は下で熱をもらって上で捨て、下降流は上で熱を捨てて下でもらう。したがって結局、熱が下から上へ運ばれることになる。

本論文の構成を説明する。2章では、Chandrasekhar (1961) で考えている系と境界条件を示す。その設定のもとで、3章では線形安定論を用いて対流発現の条件を導出する。4章では、3章で導出した条件を満たしているときの、速度場と温度分布の様子を鉛直断面において描画する。5章はまとめである。

第2章 考える系と境界条件

この章では, Chandrasekhar, S. (1961) で考える系と境界条件を記す.

2.1 考える系

図 2.1.1 に示すような系を考える. すなわち, 水平方向に無限に広がり, $z = 0$ と $z = d$ に挟まれた薄い流体層を考える. ここで, 流体はブシネスク流体であるとする. この流体層は下から温められており, 温度勾配が一定に保たれている. また, 系に働く力は重力のみで, 内部熱源は考えない. 定常状態にあるとき, この系ではパラメータは z のみに依存する.

2.2 境界条件

ベナール対流では, 境界では温度が一定であるとし, ここでは, $z = 0$ における温度を T_b , $z = d$ における温度を T_t とする. ただし, $T_b > T_t$ である. またここでは, 境界条件として応力なしで鉛直速度 w がゼロであるとする.

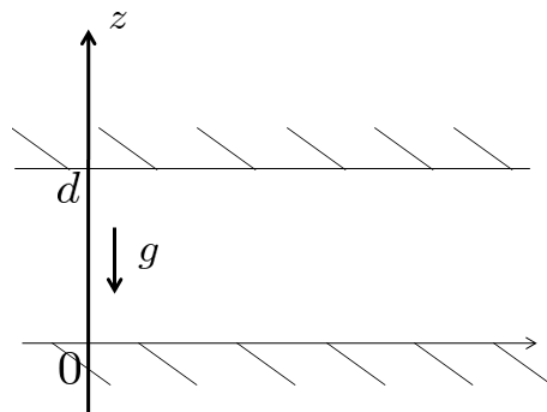


図 2.1.1: 考える系として, 水平方向に無限に広がり $z = 0$ と $z = d$ に挟まれた薄い流体層を考える. 縦軸に z 軸, 横軸に水平方向をとっている.

第3章 対流発生条件の導出

この章では、対流の発生条件を導出する。まず、3.1 節では線形安定論を用いて行う操作の概要を説明する。次に、3.2 節で支配方程式をブシネスク近似し、3.3 節で熱伝導解のまわりで線形化して支配方程式を導出する。最後に、3.4 節で対流が発現するときに系が満たすべき臨界条件を求める。

3.1 線形安定性解析

この節では、線形安定性解析で行う操作の概要を説明する。

パラメータが z のみに依存するような定常状態の系に、ある微小な擾乱を加えることを考える。その擾乱が次第になくなるのであれば系は安定であるといい、擾乱が成長するならば系は不安定であるという。流れを描写する様々な物理変数が微小に変化するとしてこれらの変化の支配方程式を得、系の安定性を考慮する。また、支配方程式を得るにあたっては、微小変化の二次以上の項を無視して線形項のみを残す。

導出した支配方程式の解として、直交関数系の解を考える。2 章で示した系では、2 次元の周期をもつ波によって任意の擾乱を表すことができ、さらに時間に依存する項も分けると、 t は時間、 $A(x, y, z, t)$ は擾乱を表す振幅であるとして、

$$A(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y A_k(z) e^{tp_k} \exp[i(k_x x + k_y y)] \quad (3.1.1)$$

という形の解を考えることができる。ここで、

$$k = \sqrt{(k_x^2 + k_y^2)}$$

は、擾乱 $A_k(z)$ に関する波数であり、 p_k は k によって異なる一定値である。 p_k は一般に虚数である、すなわち、

$$p_k = p_k^{(r)} + ip_k^{(i)} \quad (3.1.2)$$

である. ここで $p_k^{(r)}, p_k^{(i)}$ は k に独立であり, 基本的な流れのパラメータに依存するだろう. (3.1.2) より, (3.1.1) の時間に依存する部分は,

$$e^{tp_k} = \exp\{t(p_k^{(r)} + ip_k^{(i)})\} = \exp\{tp_k^{(r)}\}\exp\{ip_k^{(i)}t\} \quad (3.1.3)$$

となる. $\exp\{ip_k^{(i)}t\}$ は t に対して振動し, $\exp\{p_k^{(r)}t\}$ は t に対して指数関数的に増加, あるいは減少する. したがって, $p_k^{(r)} < 0$ ならば擾乱は減衰し, $p_k^{(r)} > 0$ ならば擾乱が成長する. また, $p_k^{(r)} = 0$ のとき擾乱は減衰も成長もしない.

したがって,

$$p_k^{(r)} < 0$$

となるとき系は安定であり,

$$p_k^{(r)} > 0$$

となるとき系は不安定である. また,

$$p_k^{(r)} = 0 \quad (3.1.4)$$

となるとき系は中立の安定であり, 対流が発生する臨界条件である. 以降の節では, 上記に述べたような手順でを用いて, (3.1.4) となるときに系が満たす条件を導出する.

3.2 ブシネスク近似

2章で述べたように, 流体はブシネスク流体であるとした. そこで, まずこの節では, 支配方程式をブシネスク近似する.

以下のような近似を, ブシネスク近似という.

- 音速を C_s , 流体の速度スケールを U としたとき, $1/C_s^2 \ll 1/U^2$ である. すなわち音波に関わる現象を無視する.
- 圧力は他の熱力学変数と独自に変化する, すなわち圧力の変化によって密度や温度は変化しない.

この近似を用いて,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0, \quad (3.2.1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g \lambda_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right\}, \quad (3.2.2)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(C_p T) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(C_p T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (3.2.3)$$

$$\rho = f(p, T) \quad (3.2.4)$$

を書き換える. 第 1 式は非圧縮流体の連続の式, 第 2 式はニュートン流体の運動方程式, 第 3 式は散逸項と内部加熱を無視した熱力学の式, 第 4 式は状態方程式である. ここで, ρ は密度, t は時間, $x_i(x = (x, y, z))$ は位置, $u_i(u = (u, v, w))$ は速度, p は圧力, g は重力加速度の大きさ, λ_i は z 方向の単位ベクトル, μ は粘性係数, C_p は定圧比熱, T は温度である. ここで, 水平方向に比べて十分に薄い流体層を考えているため物理変数の変化量は微小で, μ, C_p, k は定数であるとする.

まず, 連続の式をブシネスク近似する. (3.2.1) を変形すると,

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\dagger 1} + u_i \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x_i}}_{\dagger 2} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

となる. ここで, $\dagger 1$ は $1/C_s^2 \ll 1/U^2$ よりゼロ, H を水平スケールの大きさ, d を鉛直スケールの大きさとする, $\dagger 2$ は $d/H \ll 1$ よりゼロとなる. したがって, ブシネスク近似した連続の式は,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.2.5)$$

となる.

次に, 熱力学の式をブシネスク近似する. (3.2.3) より,

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = k \nabla^2 T$$

となり,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 T \quad (3.2.6)$$

とする. ここで, $\kappa = k/\rho C_p$ は熱拡散係数である.

さらに、状態方程式をブシネスク近似する。(3.2.4) より、

$$\begin{aligned} d\rho &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p dT \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \rho dp - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p (-\rho)dT \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

となる。ここで、圧力変化は密度変化に影響を及ぼさないので、(3.2.7) は、

$$\begin{aligned} d\rho &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p (-\rho)dT \\ &= -\alpha\rho dT \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$ は体積膨張率である。また定常状態での物理量を、添え字に 0 を付けて表すことにすると、 $d\rho, dp, dT$ はそれぞれ、 ρ_0, p_0, T_0 からの変化量である。今後の議論における整合性を考えて、それらを ρ', p', T' と書くことにすると、

$$\rho' = -\alpha\rho T' \quad (3.2.8)$$

となるまた、物理変数の変化量は微小であるとしたので、 ρ を定常状態での密度 ρ_0 と置き、

$$\rho' = -\alpha\rho_0 T' \quad (3.2.9)$$

が得られる。

最後に、運動方程式をブシネスク近似する。(3.2.2) に (3.2.5) を代入し変形すると、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g\lambda_i + \nu \nabla^2 u_i \quad (3.2.10)$$

となる。ここで、 $\nu = \mu/\rho$ は動粘性係数である。また、圧力を静水圧 p_0 とそこからの微小な偏差 p' の和で、密度を ρ_0 とそこからの微小な偏差 ρ' の和で表すと、それぞれ、

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p', \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \end{aligned}$$

と書ける。このとき、(3.2.10) の右辺第 1, 2 項 (圧力傾度の項と外力項) は、

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g\lambda_i = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial(p_0 + p')}{\partial x_i} - g\lambda_i$$

となる. さらにテイラー展開を用い, 微小項の 2 次以上の項を無視すると,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g\lambda_i &= -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial(p_0 + p')}{\partial x_i} - g\lambda_i \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} - g\lambda_i \end{aligned}$$

と変形される. また, 静水圧の式 $\rho_0 g\lambda_i = -\frac{\partial p_0}{\partial x_i}$ より,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g\lambda_i &= g\lambda_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\rho'}{\rho_0} g\lambda_i - g\lambda_i \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\rho'}{\rho_0} g\lambda_i \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

となる. よって, (3.2.10), (3.1.11) より, ブシネスク近似した運動方程式は,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\rho'}{\rho_0} g\lambda_i + \nu \nabla^2 u_i \quad (3.2.12)$$

となる.

よって, ブシネスク近似をした, 連続の式, 運動方程式, 熱力学の式, 状態方程式をまとめると,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\rho'}{\rho_0} g\lambda_i + \nu \nabla^2 u_i, \quad (3.2.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 T, \quad (3.2.6)$$

$$\rho' = -\alpha \rho_0 T' \quad (3.2.9)$$

となる.

3.3 摂動方程式

定常状態にある流体層において, 微小な摂動を加えたときの安定性を考える. そのために必要な摂動方程式を, 支配方程式から導出する.

3.3.1 定常項と摂動項

パラメータを定常状態と微小摂動によって生じた擾乱とに分離する。定常状態を表すパラメータには 0 を、擾乱を表すパラメータには ' を付すことにすると、各パラメータは以下のように表される。

$$u_j = u_{j0} + u_j', \quad (3.3.1)$$

$$T = T_0 + T', \quad (3.3.2)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad (3.3.3)$$

$$p = p_0 + p'. \quad (3.3.4)$$

また以降では、 $z = 0$ での値を表すパラメータに添字に b を付す。

ここで、 $u_{j0} = 0, T_0 = T_0(x_j \lambda_j) = T_0(z)$ として、定常解を考察する。まず、(3.2.6) に定常解を代入すると、

$$\kappa \nabla^2 T_0 = 0$$

$$\nabla^2 T_0 = 0$$

となる。さらに、 $T_0 = T_0(z)$ であることを考慮し、 T_0 の z 方向の温度勾配が $\beta (> 0$ 定数) であるとしてこれを解くと、

$$\nabla T_0 = -\beta$$

$$T_0 = T_b - \beta x_j \lambda_j \quad (3.3.5)$$

と書ける。

また、(3.2.9) より、

$$\rho_b - \rho_0 = -\alpha \rho_b (T_b - T_0)$$

$$\rho_0 = \alpha \rho_b (T_b - T_b + \beta z) + \rho_b$$

$$= \rho_b (1 + \alpha \beta z) \quad (3.3.6)$$

を得る。

さらに、(3.2.12) に定常解を代入すると、

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} - g \lambda_i$$

すなわち、

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g \quad (3.3.7)$$

である。これに (3.3.6) を代入して変形すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_0}{\partial z} &= -\rho_b(1 + \alpha\beta z)g \\ p_0 &= p_b - \rho_b \left(z + \frac{1}{2}\alpha\beta z^2 \right)\end{aligned}\quad (3.3.8)$$

を得る。

支配方程式に定常解を代入したものと, (3.3.1-4) を代入したものの差をとることによって, 摂動に関する支配方程式を導出する。

まず, 連続の式 (3.2.5) は,

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.3.9)$$

となる。

運動方程式については, (3.3.1-4) を代入することによって,

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\rho'}{\rho_0} g \lambda_i + \nu \nabla^2 u'_i$$

となる。また, 摂動の二次以上の項は小さいとして無視すると,

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} = -\frac{\rho'}{\rho_0} g \lambda_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u'_i \quad (3.3.10)$$

が得られる。

最後に, 熱力学の式 (3.2.6) を変形する。定常解を (3.2.6) に代入すると,

$$\kappa \nabla^2 T_0 = 0$$

となり, (3.3.1-4) を代入すると,

$$\frac{\partial(T_0 + T')}{\partial t} + u'_j \frac{\partial(T_0 + T')}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 (T_0 + T')$$

となる。これらの差をとると,

$$\frac{\partial(T_0 + T')}{\partial t} + u'_j \frac{\partial(T_0 + T')}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 T'$$

となり, T_0 が定常解であることと, (3.3.5) を考慮し, 摂動の二次以上の項は小さいとして無視すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_j \frac{\partial(T_b - \beta x_i \lambda_i + T')}{\partial x_j} &= \kappa \nabla^2 T' \\ \frac{\partial T'}{\partial t} - \beta u'_j \lambda_j + u'_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} &= \kappa \nabla^2 T' \\ \frac{\partial T'}{\partial t} - \beta w' &= \kappa \nabla^2 T'\end{aligned}\quad (3.3.12)$$

を得る. ここで, $w' (= u'_j \lambda_j)$ は鉛直方向の擾乱の速度である.

3.3.2 スケーリング

この節では, 先に導出した (3.3.9), (3.3.10) と (3.3.12) をスケーリングする. これらを再掲する.

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.3.9)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} = -\frac{\rho'}{\rho_0} g \lambda_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u'_i, \quad (3.3.10)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - \beta \lambda_j u'_j = \kappa \nabla^2 T'. \quad (3.3.12)$$

長さスケールを d , 温度スケールは, βd である. また, 時間スケールを d^2/ν にとると, 速度スケールは ν/d となる. これより, 無次元数に * を付す.

まず, (3.3.9) は,

$$\frac{\partial u_j^*}{\partial x_j^*} = 0 \quad (3.3.13)$$

となりスケーリングされた.

また, (3.3.10) を変形すると,

$$\begin{aligned}\frac{\nu^2}{d^3} \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} &= -\alpha \beta d T^{*'} g \lambda_i - \frac{\nu^2}{d^3} \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p^{*'}}{\partial x_i^*} + \frac{\nu}{d^3} \nu \nabla^{*2} u_i^* \\ \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} &= \frac{-\alpha \beta g d^4}{\nu^2} T^{*'} \lambda_i - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p^{*'}}{\partial x_i^*} + \nabla^{*2} u_i^* \\ \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} &= \frac{Ra}{Pr} T^{*'} \lambda_i - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p^{*'}}{\partial x_i^*} + \nabla^{*2} u_i^*\end{aligned}\quad (3.3.14)$$

ここで、レイリー数とプラントル数はそれぞれ、

$$Ra = \frac{\alpha\beta g}{\kappa\nu} d^4, \quad (3.3.15)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (3.3.16)$$

となることを用いた。最後に、(3.3.12) は、

$$\begin{aligned} \frac{\beta\nu}{d} \frac{\partial T^{*'}}{\partial t^*} - \frac{\beta\nu}{d} w^{*'} &= \frac{\beta}{d} \kappa \nabla^{*2} T^{*'} \\ \frac{\partial T^{*'}}{\partial t^*} - w^{*'} &= \frac{\kappa}{\nu} \nabla^{*2} T^{*'} \\ \frac{\partial T^{*'}}{\partial t^*} - w^{*'} &= \frac{1}{Pr} \nabla^{*2} T^{*'} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

となる。

ここで、レイリー数についての考察を行う。(3.3.15) より、

$$Ra = \frac{\alpha g \beta}{\kappa \nu} d^4 = \frac{(\sqrt{\alpha g \beta d / d})^{-2}}{(d^2 / \nu)^{-1} (d^2 / \kappa)^{-1}} \quad (3.3.17)$$

となり、 τ_B を浮力の時間スケール、 τ_ν を粘性の時間スケール、 τ_κ を熱伝導の時間スケールとすると、

$$Ra = \frac{\tau_B^{-2}}{\tau_\nu^{-1} \tau_\kappa^{-1}} = \frac{\tau_\nu \tau_\kappa}{\tau_B^2} \quad (3.3.18)$$

と書ける。よって、レイリー数が小さいうちは、浮力によって運動が生じる前に、熱伝導と粘性によって場が一様化されるため対流は起こらず、レイリー数が大きくなると、熱伝導と粘性によって場が一様化される前に浮力による運動が生じて、対流が起こると解釈できる。

3.3.3 摂動方程式の導出

この節では、先に導出した (3.3.13), (3.3.14) と (3.3.16) から摂動方程式を導出する。無次元を表す * を省略してこれらを再掲する。

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.3.13)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} = \frac{Ra}{Pr} T' \lambda_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nabla^2 u'_i, \quad (3.3.14)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - w' = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T'. \quad (3.3.16)$$

(3.3.14) の両辺の回転をとると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} &= \frac{Ra}{Pr} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial T'}{\partial x_j} \lambda_k - \frac{1}{\rho_0} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_j \partial x_k} + \nabla^2 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \omega'_i}{\partial t} &= \frac{Ra}{Pr} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial T'}{\partial x_j} \lambda_k + \nabla^2 \omega'_i\end{aligned}\quad (3.3.19)$$

となる. ここで, $\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} = \omega_i (\boldsymbol{\omega} = (\mu, \nu, \zeta))$ と置いた. さらに, この両辺の z 成分をとると,

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = \nabla^2 \zeta' \quad (3.3.20)$$

を得る.

また, (3.3.16) の両辺の回転をとると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_j} = \frac{Ra}{Pr} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_l \partial x_j} \lambda_m + \nabla^2 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_j} \quad (3.3.21)$$

となり, 両辺の z 成分をとると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w' = \frac{Ra}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial^2 y^2} \right) + \nabla^4 w' \quad (3.3.22)$$

が得られる^{*1}. 摂動方程式は, (3.3.16), (3.3.20), (3.3.22) である.

3.4 固有値方程式

この節では, 前節で導かれた摂動方程式から固有値方程式を導出し, 系が満たすべき臨界条件を求める.

^{*1}(3.3.22) の導出は付録 A-1 を参照.

3.4.1 固有値方程式の導出

前節で導出された摂動方程式を再掲する.

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = \nabla^2 \zeta', \quad (3.3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w' = \frac{Ra}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right) + \nabla^4 w', \quad (3.3.22)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - \beta \lambda_j u'_j = \kappa \nabla^2 T'. \quad (3.3.16)$$

この摂動方程式の各パラメータの解を, 直交関数系と考え,

$$\zeta' = Z'(z) \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}, \quad (3.4.1)$$

$$w' = W'(z) \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}, \quad (3.4.2)$$

$$T' = \Theta'(z) \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \quad (3.4.3)$$

と置く. ここで, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ で, a/d は水平波数であり, σ は成長率である. これらより,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \sigma, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= -a^2, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \end{aligned}$$

が成り立ち, これらを摂動方程式に代入すると,

$$\sigma Z' = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right) Z', \quad (3.4.4)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 - \sigma \right) W' = \frac{Ra}{Pr} a^2 \Theta', \quad (3.4.5)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 - Pr\sigma \right) \Theta' = -Pr W' \quad (3.4.6)$$

が成り立つ. (3.4.5,6) から Θ を消去すると, 固有方程式,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 - \sigma \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 - Pr\sigma \right) W' = -(Ra) a^2 W' \quad (3.4.7)$$

が導かれる.

3.4.2 臨界レイリー数の導出

先で導出した固有値方程式を、臨界条件のもとで解く。臨界状態になるのは、成長率がゼロのときである。(3.4.7) に $\sigma = 0$ を代入すると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2\right)^3 W' = -(Ra)a^2 W' \quad (3.4.8)$$

を得る。

ここで、固有値方程式の解を得るために、 W' の境界条件を導出する。 $w = 0, w_0 = 0$ より、境界上では w' はゼロなので、(3.3.1) と (3.4.2) より、

$$W' = 0 \quad (3.4.9)$$

である^{*2}。また応力 P_{ij} は、

$$P_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

であり、応力なし条件より、

$$P_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (3.4.10)$$

$$P_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3.4.11)$$

が成り立つ。また、連続の式を両辺 z で微分すると、(3.4.10), (3.4.11) より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right\} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned}$$

すなわち、

$$\frac{\partial^2 W'}{\partial z^2} = 0 \quad (3.4.12)$$

^{*2}(3.4.9) を導出する。まず、(3.3.1) と (3.4.2) を再掲する。

$$u_j = u_{j0} + u'_j, \quad (3.3.1)$$

$$w' = W'(z) \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}. \quad (3.4.2)$$

(3.3.1) と $w = w_0 = 0$ より、 $w' = 0$ となる。したがって、(3.4.2) より、

$$W' = 0 \quad (3.4.9)$$

が導かれる。

となる。したがって、境界条件をまとめると、

$$W' = 0, \frac{\partial^2 W'}{\partial z^2} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (3.4.13)$$

となる。これを満たす条件は、

$$W' = A \sin n\pi z, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.4.14)$$

である。ここで、 A は定数である。これを、(3.4.8) に代入すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right)^3 A \sin n\pi z &= -(Ra)a^2 A \sin n\pi z \\ ((-n\pi)^2 - a^2)^3 A \sin n\pi z &= -(Ra)a^2 A \sin n\pi z \\ Ra &= \frac{\{(n\pi)^2 + a^2\}^3}{a^2} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

を得る。 $n = 1$ のモードでは、(3.3.16) は、

$$Ra = \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2} \quad (3.4.17)$$

となる。このときのレイリー数と a の関係は、図 3.4.1 のようになる。

グラフ左下の直線の交点は、レイリー数が最小になる点であり、このときのレイリー数を臨界レイリー数という。このようになる条件は、

$$\frac{\partial Ra}{\partial a^2} = \frac{3(\pi^2 + a^2)^2}{a^2} - \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^4} = 0 \quad (3.4.18)$$

すなわち、

$$3a^2 = \pi^2 + a^2, \quad a^2 = \pi^2/2 \sim 2.2 \quad (3.4.19)$$

である。したがって、臨界レイリー数 Ra_c は、

$$Ra_c = \frac{(\pi^2 + \pi^2/2)^3}{\pi^2/2} = \frac{27\pi^4}{4} \sim 657.5 \quad (3.4.20)$$

となる。

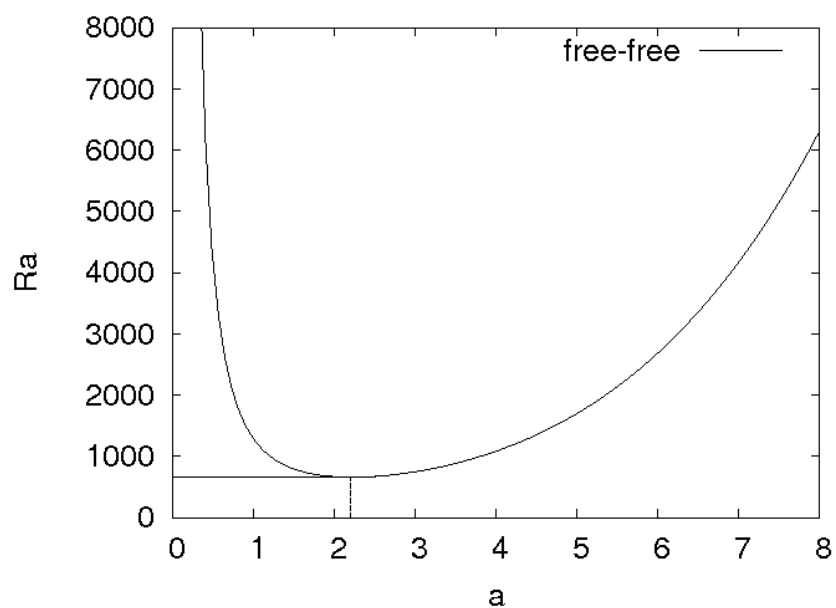


図 3.4.1: レイリー数と a の関係. この曲線上では中立の安定状態であり, 臨界状態である. この曲線より下側では系は安定で, この曲線より上側では系は不安定である. グラフ左下の直線の交点は, 臨界状態になる最小のレイリー数 (臨界レイリー数) を表している.

第4章 速度場と温度擾乱分布の導出と描画

4.1 速度場と温度擾乱分布の導出

4.1.1 速度場の導出

水平方向の速度成分を求める。いま,

$$u' = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, v' = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.1.1)$$

と書ける。ここで, ϕ は速度ポテンシャル, ψ は流線関数である。また, 連続の式より,

$$-\frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -a^2 \phi$$

すなわち,

$$\phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial w'}{\partial z} \quad (4.1.2)$$

が成り立つ。一方, 渦度の定義より,

$$\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = a^2 \psi$$

すなわち,

$$\psi = -\frac{1}{a^2} \zeta' \quad (4.1.3)$$

が成り立つ。よって, (4.1.1,2) は, (3.4.1,2) より,

$$u' = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \right\}, \quad (4.1.4)$$

$$v' = -\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \right\} \quad (4.1.5)$$

となる.

(3.4.2) と (3.4.14)^{*1} より w' は,

$$w' = A \sin n\pi z \{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \quad (4.1.6)$$

が得られ, また (3.4.10), (3.4.11) より^{*2},

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial z} = 0 \quad (4.1.7)$$

であり, (3.4.1)^{*3} を用いると,

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (4.1.8)$$

となるので,

$$Z' = B \cos n\pi z, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1.9)$$

が得られる. ここで, B は定数である. したがって, となり, (3.4.1) より ζ' は,

$$\zeta' = B \cos n\pi z \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \quad (4.1.10)$$

となる.

^{*1}(3.4.2) と (3.4.14) を再掲する.

$$w' = W'(z) \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}, \quad (3.4.2)$$

$$W' = A \sin n\pi z, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.4.14)$$

^{*2}(3.4.10) と (3.4.11) を再掲する.

$$P_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (3.4.10)$$

$$P_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (3.4.11)$$

^{*3}(3.4.1) を再掲する.

$$\zeta' = Z'(z) \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}. \quad (3.4.1)$$

よって, (4.1.4,5) に (4.1.7) と (4.1.12) を代入することによって,

$$u' = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \right\} \quad (4.1.11)$$

$$= \frac{i}{a^2} [(a_x A n \pi + a_y B) \cos n \pi z] \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}, \quad (4.1.12)$$

$$v' = -\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \right\} \quad (4.1.13)$$

$$= -\frac{i}{a^2} [(a_y A n \pi - a_x B) \cos n \pi z] \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \quad (4.1.14)$$

が得られる*4.

4.1.2 温度擾乱分布の導出

温度場の式を導出する. 境界条件は, $T' = 0$, すなわち (3.4.3)*5 より $\Theta'(z) = 0$ なので,

$$\Theta' = C \sin n \pi z \quad (4.1.16)$$

となる. ここで, C は定数である. よって,

$$\begin{aligned} T' &= \Theta' \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \\ &= C \sin n \pi z \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

が導かれる.

4.2 速度場と温度摂動分布の描画

この節では, 臨界状態における $x - z$ 平面での速度場と温度摂動の分布を描画する. 水平方向の速度の u' と温度摂動の T' を用いる. まず, (4.1.12), (4.1.16) と

*4導出は付録 A-2 を参照.

*5(3.4.3) を再掲する.

$$T' = \Theta'(z) \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}. \quad (3.4.3)$$

(4.1.16)^{*6} に, $n = 1, \sigma = 0, y = 0$ を代入し, 実部をとると,

$$u' = -\frac{1}{a^2} [(a_x A \pi + a_y B) \cos \pi z] \sin a_x x, \quad (4.2.1)$$

$$w' = A \sin \pi z \cos a_x x, \quad (4.2.2)$$

$$T' = C \sin \pi z \cos a_x x \quad (4.2.3)$$

となる.

地球流体電脳倶楽部によって開発された, DCL ライブラリを用いて, $x - z$ 平面での速度場と温度摂動の分布を描画する. ここで, 簡単のために $A = B = C = 1, a_x = a/\sqrt{2} = \pi/2$ とすると, 図 4,2,1 のようになる.

また, $A = C = 1, a_x = a/\sqrt{2} = \pi/2$ として (4.2.2) と (4.2.3) の積の取ると,

$$\begin{aligned} w' T' &= \left(\sin \pi z \cos \frac{\pi}{2} x \right) \left(\sin \pi z \cos \frac{\pi}{2} x \right) \\ &= \sin^2 \pi z \cos^2 \frac{\pi}{2} x \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos \pi x) \sin^2 \pi z \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

となる. ここで, x 方向の平均を,

$$\overline{(\quad)}^x = \frac{1}{2X} \int_0^{2X} (\quad) dx \quad (4.2.5)$$

とする. ここで, $2X$ は周期である. (4.2.4) の x 方向の一周期での平均をとると,

$$\begin{aligned} \overline{w' T'}^x &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 + \cos \pi x) \sin^2 \pi z dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right) \right]_0^\pi \sin^2 \pi z \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \pi z \geq 0 \end{aligned}$$

となる. よって, 鉛直方向に熱輸送が行われていることが確認できる.

^{*6}(4.1.12), (4.1.6) と (4.1.16) を再掲する.

$$u' = \frac{i}{a^2} [(a_x A n \pi + a_y B) \cos n \pi z] \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}, \quad (4.1.12)$$

$$w' = A \sin n \pi z \{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}, \quad (4.1.6)$$

$$T' = C \sin n \pi z \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}. \quad (4.1.16)$$

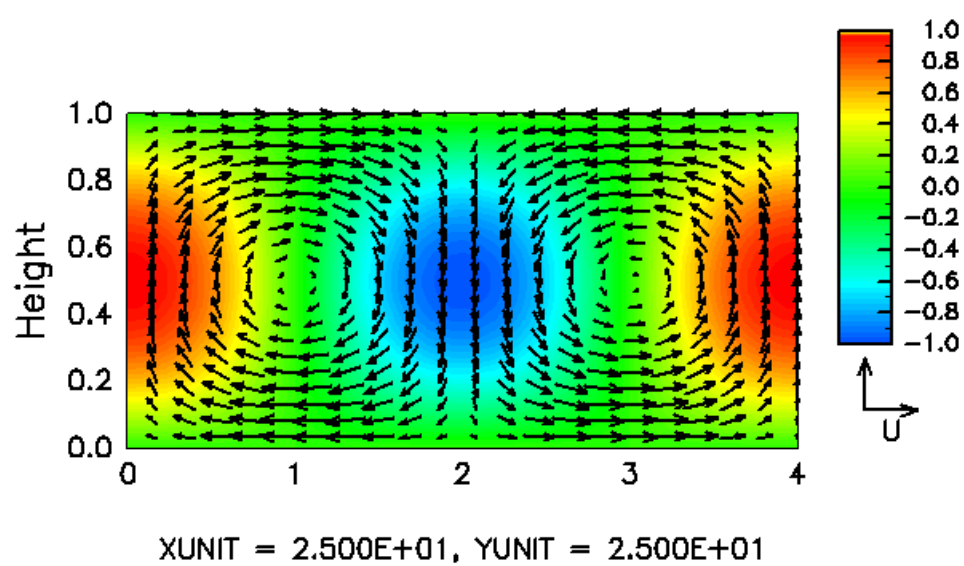


図 4.2.1: $x-z$ 平面での速度場と温度摂動の分布. 矢印が速度場を, コンターが温度摂動の分布を表す. 温度の高いところで上昇流が, 温度の低いところで下降流が生じていることが分かる.

第5章 まとめ

本研究では, Chandrasekhar, S.(1961) に基づいて, 線形安定性理論を用いて対流発現の条件を導出し, その時の場を描画した. その結果, ベナール対流の臨界レイリー数は 657.5 であり, 臨界波数は 2.2 であることが確かめられ, その時に対流が発生している様子が確認された.

さらに, レイリー数は (熱伝導の時間スケール) \times (粘性の時間スケール) / (浮力の時間スケール)² で表されることから, 対流が起こるとき, 熱伝導と粘性によって場が一様化される前に浮力による運動が生じていることが分かった. また, 鉛直速度の擾乱と温度擾乱の積の x 方向の平均をとることによって, 鉛直方向に熱が輸送されていることが確かめられた.

謝辞

本論文の執筆にあたり、多くの方々ご指導ならびにご協力をいただきました。林祥介教授には、本論文の指針をいただきました。岩山隆寛准教授には、発表資料についてのご指導と助言をいただきました。佐々木洋平氏、今関翔氏、北野太郎氏には、発表資料ならびに本論文の作成にあたり多くの助言とご指導をいただきました。地球および惑星大気科学研究室の皆様には、激励や助言をいただきました。ここに深く感謝の意を示し、心より御礼申し上げます。

図の作成にあたっては、地球流体電脳倶楽部によって開発された DCL ライブラリを使用させていただきました。

付録 A 式の導出

A-1 (3.3.22) の導出

(3.3.22) を導出する. まず, (3.3.21) を再掲する.

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_j} = \frac{Ra}{Pr} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_l \partial x_j} \lambda_m + \nabla^2 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_j}. \quad (3.3.21)$$

ここで,

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

が成り立つ. これと連続の式を用いると,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_j} &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 u'_m}{\partial x_j \partial x_l} \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 u'_m}{\partial x_j \partial x_l} \\ &= \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ &= -\nabla^2 u'_i \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_l \partial x_j} \lambda_m &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 T'}{\partial x_l \partial x_j} \lambda_m \\ &= \frac{\partial^2 T'}{\partial x_i \partial x_j} \lambda_j - \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j \partial x_j} \lambda_i \\ &= \frac{\partial^2 T'}{\partial x_i \partial x_j} \lambda_j - \nabla^2 T' \lambda_i \end{aligned}$$

となる. これを (3.3.21) に代入し整理すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u'_i = \frac{Ra}{Pr} \left(-\frac{\partial^2 T'}{\partial x_i \partial x_j} \lambda_j + \nabla^2 T' \right) + \nabla^4 u'_i \quad (A-1-1)$$

が得られる。さらに、両辺の z 成分をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w' = \frac{Ra}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right) + \nabla^4 w' \quad (3.3.22)$$

となり (3.3.22) が得られる。

A-2 (4.1.12), (4.1.14) の導出

(4.1.12), (4.1.14) を導出する. まず, 導出に必要な式を再掲する.

$$u' = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \right\}, \quad (4.1.11)$$

$$v' = -\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \right\}, \quad (4.1.13)$$

$$w' = A \sin n\pi z \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.1.6)$$

$$\zeta' = B \cos n\pi z \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1.10)$$

(4.1.11), (4.1.13) に, (4.1.6) と (4.1.10) をそれぞれ代入すると,

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \right\} \\ &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} [W' \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}] + Z' \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \right) \\ &= \frac{1}{a^2} \left[i a_x \frac{\partial W'}{\partial z} \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} + i a_y Z' \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \right] \\ &= \frac{i}{a^2} \left[a_x \frac{\partial W'}{\partial z} + a_y Z' \right] \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \\ &= \frac{i}{a^2} \left[a_x \frac{\partial (A \sin n\pi z)}{\partial z} + a_y B \cos n\pi z \right] \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \\ &= \frac{i}{a^2} [a_x A n \pi \cos n\pi z + a_y B \cos n\pi z] \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \\ &= \frac{i}{a^2} [(a_x A n \pi + a_y B) \cos n\pi z] \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \right\} \\ &= -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} [W' \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}] - Z' \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \right) \\ &= -\frac{1}{a^2} \left[i a_y \frac{\partial W'}{\partial z} \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} - i a_x Z' \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \right] \\ &= -\frac{i}{a^2} \left[a_x \frac{\partial W'}{\partial z} - a_y Z' \right] \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \\ &= -\frac{i}{a^2} [a_y A n \pi \cos n\pi z - a_x B \cos n\pi z] \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \\ &= -\frac{i}{a^2} [(a_y A n \pi - a_x B) \cos n\pi z] \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\} \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

となり, (4.1.12) および (4.1.14) が導出される.

参考文献

- Chandrasekhar, S. 1961: Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability, Dover, pp.1 - 27, pp.34 - 36
- 浅井富雄著, 1983: 大気対流の科学, 東京堂出版, pp. 220
- 九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻編, 2001: 地球環境を学ぶための流体力学, 成山堂書店, pp. 323
- 竹村和人, 2008: 2次元ベナール・レイリー型対流の数値シミュレーション, 神戸大学卒業論文