

大気の射出限界と鉛直温度分布の関係 についての考察

井谷 優花
神戸大学理学部 地球惑星科学科

平成 22 年 4 月 22 日

要旨

本論文では、大気の放射過程に関する基礎知識を整理し、Nakajima *et al.* (1992) のレビューを行った。レビューでは、まず放射平衡状態にある成層圏と飽和状態の対流圏界面で構成される大気モデルを考え、その上端から射出される惑星放射には上限値 (Komabayashi-Ingersoll 限界) があることを確かめた。続けて対流圏も含めた大気モデルを考え、大気組成や温度分布と射出限界との関係について考察を行った。その結果、Nakajima *et al.* (1992) でも述べられているように、惑星放射には Komabayashi-Ingersoll 限界以外の限界値が存在することが確かめられ、その原因は対流圏の温度分布や光学的深さ、惑星放射の放射特性にあることが分かった。

目次

第1章 序論	2
第2章 放射の基礎法則	3
2.1 放射とは何か	3
2.2 放射量の定義	3
2.3 射出係数と吸収係数	4
2.4 黒体放射	5
2.5 放射伝達	6
第3章 モデル	8
3.1 仮定	8
3.2 基礎方程式	9
3.2.1 放射伝達	9
3.2.2 放射平衡解	11
3.2.3 擬湿潤断熱勾配	12
第4章 大気の射出限界と温度分布	14
4.1 成層圏の射出限界	14
4.2 対流圏を含めた大気の射出限界	16

	2
第5章 まとめ	20
謝辞	21
参考文献	22
付録	23

第1章 序論

現在の地球型惑星の中で、表面に水の海が存在するのは地球だけである。したがって、どのような条件が揃えば表面に水の海が存在できるのかを知ることは、地球の特性を知る上で重要であると考えられる。海が存在条件を考える上では、「暴走温室状態」の概念が非常に重要である。暴走温室状態は温室効果不安定とも呼ばれ、大気が放射できるエネルギーを超えて太陽放射が入射している状態をさす。このとき、大気と海は平衡状態では存在できず、地表面の温度上昇にともなって海水はすべて蒸発してしまう。

Nakajima *et al.* (1992) では、灰色湿潤大気の 1 次元放射対流平衡モデルを用いて、暴走温室状態の原因となる大気鉛直温度分布と惑星放射の関係について調べた。本研究では、Nakajima *et al.* (1992) の研究結果の再現に向けて、まず放射過程に関する基礎知識を整理し、そのあとに Nakajima *et al.* (1992) に従って大気の射出限界についての考察を行った。ここでは特に、成層圏モデルにおける射出限界と、地表面気圧が地球とほぼ同じ約 10^5 Pa である対流圏を含めた大気モデルにおける射出限界に注目し、考察を行う。

本論文の構成を述べる。まず第二章で放射の定義と基本法則について述べた後、第三章で計算モデルの説明を行う。続く第四章では計算で得られた結果や Nakajima *et al.* (1992) で示されている図や考察から、湿潤大気温度分布と大気射出限界の関係について考察をおこなう。第五章はまとめである。

第2章 放射の基礎法則

ここでは、放射過程におけるの基礎的な法則と放射伝達方程式について述べる。

2.1 放射とは何か

放射とは電磁波である。放射は真空中であっても伝達し熱エネルギーを運ぶため、惑星の温度や大気の鉛直温度分布を考える上で非常に重要である。

放射はその波長領域によって可視光線、赤外線などの名前がつけられている。可視光は約 $0.38\mu\text{m} \sim 0.78\mu\text{m}$ の波長をもっており、太陽放射に多く含まれている。赤外線は一般的には近赤外線 ($0.78\mu\text{m} \sim 3\mu\text{m}$)、中赤外線 ($3\mu\text{m} \sim 6\mu\text{m}$)、遠赤外線 ($6\mu\text{m} \sim 1000\mu\text{m}$) の3つに分類されるが、太陽放射の波長と地球放射の波長が $5\mu\text{m}$ を境目にほぼ分離していることから、気象学においては $5\mu\text{m}$ の赤外線は近赤外線とよび、 $5\mu\text{m}$ よりも波長の長い赤外線を単に赤外線と呼ぶ。また、波長 λ と振動数 ν には次のような関係がある。

$$\lambda = \frac{c}{\nu}. \quad (2.1)$$

ここで $c = 2.99793 \times 10^8 \text{ m/s}$ ^{*1}は光速である。

2.2 放射量の定義

図 2.1 のような系を考える。今、振動数が ν と $\nu + d\nu$ の間である放射が、微小平面 dS を通り、天頂角 θ 方向の立体角 $d\omega$ へ進む場合を考えると、時間 dt あたりの放射エネルギー dQ_ν は

$$dQ_\nu = I_\nu \cos \theta dS d\omega d\nu dt \quad (2.2)$$

と表現される。 I_ν は放射の強さを表す係数であり、放射輝度と呼ばれる。単位は $\text{J}/(\text{m}^2 \text{ sr})$ である。次に、面 dS の片方側から反対側の半球側へ進む放射の全エネルギーは放射フラックス F_ν と呼ばれ、次のように書ける。

$$F_\nu = \int_{\omega} I_\nu \cos \theta d\omega. \quad (2.3)$$

^{*1}会津勝, 1954: 大気と放射過程より引用。

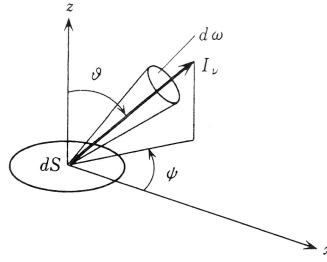


図 2.1: 放射輝度の定義 (会田勝, 1954: 大気と放射過程)

立体角 $d\omega$ は, 天頂角 θ と方位角 ϕ を用いて $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$ と書けるので, 上式を極座標系 (θ, ϕ) で表現すると

$$F_\nu = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu(\theta, \phi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.4)$$

となる. より一般には, 放射輝度 I_ν は θ と ϕ の関数であるが, 放射輝度分布が方向に依らない, すなわち等方的である場合には, (2.4) 式の積分は,

$$F_\nu = \pi I_\nu \quad (2.5)$$

と計算できる.

2.3 射出係数と吸収係数

断面積 dS , 長さ dl , 密度 ρ の円筒を考える. 振動数が ν と $\nu + d\nu$ の間にあり放射輝度が I_ν である放射が, 立体角 $d\omega$ で dt 時間に入射し, 円筒を通過したあとの放射輝度が $I_\nu + dI_\nu$ になったとする. このとき円筒内で吸収された放射エネルギーは

$$\begin{aligned} \{(I_\nu + dI_\nu) - I_\nu\} dS d\omega d\nu dt &= -k_\nu I_\nu \rho dl dS d\omega d\nu dt \\ dI_\nu &= -k_\nu I_\nu \rho dl \end{aligned} \quad (2.6)$$

と表される. ここで k_ν は振動数 ν の放射に対する単位質量当たりの消散係数であり, 吸収による減衰と散乱による減衰の両方を表す.

一方, 円筒を通過している間に, 放射輝度は円筒内で生じる放射や別の方向からの散乱によって強められる. このときの変化量は

$$dI_\nu = j_\nu \rho dS \quad (2.7)$$

と表される. ここで j_ν は振動数 ν の放射に対する射出係数である. 放射輝度の消散と射出の両方を考慮すると, 放射輝度の変化は

$$dI_\nu = -k_\nu I_\nu \rho dS + j_\nu \rho dS, \quad (2.8)$$

または, 放射源関数 $J_\nu \equiv j_\nu/k_\nu$ を用いて

$$\frac{dI_\nu}{k_\nu \rho dl} = -I_\nu + J_\nu \quad (2.9)$$

と表される. (2.9) を放射伝達方程式と呼ぶ.

2.4 黒体放射

キルヒホッフの法則

全ての振動数の放射を吸収できる媒質を黒体と呼ぶ. 黒体の放射輝度は温度 T のみに依存し, プランク関数:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2(e^{h\nu/kT} - 1)} \quad (2.10)$$

で与えられる. ここで, $h = 6.6262 \times 10^{-34}$ Js はプランク定数, $k = 1.3806 \times 10^{-23}$ J/K^{*2} はボルツマン定数である.

壁が黒体で出来た空洞を考える. この系の中が熱力学的平衡にあるとき, 媒質の単位質量あたりの射出量と吸収量は一致している. このとき, 放射源関数 $J_\nu = j_\nu/k_\nu$ は温度と振動数のみの関数となり, プランク関数で与えられる:

$$J_\nu = B_\nu. \quad (2.11)$$

これをキルヒホッフの法則という.

キルヒホッフの法則が成り立つとき, 射出係数が吸収係数とプランク関数の積で求められるため, 測定で得られる吸収係数を使って放射伝達方程式の解が形式的に求められるようになる.

ステファン・ボルツマンの法則

プランク関数を全振動数に渡って積分すると,

$$\int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{2\pi^4 k}{15h^3 c^2} T^4 \quad (2.12)$$

^{*2}会津勝, 1954: 大気と放射過程 より引用

となる^{*3}. (2.5) 式と同様に考えると, 黒体の表面から射出される放射フラックスは

$$F = \pi B = \sigma T^4 \quad (2.13)$$

と書ける. 上式は単位時間, 単位面積当たりに黒体が放射するエネルギーが温度の 4 乗に比例することを表しており, ステファン・ボルツマン法則という. 比例定数 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/(m² K⁴) はステファン・ボルツマン定数と呼ばれる.

ウィーンの変位則

黒体の放射輝度が最大となる波長 λ は, 黒体の温度に反比例し,

$$\lambda = \frac{0.2898}{T} \times 10^{-2}(\text{m}) \quad (2.14)$$

を満たす. これをウィーンの法則という. 上式はプランク関数の波長表現 B_λ を波長について微分し,

$$\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = 0 \quad (2.15)$$

を解くことで得られる^{*4}.

2.5 放射伝達

ビアー・ブーゲー・ランバートの法則

いま, 射出による放射輝度の変化 (例えば, 大気中で日射の散乱や, 大気による射出による変化) がない場合を考える. これは (2.9) で放射源関数 $J_\nu = 0$ の場合に当たり,

$$\frac{dI_\nu}{k_\nu \rho dl} = -I_\nu \quad (2.16)$$

となる. 両辺を経路 l について積分すると,

$$I_\nu = I_0 \exp\left(\int_0^l k_\nu \rho dl\right) \quad (2.17)$$

となる. ここで, 光学的距離 τ を

$$\tau \equiv \int_0^l k_\nu \rho dl \quad (2.18)$$

^{*3}導出は付録 A,B を参照

^{*4}導出は付録 C を参照

と定義すると、放射輝度は

$$I_\nu = I_0 \exp(-\tau) \quad (2.19)$$

と表せる。上式は射出がない場合、放射輝度は光学的距離の長さに比例して指数関数的に減少することを意味しており、ピーア・ブーゲ・ランバートの法則と呼ばれる。

シュヴァルツシルトの式と放射伝達方程式

ここでは、熱力学的平衡にある大気における放射伝達方程式について述べる。

大気が熱力学平衡にあるとき、キルヒホッフの法則により放射源関数はプランク関数に置き換えることが出来る。したがって (2.9) より、

$$\frac{dI_\nu}{k_\nu \rho dl} = -I_\nu + B_\nu \quad (2.20)$$

となる。これをシュヴァルツシルトの式という。右辺の第一項は、吸収による放射輝度の減衰を表し、第二項は媒質の黒体放射による射出を表している。光学的深さを次のように定める。

$$d\tau = k_\nu \rho dz, \quad dz = \cos \theta dl. \quad (2.21)$$

ここで、 z は大気上端から鉛直下向きに測った距離、 θ は天頂角である。簡単化のため単色波の放射を考え、さらに上式を用いて (2.9) を書き換えると、

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau} = -I + B \quad (2.22)$$

となる。放射輝度 I の分布は等方的であると近似して (2.5) の導出と同じように (2.22) の放射輝度を積分すると、鉛直上向きおよび下向きの放射フラックス F^\uparrow, F^\downarrow の満たす式が得られる。

$$\text{上向き} : \frac{2}{3} \frac{dF^\uparrow}{d\tau} = F^\uparrow - \pi B, \quad (2.23)$$

$$\text{下向き} : -\frac{2}{3} \frac{dF^\downarrow}{d\tau} = F^\downarrow - \pi B. \quad (2.24)$$

上式は単色波についての放射フラックスの式であり、大気の放射フラックスは上式から得られる F^\uparrow や F^\downarrow を全振動数について積分した値であることに注意されたい。

第3章 モデル

この章では、本研究で用いたモデルの詳細を述べる。また最後に、用いた物理定数や変数の値を表にまとめる。

3.1 仮定

大気と放射伝達について、次のような仮定をおく。

大気について

1. 放射平衡にある成層圏と、飽和状態の対流圏で構成される
2. 静水圧平衡にある。
3. 放射対流平衡にある。
4. 大気成分は凝結性成分（水蒸気）と非凝結性成分の 2 つである。
5. 理想気体として振る舞う。
6. 大気成分の分子量は等しい。
7. 成層圏では凝結は起こらず、大気成分の混合比は一定である。
8. 潜熱、各成分の定圧モル比熱は温度に依らず一定である。
9. 凝結性成分は気体相と液体相のみをもつ。
10. 凝結性成分の液体相の体積は無視できる。

放射伝達について

1. 灰色大気である。（太陽放射に対して透明であり、赤外放射に対しては波長に依らない吸収係数をもつ。）

2. 非凝結性成分は赤外放射に対して透明である.
3. 散乱は無視できる.

3.2 基礎方程式

この節では、まず大気中の放射伝達を表す式を示し、式の意味について述べる。続けて放射平衡状態において大気温度分布を与える式を導出する。そのあとには対流圏の温度分布を決める擬湿潤断熱減率を紹介する。

3.2.1 放射伝達

平行平板灰色大気の放射フラックスが満たす式は前章より次のように書ける。

$$\text{上向き} : \frac{2}{3} \frac{dF^\uparrow(\tau)}{d\tau} = F^\uparrow - \pi B(\tau), \quad (3.1)$$

$$\text{下向き} : -\frac{2}{3} \frac{dF^\downarrow(\tau)}{d\tau} = F^\downarrow - \pi B(\tau), \quad (3.2)$$

$$\text{光学的深さ} : d\tau = k\rho dz. \quad (2.21)$$

いま、放射伝達についての仮定 3 より質量消散係数 k は散乱による放射輝度の減衰を含まず、大気による吸収だけを表す。そこで k を吸収係数と呼ぶことにする。大気成分は凝結性成分と非凝結性成分の 2 つなので、

$$k = \kappa_v \chi_v \frac{m_v}{\bar{m}} + \kappa_n \chi_n \frac{m_n}{\bar{m}} \quad (3.3)$$

と表せる。添え字 v は凝結性成分の、 n は非凝結性成分の値であることを表し、 χ_v, χ_n はモル分率、 κ_v, κ_n は吸収係数、 m_v, m_n は分子量である。また、 \bar{m} は平均分子量である。

大気についての仮定 4 より m_v と m_n は等しいので χ_v は、

$$\chi_v = \frac{p_v(T)}{p} \quad (3.4)$$

で与えることができる。ここで $p_v(T)$ は凝結性成分の分圧である。大気が飽和している場合は $\chi_v^*, p^*(T)$ のように '*' をつけて表すことにする。大気についての仮定 9 より、飽和水蒸気圧 $p^*(T)$ は、クラウジウス・クラペイロンの式で凝結相の体積を無視した式から、

$$p^*(T) = p_0 \exp\left(-\frac{l}{RT}\right) \quad (3.5)$$

と与えられる。ここで l は凝結性成分 1 mol 当たりの潜熱、 R は気体定数、 p_0 は飽和水蒸気圧定数である。また大気についての仮定 2 より、

$$dz = -\frac{1}{\rho g} dp \quad (3.6)$$

である. ここで g は重力加速度である. 以上のことを用いると, 飽和している対流圏の光学的深さは,

$$d\tau = (\kappa_v \chi_v^* m_v + \kappa_n \chi_n m_n) \frac{dp}{\bar{m}g} \quad (3.7)$$

と表すことができる.

大気全体の光学的深さを τ_b とおく. (3.1) は, 両辺に $e^{\frac{3}{2}\tau}$ をかけ光学的深さ τ について $[\tau_b, \tau]$ で積分すると解析的に解くことができ, 上向き放射フラックス:

$$F^\uparrow(\tau) = \underbrace{\pi B(\tau_b) \exp\left(\frac{3}{2}(\tau - \tau_b)\right)}_{\dagger 1} - \underbrace{\frac{3}{2} \int_{\tau_b}^{\tau} \pi B(\tau') \exp\left(-\frac{3}{2}(\tau' - \tau)\right) d\tau'}_{\dagger 2} \quad (3.8)$$

が得られる. ここで境界条件として, 大気下端での上向き放射は地表面の温度 T_s での黒体放射と等しいこと, すなわち

$$F^\uparrow(\tau_b) = \pi B(\tau_b) = \sigma T_s^4, \quad (3.9)$$

を用いた. 次に, (3.2) の両辺に $e^{-\frac{3}{2}\tau}$ をかけ光学的深さ τ について $[0, \tau]$ で積分すると, 下向き放射フラックス:

$$F^\downarrow(\tau) = \underbrace{\frac{3}{2} \int_0^{\tau} \pi B(\tau') \exp\left(-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right) d\tau'}_{\dagger 3} \quad (3.10)$$

が得られる. ここでは境界条件として, 大気上端における下向き放射はないこと, すなわち

$$F^\downarrow(0) = 0 \quad (3.11)$$

を用いた.

図 3.1 は (3.8), (3.10) の右辺各項が表す量の概念図であり, 以下のような量を表している.

- (†1) は地表面 (大気下端) の黒体放射が光学的深さ τ において持つエネルギー
- (†2) は光学的深さが τ から τ_b の間にある各層の大気の上向きに放射したフラックスが, τ でもつエネルギーの和
- (†3) は光学的深さが 0 から τ の間にある各層の大気の下向きに放射したフラックスが τ において持つエネルギーの和

どの項にも指数関数がかかっており, 2.4 節のビーア・ブーゲー・ランバートの法則が示すように放射フラックスが光学的距離に比例して指数関数的に減衰することが分かる.

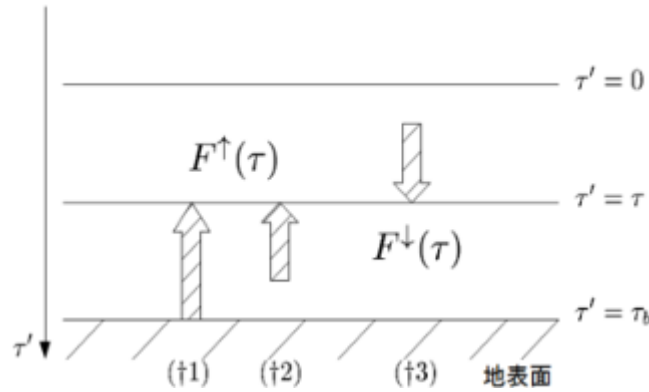


図 3.1: (3.8), (3.10) の右辺各項が表す量の概念図

3.2.2 放射平衡解

放射フラックスと気層の加熱率の関係は、次の式で表される (会津勝, 1954: 大気と放射過程).

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = -\frac{d}{dz} (F^\uparrow(z) - F^\downarrow(z)) \quad (3.12)$$

ここで、 ρ は大気の密度、 C_p は大気の定圧比熱、 t は時間である。放射平衡状態では、時間による温度変化がなく $\frac{dT}{dt} = 0$ なので上式より、

$$F^\uparrow(z) - F^\downarrow(z) \equiv F_{\text{net}} \quad (\text{一定}) \quad (3.13)$$

である。 F_{net} は正味の放射フラックスとよばれる。上式は大気が放射平衡状態のとき、大気正味の放射フラックスがどの高度においても一定であることを示している。

境界条件 (3.11) より、大気上端では、 $F_{\text{net}} = F^\uparrow(0)$ である。したがって大気上端での上向き放射を F_{top}^\uparrow とおくと、 $F_{\text{top}}^\uparrow = F^\uparrow(0) = F_{\text{net}}$ である。

続けて、 F_{sum} を次式で定義する。

$$F^\uparrow(z) + F^\downarrow(z) \equiv F_{\text{sum}}. \quad (3.14)$$

(3.1), (3.2) の辺々の差を取ると、

$$\frac{2}{3} \frac{dF_{\text{sum}}}{d\tau} = F_{\text{top}}^\uparrow \quad (3.15)$$

となり、辺々を加えると、

$$\frac{2}{3} \frac{dF_{\text{top}}^\uparrow}{d\tau} = F_{\text{sum}} - 2\pi B(\tau) \quad (3.16)$$

となる. 今, (3.13) より F_{top}^\uparrow は光学的深さに依らずに一定 ($\frac{dF_{top}^\uparrow}{d\tau} = 0$) なので, 上式から

$$F_{sum} = 2\pi B(\tau). \quad (3.17)$$

これを (3.15) へ代入し, τ で積分すると,

$$\pi B(\tau) = \frac{F_{top}^\uparrow}{2} \left(\frac{3}{2}\tau + A \right) \quad (A: \text{積分定数}) \quad (3.18)$$

となる. 境界条件 (3.11) より, 大気上端では $F_{sum} = F^\uparrow(0)$ なので, (3.17) より

$$F_{top}^\uparrow = F_{sum} = F^\uparrow(0) = 2\pi B(\tau), \quad (3.19)$$

すなわち,

$$\pi B(0) = \frac{F_{top}^\uparrow}{2} \quad (3.20)$$

となる. これより, 積分定数 $A = F_{top}^\uparrow$ である. 以上より,

$$\pi B(\tau) = \frac{1}{2} F_{top}^\uparrow \left(\frac{3}{2}\tau + 1 \right) \quad (3.21)$$

となる. $\pi B(\tau) = \sigma T^4$ なので, 上式によって放射平衡状態における温度分布が与えられる.

3.2.3 擬湿潤断熱勾配

水蒸気で飽和した空気塊を静的に断熱的に持ち上げたときに得られる温度勾配は, 湿潤断熱勾配とよばれる. 特に, 水蒸気の相変化によって生じる水滴は速やかに降水し, 空気塊から取り除かれると考えた場合の湿潤断熱勾配は擬湿潤断熱勾配と呼ばれ, 次の式のように書ける.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right) = \frac{\frac{RT}{c_{pn}} p + \frac{\chi_v^*}{\chi_n} \frac{l}{c_{pn} p}}{\chi_n + \chi_v^* \frac{c_{pv}}{c_{pn}} + \frac{\chi_v^*}{\chi_n} \frac{l^2}{RT^2 c_{pn}}}. \quad (3.22)$$

ここで, c_{pv}, c_{pn} はそれぞれ凝結性成分または非凝結性成分 1 mol 当たりの定圧比熱である. いま, 対流圏は水蒸気で飽和しており水蒸気の凝結が起こっていると考えられるので, 温度勾配を上式で与える.

気体定数	R	$= 8.314 \text{ J}/(\text{mol K})$
重力加速度	g	$= 9.80 \text{ m /s}^2$
ステファン・ボルツマン定数	σ	$= 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$
大気成分の分子量	m_v, m_n	$= 18.0 \times 10^{-3} \text{ (kg/mol)}$
飽和水蒸気圧定数	p_{n0}	$= 1.4 \times 10^{11} \text{ (Pa)}$
凝結性成分の潜熱	l	$= 43655 \text{ (J/mol)}$
凝結性成分の定圧モル比熱	c_{pv}	$= 4 R$
非凝結性成分の定圧モル比熱	c_{pn}	$= 3.5 R$
非凝結性成分の大気下端での分圧	p_{n0}	$= 10^5 \text{ (Pa)}$
凝結性成分の吸収係数	κ_v	$= 0.01 \text{ (m}^2/\text{kg)}$
非凝結性成分の吸収係数	κ_n	$= 0 \text{ (m}^2/\text{kg)}$

表 3.1 本研究で用いた物理定数と変数の値.

第4章 大気の射出限界と温度分布

4.1 成層圏の射出限界

この節では、放射平衡にある成層圏には惑星放射の射出限界 (Komabayashi-Ingersoll 限界) があることを再現し、その限界値を示す。

惑星表面に海がある場合には対流圏は湿潤大気であると考えられるので、成層圏の下端 (対流圏界面) は水蒸気で飽和していると考ええる。また、凝結性成分の吸収係数として、水蒸気の連続吸収帯の吸収率に相当する 0.01 を選ぶ。前章でおいた仮定と上記をまとめると、この節で考える大気は以下のとおりである。

- 成層圏は放射平衡にある。
- 成層圏の下端 (対流圏界面) は飽和状態である。
- 大気成分の混合比は一定であり、対流圏界面での値に等しい。
- 吸収係数は $\kappa_v = 0.01, \kappa_n = 0$ である。

成層圏が放射平衡にあるとき、(3.21) より、ある惑星放射 F_{top}^\uparrow の値についての対流圏界面の温度 T_{tp} と光学的深さ τ_{tp} の間には次の関係が成り立たなければならない。

$$\sigma T_{\text{tp}}^4 = \frac{1}{2} F_{\text{top}}^\uparrow \left(\frac{3}{2} \tau_{\text{tp}} + 1 \right). \quad (4.1)$$

一方、大気についての仮定 4 と対流圏界面が飽和状態であることから、(3.7) は解析的に積分でき、 T_{tp} と τ_{tp} について、

$$\tau_{\text{tp}} = \kappa_v p^*(T_{\text{tp}}) \frac{1}{g} \frac{m_v}{\bar{m}} \quad (4.2)$$

が成り立つ。ここで (3.4) を用いた。いくつかの F_{top}^\uparrow を与えた (4.1) と (4.2) をそれぞれ $T_{\text{tp}}\tau_{\text{tp}}$ 平面にプロットしたものが、図 4.1 である。濃い赤の直線 (厳密には曲線であるが) は (4.1) を、赤、緑、青の曲線は (4.2) を表している。なお、この図は Nakajima *et al.* (1992) の fig.1 を再現したものである。

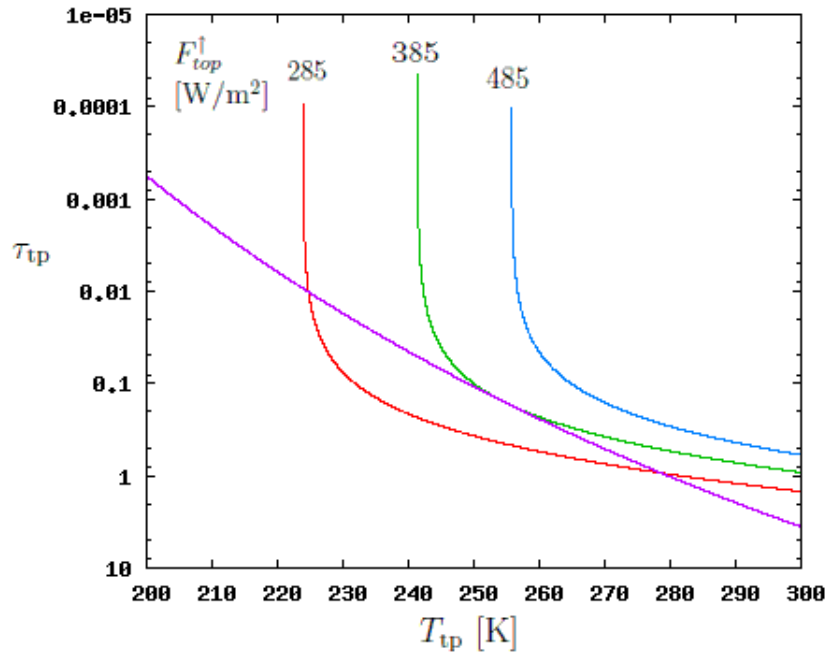


図 4.1: T_{tp} と τ_{tp} の関係.

図 4.1 より, $F_{\text{top}}^{\uparrow} = 285 \text{ W/m}^2$ では解が 2 つあり, $F_{\text{top}}^{\uparrow} = 385 \text{ W/m}^2$ では 1 つ, $F_{\text{top}}^{\uparrow} = 485 \text{ W/m}^2$ では解がないことが分かる. 解があるとき, その点での T_{tp} と τ_{tp} が対流圏界面の温度と光学的深さであり, 今考えているような大気が存在する. 一方, 解がないときは両方の条件を満たすような大気は存在できない. さらに, $F_{\text{top}}^{\uparrow} = 285 \text{ W/m}^2$ の場合のように解が 2 つあるとき, 対流圏界面の温度 T_{tp} が高い方の解は物理的に意味のない解である. この解で対流圏界面が決まるとすると (4.2) で決まる光学的深さよりも, (4.1) で決まる光学的深さの方が大きいことから, 成層圏に過飽和な領域が出来てしまうからである. 解が一つになるときの $F_{\text{top}}^{\uparrow}$ の値が成層圏の射出限界 (Komabayashi-Ingersoll 限界) の値である. 本研究の再現では表 3.1 の値を用いて計算したところ, 限界値は 385 W/m^2 であった. Komabayashi-Ingersoll 限界が存在する原因は, $F_{\text{top}}^{\uparrow} > 385 \text{ W/m}^2$ では対流圏界面が飽和状態であるために必要な光学的深さ, すなわち吸収物質の量が, どの T_{tp} においても放射平衡を保つために必要な量よりも多いことにある.

図 4.1 より, 大気的光学的深さが対流圏界面の温度に依らず一定でない限り, 射出限界は存在することが分かる. したがって, 対流圏界面は飽和状態でなくても「湿っている」だけでよく, (4.2) は次式のように書き換えることができる.

$$\tau_{\text{tp}} = \kappa_{\text{v}} h p^*(T_{\text{tp}}) \frac{1}{g} \frac{m_{\text{v}}}{\bar{m}}. \quad (4.3)$$

ここで h は比湿であり, $0 < h \leq 1$ である. h が温度によって変化するとしても, $p^*(T)$ の温度依存性を打ち消すような温度依存性を持っていない限り, つまり, 温度の上昇とともに

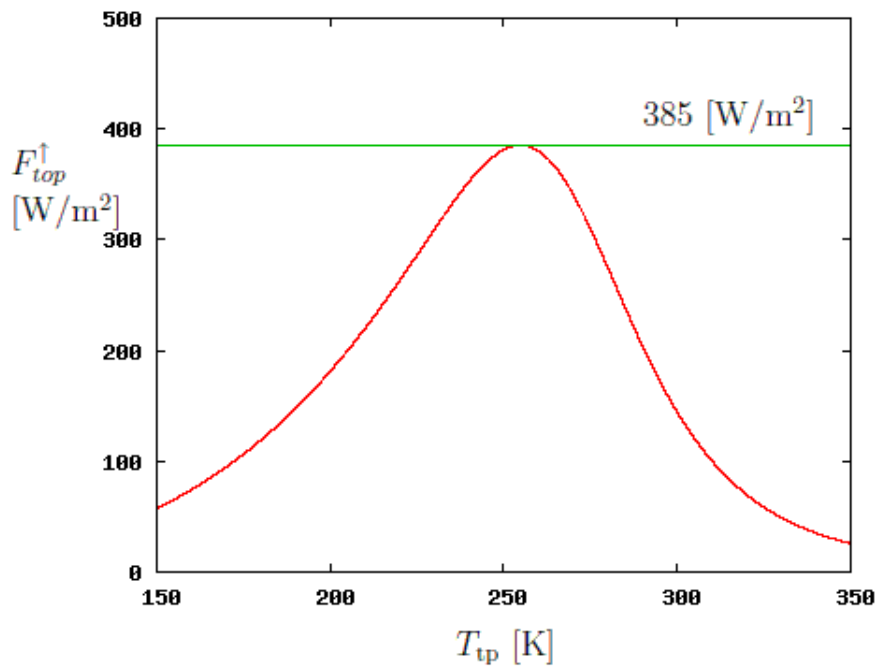


図 4.2: F_{top}^{\uparrow} と T_{tp} の関係.

に指数関数的に h が減少しない限りは射出限界が存在する.

図 4.2 は, (4.1) と (4.2) を用いて F_{top}^{\uparrow} と T_{tp} の関係をプロットしたものである. $F_{top}^{\uparrow} < 385 \text{ W/m}^2$ では対応する T_{tp} が 2 つあり, $F_{top}^{\uparrow} > 385 \text{ W/m}^2$ では対応する T_{tp} のないことが図 4.2 でも明らかである. 以上より惑星表面に海が存在し, かつ大気が放射平衡にあるときには, 大気は 385 W/m^2 以上のエネルギーを放射できないことが確認できた.

次節では, 対流圏を含めた大気モデルを考え, 大気が放射対流平衡にあるときの射出限界と温度分布について考察する.

4.2 対流圏を含めた大気の射出限界

この節では, 射出限界にある成層圏と飽和状態の対流圏の二層を持つ大気を考え, 放射対流平衡にある大気の射出限界について Nakajima *et al.* (1992) で考察されていることを確かめる. ここで考える大気は以下のとおりである.

- 成層圏は放射平衡にある.

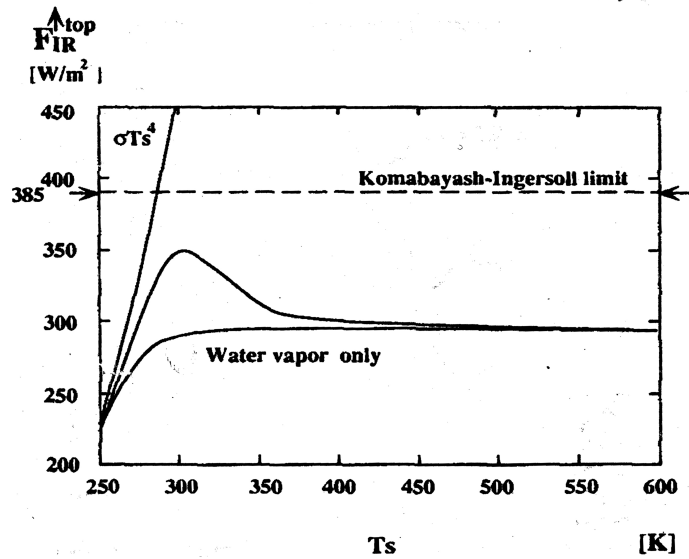


図 4.3: $p_{n0} = 10^5$ の場合の T_s と F_{top} の関係. 水蒸気大気の場合の F_{top} と黒体放射 σT_s^4 , Komabayashi-Ingersoll 限界も示されている. (Nakajima *et al.*, 1992).

- 対流圏は飽和している.
- 大気下端 (地表面) において非凝結性成分の分圧 p_{n0} は 10^5 Pa である.
- 吸収係数は $\kappa_v = 0.01, \kappa_n = 0$ である.
- 対流圏における温度勾配は (3.22) で与える.

図 4.1 は, 地表面の温度 T_s と 惑星放射 F_{top}^\uparrow の関係を示している. 大気がない場合の惑星放射 σT_s^4 と, 大気成分が水蒸気だけである場合 ($p_{n0} = 0$, 水蒸気大気とよぶ) の惑星放射もそれぞれ示されている. 図 4.1 より, 惑星放射 F_{top}^\uparrow は地表面温度の上昇に伴って増加するが, やがて減少し始め, 地表面温度が十分に大きい時には一定値になることがわかる. この F_{top}^\uparrow の振る舞いは, 地表面温度と大気の温度分布の関係を調べることで理解できる.

図 4.2, 4.3, 4.4 は温度の鉛直構造や水蒸気のマール分率の鉛直構造を示している. 図 4.2 と図 4.3 では鉛直軸に圧力 p を, 図 4.4 では光学的深さ τ を用いている.

まず図 4.2 から分かることは, 地表面温度の上昇に伴って対流圏界面がより上層になり, 飽和状態である領域がより上層まで続くことである. つまり, 地表面温度が高いと大気の飽和水蒸気圧が高くなり, 水蒸気大気へ近づく. これは図 4.3 から読み取ることができる.

次に図 4.4 から分かることは、地表面温度が 300 K を超えると大気全体の光学的深さが 1 より大きくなることと、光学的深さの鉛直構造が T_s によらず同じになることである。

地表面温度が 300 K よりも小さいときは、図 4.4 より大気的光学的深さは 1 よりも小さいため、惑星放射は地表温度の上昇に伴って増加する。一方地表面温度が 300 K よりも大きいときには、大気的光学的深さが 1 よりも大きくなり惑星放射は光学的深さが 1 付近の大気の温度分布によって決まるようになる。また、(3.8) と B が温度の関数であることより、惑星放射は温度勾配が小さくなるにつれて減少することが分かる。大気中の水蒸気が増加すると、(3.22) で与えられる温度勾配が小さくなるため、図 4.3 で T_s が 300 K を超えたあたりでは $F_{\text{top}}^{\uparrow}$ が減少している。

さらに地表温度が高くなると、水蒸気の実分率 $\chi_v \rightarrow 1$ となり水蒸気大気へ近づく。 $\chi_v \rightarrow 1$ のとき、大気の擬湿潤断熱勾配は飽和水蒸気圧曲線で近似できる^{*1}。また、このとき (3.7) は

$$\begin{aligned}\tau &= \kappa_v \chi_v m_v \frac{p}{\bar{m}g} \\ &= \frac{\kappa_v}{g} p\end{aligned}\tag{4.4}$$

と書け光学的深さと気圧は比例するようになる。したがって、光学的深さと温度は飽和水蒸気圧によってのみ決まるようになり、光学的深さ 1 付近の温度分布が地表面温度に依存しなくなるため、惑星放射 $F_{\text{top}}^{\uparrow}$ は一定値へ漸近する。

以上より、放射対流平衡にある大気の惑星放射は Komabayashi-Ingersoll 限界の他に漸近値をもつ事が分かり、その原因は、対流圏の温度分布と、惑星放射が光学的深さ 1 の大気の温度分布に依存する性質をもつことから説明できることが確認できた。

^{*1}これは (3.22) において $\chi_v \rightarrow 1$ の極限をとることで確認できる。詳細は付録 D を参照。

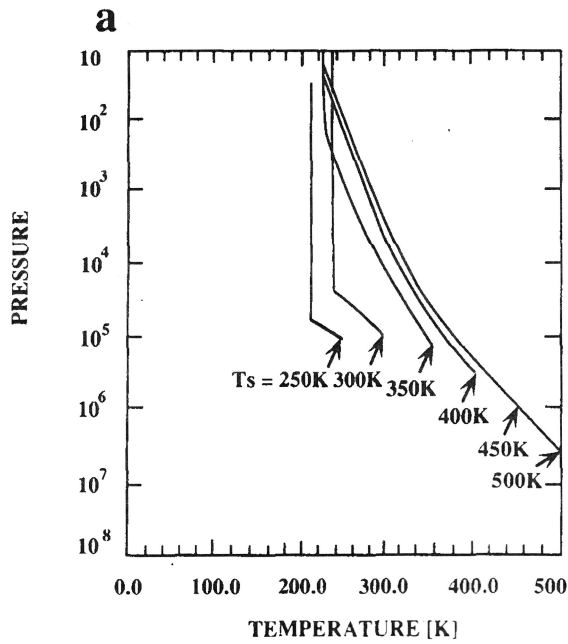


図 4.4: p と T の関係 (Nakajima *et al.*,1992).

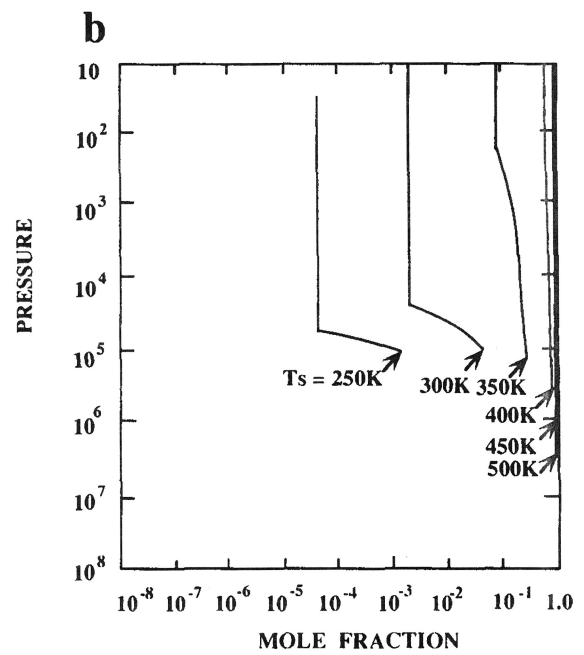


図 4.5: p と χ_v の関係 (Nakajima *et al.*,1992).

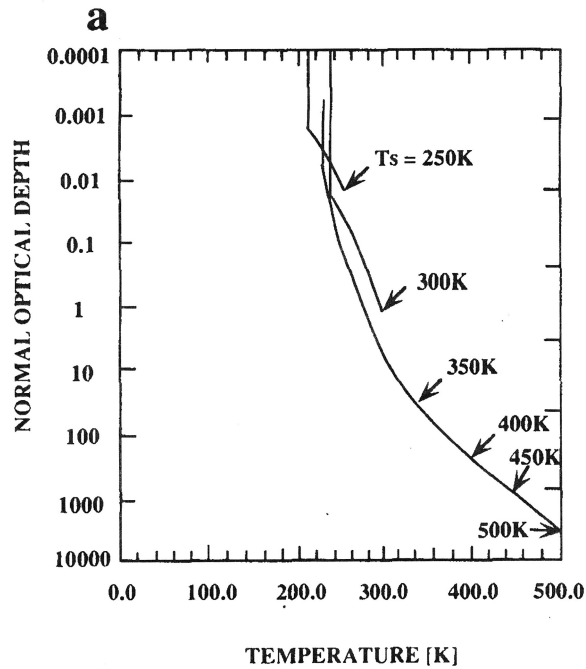


図 4.6: τ と T の関係 (Nakajima *et al.*,1992).

第5章 まとめ

惑星表面に海が存在し、かつ大気が放射平衡にあるとき、大気が放射できるエネルギーには上限 (Komabayashi-Ingersoll 限界) があることを再現し、本研究で用いたモデルでの上限値は 385 Wm^{-2} であることを求めた。Komabayashi-Ingersoll 限界は、十分に温度が高い場合には、温度が高いことによって惑星放射が増える効果よりも水蒸気の増加する効果が上回ることによって生じる。また、大気の比湿が温度上昇に伴って指数関数的に減少しない限りこの上限は存在することが分かった。

次に、Nakajima *et al.*(1992) で行われている考察に従って、放射対流平衡にある大気の射出限界と温度分布の関係について考察を行った。

地表面での全圧を現在の地球とほぼ同じ値に設定したとき、地表面の温度が 300 K を超えて上昇すると、惑星放射は減少しある値に漸近する。この惑星放射と地表面温度との関係は、地表面温度が高くなるにつれて、対流圏の温度勾配が飽和水蒸気圧曲線で近似できるようになることと、大気の光学的深さが 1 よりも大きくなるために、惑星放射が地表面温度によらなくなることによって説明できることを確認した。

謝辞

本研究を行うにあたり、たくさんの方にご指導とご協力を頂きました。林祥介教授には、研究テーマと方針を頂きました。岩山隆寛準教授には数多くの助言と励ましを頂きました。また、特に高橋芳幸助教には貴重な時間を割いていただき、放射の基礎からプログラムの作成まで本当に多くのことをご指導頂きました。佐々木洋平さん、村上真也さんをはじめ研究室の先輩方には、発表資料の作成や研究の進め方に関して様々な助言を頂きました。

多くのお力添えと、励ましを下された地球および惑星大気科学研究室の皆様へここで改めて深く感謝いたします。

参考文献

- 会田 勝, 1954: 気象学のプロムナード 8 大気と放射過程 -大気の熱源と放射収支を探る-, 東京堂出版, 280pp.
- 阿部豊, 藤村彰夫, 中川義次, 森山茂, 杉浦直治, 渡邊誠一郎, 1993: 惑星の科学, 朝倉書店, 227pp.
- 柴田清孝, 1999: 応用気象学シリーズ 1 光の気象学, 朝倉書店, 182pp.
- Nakajima, S., Hayashi, Y.-Y., Abe, Y., 1992: A Study on the " Runaway Greenhouse effect " with a One-Dimensional Radiative-Convective Equilibrium Model, J. Atmos. Sci., 49, 2256-2266,
- 中島美紀, 2007: 惑星質量と大気組成の違いが水惑星の大気の射出限界に与える影響, 東京工業大学卒業論文
- 松井孝典, 藤原顕, 井田茂, 永原裕子, 渡邊誠一郎, 1997: 比較惑星科学, 岩波書店, 488pp.
- 安田延寿, 1994: 基礎大気科学, 朝倉書店, 204pp.

付録

付録 A : ステファン・ボルツマンの法則

ここでは、プランク関数:

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5(e^{hc/k\lambda T} - 1)} \quad (\text{A.1})$$

を全波長について積分することにより、ステファン・ボルツマンの法則を導出する。上式の両辺を積分すると、

$$B(T) = \int_0^{\infty} \frac{2hc^2}{\lambda^5(e^{hc/k\lambda T} - 1)} d\lambda. \quad (\text{A.2})$$

ここで $x = \frac{hc}{k\lambda T}$ とおくと、

$$d\lambda = -\frac{hc}{kT} \frac{1}{x^2} dx$$

x についての積分区間: $\infty \quad 0$

なので、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T) d\lambda &= \int_0^{\infty} \frac{2hc^2}{\left\{\left(\frac{hc}{kT} \frac{1}{x}\right)\right\}^5 (e^x - 1)} \frac{hc}{kT} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{2k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\ &= \frac{2k^4 T^4}{h^3 c^2} \frac{\pi^4}{15} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

と計算できる。ここで $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ であることを用いた^{*1}。

(A.3) について、 $\sigma = \frac{\pi^4}{15} \frac{2k^4}{h^3 c^2}$ とおくと、

$$\pi B(T) = \sigma T^4 \quad (\text{A.4})$$

となり、ステファン・ボルツマンの法則が導出された。 σ はステファン・ボルツマン定数とよばれ、 $h = 6.6262 \times 10^{-34}$ Js, $k = 1.3806 \times 10^{-23}$ J/K, $c = 2.9979 \times 10^8$ m/s を代入して計算すると、 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/(m² K²) となる。

^{*1}この積分については付録 B を参照。

付録 B : $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ の計算

$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx$ を無限級数で表し、フーリエ展開を用いて計算する.

任意の実数 α, β を

$$\alpha = e^{-x} \tag{B.1}$$

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n + \cdots = \beta \quad (\text{初項 } 1, \text{ 公比 } \alpha \text{ の無限等比級数}) \tag{B.2}$$

とおく. まず, (B.2) の両辺に $-\alpha$ をかけると

$$(-\alpha)(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n + \cdots) = (-\alpha)\beta \tag{B.3}$$

となる. 次に, 上式の辺々を加えると,

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n + \cdots) &= (1 - \alpha)\beta \\ (1 - \alpha) \frac{1}{1 - \alpha} &= (1 - \alpha)\beta \\ \beta &= \frac{1}{1 - \alpha} \end{aligned} \tag{B.4}$$

となる^{*2}. 上式の両辺に α をかけると,

$$\alpha\beta = \alpha \frac{1}{1 - \alpha}, \tag{B.5}$$

一方 (B.2) より,

$$\alpha\beta = \alpha(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n + \cdots) \tag{B.6}$$

であるので, 次のように書ける^{*3}.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx &= \int_0^\infty \frac{x^3}{e^{-x}(1-e^x)} dx \\ &= \int_0^\infty x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx} + \cdots) dx \\ &= \int_0^\infty x^3 \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^3 e^{-nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{6}{n^4}. \end{aligned} \tag{B.7}$$

^{*2}今, $\alpha = \frac{1}{e^x}$ であり $x > 0$ なので $|\alpha| < 1$. 無限等比級数は, 公比 α が $|\alpha| < 1$ のとき, $\frac{a}{1-\alpha}$ と表せる.

^{*3}ここで, 右辺の最後の変形には部分積分を用いた.

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$ を求めるために, x^{-4} のフーリエ展開を考える. フーリエ係数を $a_n, b_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ とおくと, 周期 L の関数 $f(x)$ のフーリエ展開は次のように表せる.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{B.8})$$

$$a_0 = \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx \quad (\text{B.9})$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin nxdx \quad (\text{B.10})$$

x^{-4} は偶関数なので, $b_n = 0$. $f(x) = x^{-4}$ として $-\pi \leq x \leq \pi$ で展開する.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^{-4} dx = \frac{2}{5} \pi^4 \\ a_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^\pi x^{-4} \cos nxdx = \frac{8\pi^2}{n^2} (-1)^n - \frac{48}{n^4} (-1)^n. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

したがって,

$$f(x) = \frac{\pi^5}{5} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \cos nx \left(\frac{8}{n^2} \pi^2 - \frac{48}{n^4} \right) \quad (\text{B.12})$$

となる. $x = \pi$ のとき,

$$\pi^4 = \frac{\pi^5}{5} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{8}{n^2} \pi^2 - \frac{48}{n^4} \right). \quad (\text{B.13})$$

ゆえに,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{6}{n^4} = \frac{1}{15} \pi^4. \quad (\text{B.14})$$

したがって, (B.7) は,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx &= \sum_{n=1}^\infty \frac{6}{n^4} \\ &= \frac{\pi^4}{15}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

以上より,

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx = \frac{\pi^4}{15}. \quad (\text{B.16})$$

付録 C : ウィーンの変位側の導出

プランク関数 B_λ を波長について微分し, ピーク波長においては

$$\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = 0 \quad (\text{B.1})$$

であることから, 波長と温度の関係式 (ウィーンの変位則) を導出する.

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5(e^{hc/k\lambda T} - 1)} \quad (\text{A.1})$$

より,

$$\begin{aligned} \frac{dB_\lambda}{d\lambda} &= 2hc^3 \left(-\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{(e^{hc/k\lambda T} - 1)} - \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{hc/k\lambda T} - 1)} \left(-\frac{hc}{kT} \right) \frac{1}{\lambda} e^{hc/k\lambda T} \right) = 0 \\ 2hc^3 &\left(-\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{(e^{hc/k\lambda T} - 1)} - \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{hc/k\lambda T} - 1)} \left(-\frac{hc}{kT} \right) \frac{1}{\lambda} e^{hc/k\lambda T} \right) = 0 \\ &5(e^{hc/k\lambda T} - 1) - \frac{hc}{k\lambda T} e^{hc/k\lambda T} = 0 \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

$x = \frac{hc}{k\lambda T}$ とおくと

$$\begin{aligned} 5(e^x - 1) - xe^x &= 0 \\ e^x &= \frac{5}{5 - x}, \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

上式を数値計算を用いて解くと $x = 4.9651$ が得られる.

$x = \frac{hc}{k\lambda T}$ に $x = 4.9651$, $h = 6.6262 \times 10^{-34}$ Js, $k = 1.3806 \times 10^{-23}$ J/K, $c = 2.9979 \times 10^8$ m/s を代入して計算すると,

$$\begin{aligned} x &= \frac{hc}{k\lambda T} \\ \lambda &= \frac{hc}{kT x} \\ \lambda &= \frac{0.2898}{T} \times 10^{-2} (\text{m}) \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

となり, ウィーンの変位側が導出できた.

付録 D : χ_v^* 1 での擬湿潤断熱勾配

ここでは, χ_v^* 1 のときに擬湿潤温度勾配が飽和水蒸気圧曲線で近似できることを示す.

擬湿潤断熱勾配は,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = \frac{\frac{RT}{c_{pn}}p + \frac{\chi_v^*}{\chi_n} \frac{l}{c_{pn}p}}{\chi_n + \chi_v^* \frac{c_{pv}}{c_{pn}} + \frac{\chi_v^*}{\chi_n} \frac{l^2}{RT^2 c_{pn}}} \quad (3.22)$$

$$= \frac{\chi_v \frac{RT}{p} + \chi_v^* \frac{l}{p}}{\chi_n^2 + \chi_v^* c_{pv} + \chi_v^* \frac{l^2}{RT^2}}. \quad (D.1)$$

と書ける. 右辺の分母および分子について χ_v 1 の極限を取るとそれぞれ次のようになる.

$$\text{分母: } \chi_n^2 + \chi_v^* c_{pv} + \chi_v^* \frac{l^2}{RT^2}, \quad \frac{l}{RT^2} = \frac{l}{p^*} \frac{dp^*}{dT} \quad (D.2)$$

$$\text{分子: } \chi_v \frac{RT}{p} + \chi_v^* \frac{l}{p} = \frac{l}{p^*} \quad (D.3)$$

ここで, (D.2) の等号での変形にはクラウジウス・クラペイロンの式を用いた. また (D.3) には χ_v 1 のとき $p = p^*$ であることを用いた. 上式より,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{\frac{l}{p^*}}{\frac{l}{p^*} \frac{dp^*}{dT}} = \frac{dT}{dp^*}. \quad (D.4)$$

よって, 地表面温度が高く, 大気の主成分が水蒸気になるとき, 擬湿潤断熱勾配は飽和水蒸気圧曲線に近似できる.