

赤道域の大気海洋中に存在する  
大規模波動の考察

神戸大学 理学部 地球惑星科学科  
地球及び惑星大気科学研究室  
1133483s 滝口 裕子

2015/03/22

## 要旨

本論文では Matsuno (1966) に基づいて、赤道域における大気海洋の大規模波動現象を考察した。均一非圧縮流体 1 層モデルの浅水系を  $\beta$  面近似し、波動解を仮定して分散関係式を求め、速度場とジオポテンシャル場を求めた。

まず自由波について波の振る舞いを考察した。中緯度と同様に、赤道域においても東進慣性重力波、西進慣性重力波、ロスビー波の 3 種類の波が存在する。また東西方向速度  $v$  がゼロの場合はケルビン波に似た波が存在することが分かった。これらの波の各モードを検証すると、低次のモード、特に  $n = 0$  の西進する波について、慣性重力波ともロスビー波とも分類することのできない混合ロスビー重力波が出現する。このことから、赤道域において、低次のモードに関しては慣性重力波とロスビー波をフィルタリングできない。また、これらの波は赤道付近で有意な大きさを持つので、赤道域に捕捉されていることが分かった。

次に強制振動について考察した。赤道に沿って質量のソースとシンクを与えた時の定在波動解を求めると、自由振動解の 4 つの波 (東西慣性重力波、ケルビン波、ロスビー波) を重ね合わせたような波が存在することが分かった。この波を直交関数展開して評価すると、特にロスビー波とケルビン波が支配的であることが分かった。

# 目次

第1章 序論	4
1.1 はじめに . . . . .	4
1.2 本論文の構成 . . . . .	5
第2章 モデルと基礎方程式	6
2.1 無次元化した浅水系の方程式 . . . . .	6
2.2 2層モデルの方程式 . . . . .	8
第3章 赤道域の自由振動	10
3.1 分散関係式 . . . . .	10
3.1.1 $v \neq 0$ の場合 . . . . .	11
3.1.2 $v \equiv 0$ の場合 . . . . .	16
3.1.3 まとめ . . . . .	17
3.2 固有関数 . . . . .	17
3.2.1 $v \neq 0$ の場合 . . . . .	17
3.2.2 $v = 0$ の場合 . . . . .	19
3.3 波の空間構造 . . . . .	20

3.3.1	$n = 1, 2$ の場合 . . . . .	20
3.3.2	$n = 0$ の場合 . . . . .	22
3.3.3	$n = -1$ の場合 . . . . .	23
3.4	赤道域における波の捕捉 . . . . .	23
3.4.1	慣性重力波の捕捉 . . . . .	24
3.4.2	ロスビー波の捕捉 . . . . .	25
3.4.3	赤道ケルビン波の捕捉 . . . . .	25
3.5	潮汐理論との比較 . . . . .	25
3.6	まとめ . . . . .	26
<b>第 4 章</b>	<b>赤道域の強制振動</b>	<b>35</b>
4.1	一般的な解析 . . . . .	35
4.2	特殊解 . . . . .	37
4.2.1	解の導出 . . . . .	37
4.2.2	解の吟味 . . . . .	39
4.2.3	熱強制応答に対する自由振動解の寄与の評価 . . . . .	39
4.2.4	波の空間構造 . . . . .	41
4.3	まとめ . . . . .	43
<b>第 5 章</b>	<b>まとめ</b>	<b>45</b>
<b>付 録 A</b>	<b>波の性質</b>	<b>47</b>

---

A.1 重力波 . . . . .	47
A.2 慣性重力波 . . . . .	48
A.3 ケルビン波 . . . . .	49
A.4 ロスビー波 . . . . .	50
付録 B (3.5) の導出	53
付録 C (3.5) とシュレディンガー方程式の類似性	56
付録 D 潮汐方程式の導出	58
D.1 ラプラスの潮汐方程式 (3.22) の導出 . . . . .	58
D.2 (3.23) の導出 . . . . .	61
謝辞	62
参考文献	63

# 第1章 序論

## 1.1 はじめに

大気や海洋などの地球流体にある擾乱を与えると、それは波動として流体中を伝播する。短周期の擾乱であれば、時間の経過と共に他の擾乱と打ち消し合って消えてしまうことが多いが、中には長期的な大規模波動として存在し続けるものもある。このような波動は大気や海洋の現象において熱やエネルギーを輸送する役割などを担っており、気候や気象の周期的変化に大きな影響を与えることが分かっている。とりわけ太陽からの熱やエネルギーを多く受け取る赤道域において、この波動現象は重要であり、ここで発生する波動は総合して赤道波と呼ばれる<sup>\*1</sup>。この赤道波が関わっていると考えられているのが ENSO (エルニーニョ - 南方振動) や MJO (マッテンジュリアン振動) などであり、この赤道波への理解は大規模な大気海洋の現象、ひいては地球全体の気候や気象を理解する上で欠かせない。

赤道波への理論的考察を行った研究として Mastuno (1966) が挙げらる。本論文ではこれに基づいて大気海洋の赤道域における波動現象に対して考察を行った。大気海洋の流体を均一非圧縮流体とし、1層モデルの $\beta$ 面近似した浅水系を設定した場合の波動解を求める。まずは自由振動解を求めて各モードの場の振る舞いを調べる。次に質量のソースとシンクの強制項を与えた場合の強制振動解を求め、この場の振る舞いを調べる。自由振動解、強制振動解の2つの場合を併せて考察することにより、赤道域の現象、あるいはより広げて大規模気象現象を理解する一歩となすことができる。

---

<sup>\*1</sup>気象ハンドブック第3版(2005)などより。

## 1.2 本論文の構成

本論文の構成を述べる. 第 2 章でまず赤道波を考察するのに適切なモデルを設定し, その基礎方程式を導く. 第 3 章では第 2 章で導出した基礎方程式から分散関係式及び自由振動波解を求める. そこで得られた結果から, 実際の波の空間構造の図を示し, その特徴を考察する. 第 4 章では強制力が与えられた場合の強制振動解を求める一般論を紹介する. 例として質量のソースとシンクがある場合の特殊解を求め, その特徴を考察する.

## 第2章 モデルと基礎方程式

赤道付近の流体運動を考えるために、適切な 2 種類のモデルの基礎方程式を導出する。

### 2.1 無次元化した浅水系の方程式

密度一様で自由表面を持つ、静水圧平衡下にある流体 1 層モデル (発散順圧流体) を考え、この運動を  $\beta$  面近似した局所直交座標系で考察する。図 2.1 のような座標設定を行う。速度ベクトル  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(u, v, 0)$ 、流体層の厚さ平均を  $H$ 、そこからのずれ

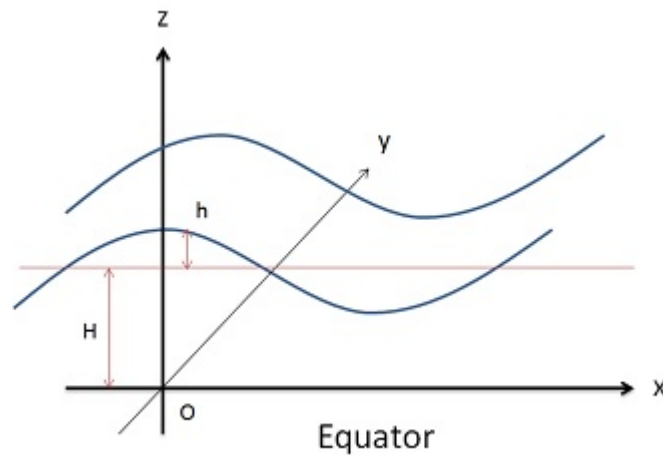


図 2.1: 浅水系の座標設定



を  $h$ , コリオリパラメタを  $f$  で表すことにすると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g\frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu + g\frac{\partial h}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right) &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

を得る. これが浅水系の基礎方程式である.

まずこの方程式を  $\beta$  面近似する. 本論文では赤道付近での運動のみを考えるので,  $\beta = \text{const.}$  と見なすことができる. このときコリオリパラメタ  $f$  はロスビー数  $\beta$  を用いて以下の様に表される:

$$f = \beta y.$$

(2.1) に対してこの  $\beta$  面近似を適用し,  $h$  の代わりにジオポテンシャル  $\phi = gh$  を用いて表せば,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \beta yv + \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \beta yu + \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) &= 0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

ここで  $c^2(= gH)$  は浅水系の重力波の伝播速度である.

次に, (2.2) を無次元化する. プライム付き変数を無次元量とすれば, 有次元量と無次元量の関係は以下のように表される.  $L, U, \Phi, T$  をそれぞれ長さ, 速度, ジオポテンシャル, 時間の特徴的なスケールとして,

$$\begin{cases} (x, y) = L(x', y'), \\ (u, v) = U(u', v'), \\ \phi = \Phi\phi', \\ t = Tt' = \frac{L}{U}t'. \end{cases}$$

これらを (2.2) の第 1, 3 式に代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t'} - \beta\frac{L^2}{U}y'v' + \frac{\Phi}{U^2}\frac{\partial \phi'}{\partial x'} &= 0, \\ \frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{c^2}{\Phi}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'}\right) &= 0.\end{aligned}$$

各式の係数を1とするスケーリング,

$$U = c, \quad \Phi = U^2, \quad T = L/U = \sqrt{\frac{1}{c\beta}}, \quad L = \sqrt{\frac{c}{\beta}} \quad (2.3)$$

を採用すれば, (2.2) は無次元化され,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - yv + \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + yu + \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(2.4) が無次元化された浅水系の方程式である.

## 2.2 2層モデルの方程式

前節では順圧流体モデルを考えていたが, 傾圧流体モデルも (2.4) の形式に書き換えることができる. 図 2.2 のような圧力座標系の 2 層モデルを考える. 平均場か

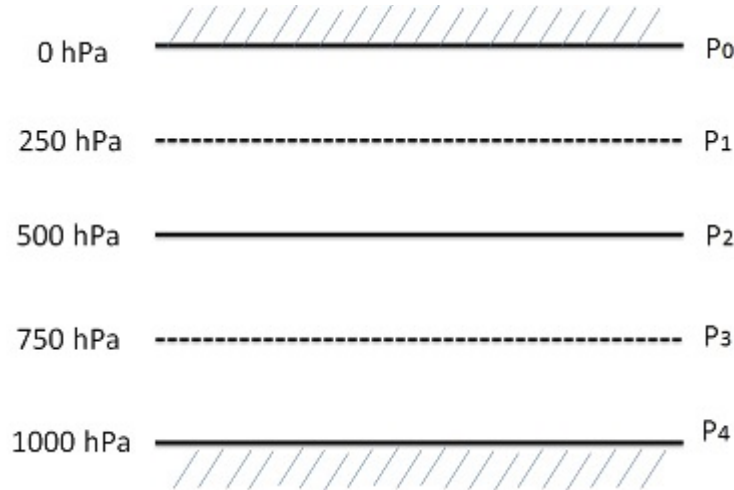


図 2.2: 2 層モデル. 各等圧面上の物理量は, 上図に示されてる圧力の添字と対応する.

らの微小擾乱場に対する運動方程式と熱力学方程式を書き下すと,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_1 + \nabla \phi_1 = 0, \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial t} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_3 + \nabla \phi_3 = 0, \quad (2.5b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_3 - \phi_1) + S \Delta p \omega_2 = 0. \quad (2.5c)$$

ここで  $\mathbf{e}_z$  は  $z$  方向の単位ベクトルで, 添字の 1, 2, 3 は図の上層, 中層, 下層に対応している. また,  $S \left( = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial p} \right)$  は静的安定度である. (2.5) の第 1 式と第 2 式の差を取って連続の式を書き下しておく:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_d}{\partial t} + f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_d + \nabla \phi_d = 0, \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial t} + S \frac{\Delta p^2}{2} \nabla \mathbf{v}_d = 0. \quad (2.6b)$$

ここで添字  $d$  がついているものは,

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1, \quad \phi_d = \phi_3 - \phi_1,$$

である. (2.6) は (2.4) と等価であり, (2.4) において変数  $(u, v, \phi)$  を  $(u_d, v_d, \phi_d)$  に,  $c^2$  を  $c_i^2 (= S \Delta p^2 / 2)$  (慣性重力波の伝播速度) としたものである. このことは (2.1) が傾圧流体の内部モードの運動に対しても正しく, この時速度は風のシアー, ジオポテンシャル高度は流体の厚さや温度に置き換えられることを示している.

以上のように, 本論文の基礎方程式 (2.4) は, 適切に式を変形すれば単純な浅水系ばかりではなく, 成層流体に対しても適用できることが分かる.

## 第3章 赤道域の自由振動

第2章で無次元化した浅水系の方程式(2.4)を用いて、東西方向に伝播する自由振動を考察する。以下ではまず波の分散関係式を求める。次に、波の振動数は固有値に対応するので、その固有値に対応する波動解を求めていく。そして、その波動解がどのような空間構造を持っているのかを示し、赤道域の自由振動の性質を考察する<sup>\*1</sup>。

### 3.1 分散関係式

無次元化された浅水系の方程式が  $x$  方向に一様な波動解を持つと仮定し、その解全てが  $e^{i\omega t + ikx}$  の共通因子を持っているとする：

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u(y) \exp\{i(\omega t + kx)\}, \\ v(x, y, t) &= v(y) \exp\{i(\omega t + kx)\}, \\ \phi(x, y, t) &= \phi(y) \exp\{i(\omega t + kx)\}. \end{aligned}$$

この時、(2.4)は、以下の様に変形できる：

$$\begin{aligned} i\omega u - yv + ik\phi &= 0, \\ i\omega v + yu + \frac{d\phi}{dy} &= 0, \\ i\omega\phi + ik u + \frac{dv}{dy} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで、変数  $u, v, \phi$  は波の振幅について  $y$  にのみ依存するとしている。この(3.1)から振動数  $\omega$  と波数  $k$  との関係式、即ち分散関係式を導く。分散関係式を導くにあたり、 $v$  を用いて  $u$  と  $\phi$  を表す方法を取る。以下  $v \neq 0, v = 0$  の場合に分けて、それぞれ  $u$  と  $\phi$  がどのように振る舞うか考察する。

<sup>\*1</sup>なお、この章では分散関係式に従って赤道波を4つの種類に分類するが、この分類は  $\beta$  面近似しない浅水系の方程式(2.1)から導出される波の分類と対応している。(2.1)から直接導かれる分類は、付録Aにまとめて示す。

### 3.1.1 $v \neq 0$ の場合

まず  $v \neq 0$  の場合を考える. (3.1) の第 1, 3 式から

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{i\omega}(yv - ik\phi), \\ \phi &= \frac{1}{i\omega}(-iku - \frac{dv}{dy}), \end{aligned}$$

を得る. ここから  $u$  と  $\phi$  を  $v$  のみで表すと,

$$u = \frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} \left( \omega y v + k \frac{dv}{dy} \right), \quad (3.2a)$$

$$\phi = -\frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} \left( k y v + \omega \frac{dv}{dy} \right). \quad (3.2b)$$

更に上の結果を (3.1) 第 2 式に代入して整理すれば,  $v(y)$  に関する微分方程式を得る:

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \left( \omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - y^2 \right) v = 0. \quad (3.3)$$

次に境界条件について考える. 赤道域での波動を考えるので, (3.3) に対して以下のような境界条件が課される:

$$v \rightarrow 0; \quad \text{when } y \rightarrow \pm\infty. \quad (3.4)$$

この境界条件は現実の大気とは異なるが, 解の決定に大きな影響を与えることはないので, 以下ではこの条件に基づいて考察を進めていく<sup>\*2</sup>.

境界条件 (3.4) を持つ (3.3) は, 級数展開法から解くことができる<sup>\*3</sup>. これを解くと, 分散関係式

$$\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

が得られ, このときの (3.3) の解  $v(y)$  は,  $H_n(y)$  をエルミート多項式を用いて

$$v(y) = C e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \quad (3.6)$$

で与えられる. 以下  $n$  の値によって解を分類する.

#### (i) $n \neq 0$ の場合

<sup>\*2</sup>現実の大気には極があるため,  $|y|$  に対する上限値が存在している.

<sup>\*3</sup>これの詳細な導出は付録 B に示す. また, この問題はシュレディンガー方程式との類似性がある. シュレディンガー方程式と (3.3) との比較は付録 C で示す.

(3.5) はある南北モード  $n$  に対する振動数と東西波数の関係を与えることを示しており,  $n \neq 0$  の場合  $\omega$  に関する 3 次方程式となり,  $n$  と  $k$  が決定されると解  $\omega$  を 3 つ得る. この 3 つの解のうち 2 つの解は東西それぞれの方向に伝播する慣性重力波, 残りの 1 つがロスビー波であることが期待される. 実際,  $k$  が十分大きい場合の  $\omega$  は<sup>\*4</sup>

$$\begin{aligned}\omega_{1,2} &\approx \mp \sqrt{k^2 + 2n + 1}, \\ \omega_3 &\approx \frac{k}{k^2 + 2n + 1},\end{aligned}\tag{3.7}$$

となる. (3.7) の 1 式目の  $\omega_{1,2}$  は慣性重力波, 2 式目の  $\omega_3$  はロスビー波の振動数である. このことは, (3.7) を有次元の位相速度  $c = \omega/k$  に変換すると確かめられる<sup>\*5</sup>:

$$\begin{aligned}c_{1,2} &\approx \mp c_g \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\beta}{c_g} (2n + 1)}, \\ c_3 &\approx \frac{\beta}{k^2 + \frac{\beta}{c_g} (2n + 1)}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

ただし純粋な重力波の位相速度を  $c$  の代わりに  $c_g$  を用いて表している. 回転と南北方向モードの寄与が

$$\frac{\beta}{c_g} (2n + 1)$$

の項に凝縮されていることに留意しておく.

(3.5) から任意の  $k$  に関して 3 つの解が得られる. この関係を図 3.1 に示す.

<sup>\*4</sup>(3.5) を変形すると,

$$\omega^3 - (k^2 + 2n + 1)\omega + k = 0,$$

を得る. ここで, 波数  $k$  が十分に大きい中でも比較的  $k$  が小さい時,

$$\begin{aligned}\omega(\omega^2 - k^2 - 2n - 1) &\approx 0 \\ \therefore \omega &\approx 0, \mp \sqrt{k^2 + 2n + 1}\end{aligned}$$

また  $\omega$  が十分小さい時,

$$\begin{aligned}-(k^2 + 2n + 1)\omega + k &\approx 0, \\ \therefore \omega &\approx \frac{k}{k^2 + 2n + 1}.\end{aligned}$$

であると見なせる.

<sup>\*5</sup>速度  $c = \omega/k$  の関係式に, 速度の次元  $c_g$  と波数  $k = [L^{-1}] = \sqrt{\beta/c_g}$  を用いる.

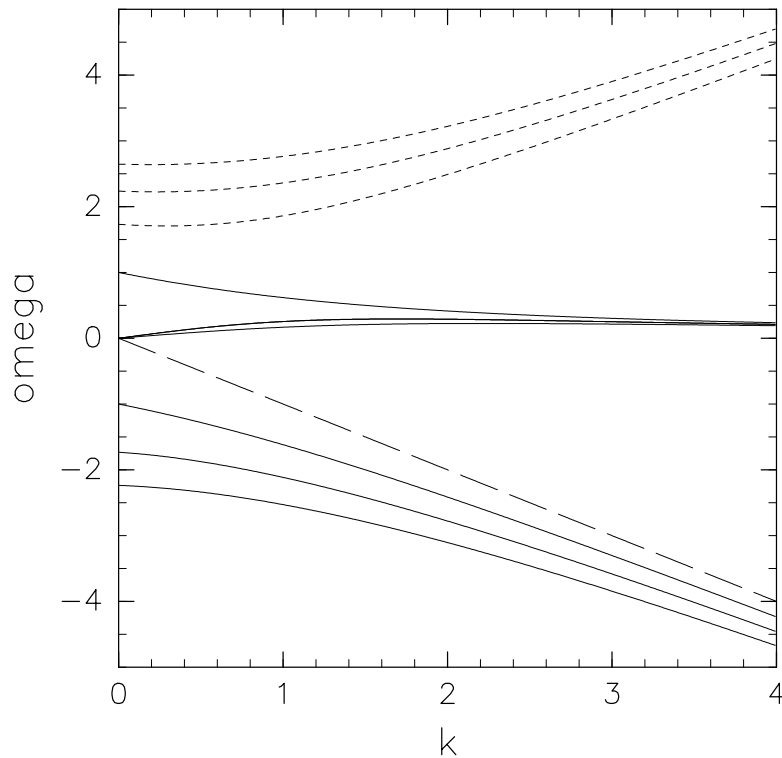


図 3.1: 分散関係式. 第 1 象限の点線が西進慣性重力波で上から  $n = 3, 2, 1$ , 細い実線がロスビー波で上から  $n = 0, 1, 2$ , 第 4 象限の破線が  $n = -1$  のケルビン波, 太い実線が東進慣性重力波で上から  $n = 0, 1, 2$  のモードを示している.

$n \geq 1$  の時, 3 つの波は全ての  $k$  に対して完全に分離している. 各々は以下の 3 つに分類される.

1. 東進する慣性重力波 (図 2.3 中の細線)
2. 西進する慣性重力波 (図 2.3 中の点線)
3. 遅い速度で西進するロスビー波 (図 2.3 中の太線)

以下, 各振動数の添字  $l = 1, 2, 3$  はこの分類の番号に対応させる.

(ii)  $n = 0$  の場合

(3.5) で  $n = 0$  の場合,  $\omega$  に関する方程式:

$$(\omega - k)(\omega^2 + k\omega - 1) = 0 \quad (3.9)$$

が得られる. (3.9) から  $\omega$  の 3 つの解を得るが, これらの振動数  $\omega$  は (i) で示した波の分類に対応していない. なぜなら  $\omega$  は, 最早モード  $n$  の関数ではないからだ. し

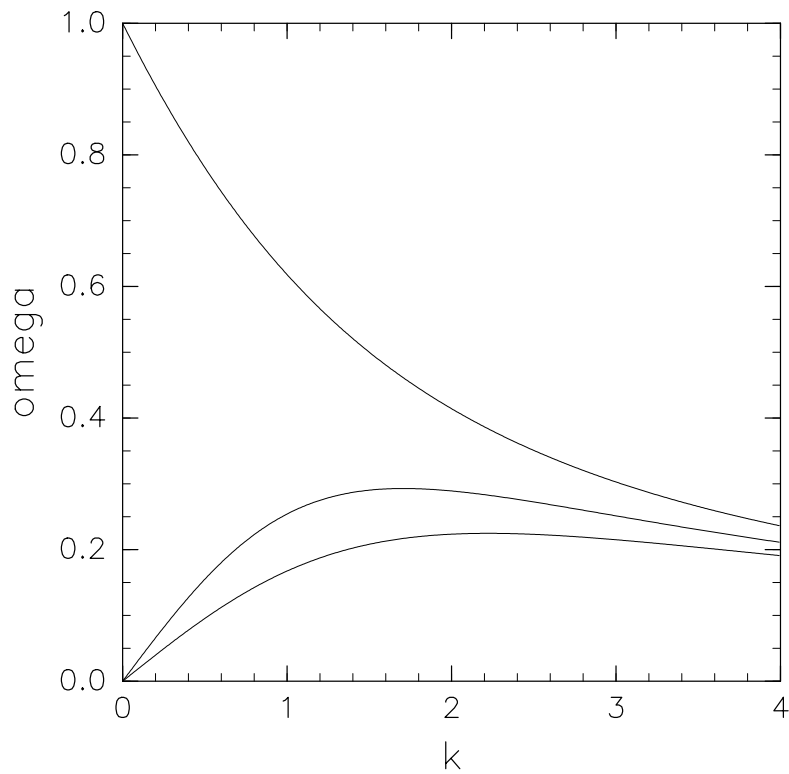


図 3.2: 分散関係式. ロスビー波の部分を拡大した. 上から  $n = 0, 1, 2$  のモードを示している.

たがって,  $n = 0$  における  $\omega$  は添字  $l$  を用いると, 以下のように表される:

$$\omega_l(k; 0) = \lim_{n \rightarrow 0} \omega_l(k; n).$$



ここまでの考察から, (3.9) の解は (3.10) のように分類される:

東進する重力波

$$\omega_1 = -\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1}$$

西進する重力波

$$\omega_2 = \begin{cases} -\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} & (\text{for } k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ k & (\text{for } k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{cases} \quad (3.10)$$

ロスビー波

$$\omega_3 = \begin{cases} k & (\text{for } k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ -\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} & (\text{for } k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{cases}$$

ここで, (3.9) の解のうち  $\omega = k$  の解は棄却されることを強調しておかなければならない. なぜならば, 元の方程式 (3.1) から (3.3) と (3.5) を導出する過程で以下の関係式

$$u = \frac{\omega y v + k \frac{dv}{dy}}{i(\omega - k)(\omega + k)}$$

が成り立っていることを前提としている. よって, この分母  $(\omega - k)(\omega + k)$  が分子がゼロでない限りゼロでないことが必要となる. 従って, (3.10) から  $k \leq 1/\sqrt{2}$  には重力波が,  $k \geq 1/\sqrt{2}$  にはロスビー波が存在しない.

このように,  $n = 0$  の場合, 西進する重力波はロスビー波と区別がつかない. 一般にロスビー波の振動数  $\omega_3$  は慣性重力波の振動数  $\omega_2$  よりも小さい. よって,

$$k < 1/\sqrt{2}, \quad \text{のとき, } k < -\frac{k}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1}$$

$$k > 1/\sqrt{2}, \quad \text{のとき, } k < -\frac{k}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1}$$

であるから, 解  $\omega$  は  $k < 1/\sqrt{2}$  の時慣性重力波,  $k > 1/\sqrt{2}$  の時ロスビー波と解釈される. 特に  $k = 1/\sqrt{2}$  の時, 即ち

$$\omega_2\left(k = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \omega_3\left(k = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = k = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.11)$$

の場合, 両者の振動数は等しい. 従って,  $n = 0$  の波はどちらにも分類することはできない. この波は混合ロスビー重力波と呼ばれる.

$v \neq 0$  の場合の波動解の特徴をまとめると、低いモード、特に  $n = 0$  においては、最早東進する波と西進する波の 2 種類しか存在しないことが分かる。なぜなら、西進する波のうち、図 3.2 の振動数ダイアグラムから分かる通り、慣性重力波とロスビー波の区別がつけられない、混合ロスビー重力波となっているからである。この混合ロスビー重力波の振動数は、慣性重力波からロスビー波までの広がりを持っているので、図 3.1 から分かる通り、慣性重力波とロスビー波の 2 つの波の種類を連続的につなげていることが分かる。

### 3.1.2 $v \equiv 0$ の場合

分散関係式 (3.5) は元の (3.1) を  $v$  のみの単一の方程式に変形して得た。従って、南北方向速度  $v$  を含まない解も存在すると考えられる。そこで  $v(x, y) \equiv 0$  として (3.1) を変形し直すと、

$$\begin{aligned} i\omega u + ik\phi &= 0, \\ yu + \frac{d\phi}{dy} &= 0, \\ i\omega\phi + iku &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

が得られる。 $u$  と  $\phi$  はいずれも第 1 式と第 3 式に現れ、この 2 変数の代数方程式になっているので、(3.12) は以下の行列式が満たされる場合にのみ解を持つ：

$$(\omega - k)(\omega + k) = 0.$$

よって、得られる解は

$$\begin{aligned} \phi = u &= Ce^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad \text{for } \omega = -k, \\ \phi = -u &= Ce^{\frac{1}{2}y^2}, \quad \text{for } \omega = k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

これらのうち、(3.13) の下の式は明らかに境界条件 (3.4) を満たさないので棄却される。興味深いことに、 $\omega = -k$  における解は (3.5) において  $n = -1$  にしたときに得られる解と等しい。よって、この解を以降  $n = -1$  でラベルづけすることにする。図 3.1 においてこのモードの  $\omega$  は太い点線で示してあるが、このプロットの特徴は、他の東進する波が波数がゼロに近づいて行くに従って振動数がほぼ  $\sqrt{2n+1}$  に漸近していくのに対し、 $n = -1$  の波はゼロに近づいていく点である。また、得られた波の解の形から、指数部分の肩が実数であることが分かるので、これはケルビン波の特徴を持っていると言える。

### 3.1.3 まとめ

以上で赤道における波の方程式 (3.1) を解いてその結果を考察した. この節をまとめると, 赤道域の擾乱により発生する自由波は, 東進慣性重力波, 西進慣性重力波, ロスビー波の 3 種類であることが分かった. このうち, 低いモードの波において, ロスビー波とも西進慣性重力波とも分類できない混合ロスビー重力波が存在し, これによって 2 つの波の種類は連続的になり, スペクトルにおいて全く開きがなくなる. また, 南北方向速度がゼロの波はケルビン波であることが分かった.

## 3.2 固有関数

前節において, (3.1) から固有値  $\omega$  の組を得た. この  $\omega$  は南北方向のモード  $n$  と, それぞれ東進慣性重力波, 西進慣性重力波, ロスビー波を示す  $l$  の 2 つの添字によってラベルされる. この節では各固有値に対応する固有関数がどのような空間構造を持つのかを具体的に調べていく.

### 3.2.1 $v \neq 0$ の場合

(3.1) から得られる  $u, \phi$  の固有関数は以下の関係式を満たす:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} \left( \omega y v + k \frac{dv}{dy} \right), \\ \phi &= \frac{1}{-i(\omega^2 - k^2)} \left( k y v + \omega \frac{dv}{dy} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

これをもとにして  $n \neq 0, n = 0$  の各場合の固有関数を導出する.

#### (i) $n \neq 0$ の場合

まず  $n \neq 0$  を仮定した場合の  $u, \phi$  の振る舞いを調べる. 解  $v(y)$  が

$$v(y) = i(\omega^2 - k^2) \psi_n(y), \quad \psi_n(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) H_n(y)$$

であるとする. この時, エルミートの多項式の関係

$$\begin{aligned} \frac{dH_n(y)}{dy} &= 2nH_{n-1}(y), \\ H_{n+1}(y) &= 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y) \end{aligned}$$

を利用すると,  $u(y)$ ,  $\phi(y)$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} \left\{ i\omega y (\omega^2 - k^2) \psi_n + ik (\omega^2 - k^2) \frac{d\psi_n}{dy} \right\} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \left\{ (\omega - k)yH_n + k \frac{dH_n}{dy} \right\} \\ &= \frac{1}{2}(\omega - k)\psi_{n+1} + n(\omega + k)\psi_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{i(\omega - k^2)} \left\{ ik y (\omega^2 - k^2) \psi + i\omega (\omega^2 - k^2) \frac{d\psi_n}{dy} \right\} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \left\{ (\omega - k)yH_n - \omega \frac{dH_n}{dy} \right\} \\ &= \frac{1}{2}(\omega - k)\psi_{n+1} - n(\omega + k)\psi_{n-1}, \end{aligned}$$

であるから,  $n \neq 0$  場合の解は

$$\begin{pmatrix} v \\ u \\ \phi \end{pmatrix}_{nl} = \begin{pmatrix} i(\omega_{nl}^2 - k^2)\psi_n \\ \frac{1}{2}(\omega_{nl} - k)\psi_{n+1} + n(\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \\ \frac{1}{2}(\omega_{nl} - k)\psi_{n+1} - n(\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

この時,  $n$  が奇数であるならば,  $v$  は奇関数であり,  $y$  に関して  $u$  と  $\phi$  は偶関数である.  $n$  が偶数であるならば,  $v$  は偶関数,  $u$ ,  $\phi$  は奇関数となる.

(ii)  $n = 0$  の場合

$n = 0$  の場合,  $v(y)$  を

$$v(y) = 2i(\omega + k)\psi_0(y)$$

として (3.14) に代入して計算すると,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} \left( \omega y v + k \frac{dv}{dy} \right) \\ &= \frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} (2iy(\omega + k)(\omega - k)) \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ &= 2y \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ &= \psi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{-i(\omega^2 - k^2)} \left( kyv + \omega \frac{dv}{dy} \right) \\
&= \frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} (2iy(\omega + k)(\omega - k)) \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\
&= 2y \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\
&= \psi_1
\end{aligned}$$

より,  $n = 0$  の場合の解は

$$\begin{pmatrix} v \\ u \\ \phi \end{pmatrix}_{0l} = \begin{pmatrix} 2i(\omega_{0l} + k)\psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

となる<sup>\*6</sup>.

### 3.2.2 $v = 0$ の場合

更に  $v = 0$  とした場合の解は,  $v \neq 0$  の時の  $n = -1$  のモードに対応する. この時, (3.12) と (3.13) の結果から,  $C = \text{const.}$  とし,  $u = \phi$  を (3.12) の第 2 式に代入

<sup>\*6</sup>これは (3.15) においてエルミート多項式の関係

$$H_0 = 1, \quad H_{-1} = 0$$

を用いて,

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{(\omega^2 - k^2)} \left\{ 2i\omega y(\omega + k)\psi_n + 2ik(\omega + k) \frac{d\psi_n}{dy} \right\} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \left\{ (H_{n+1} + 2nH_{n-1}) + \frac{4n\omega}{\omega - k} H_{n-1} \right\} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) H_1 \\
&= \psi_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} \left\{ 2iky(\omega + k)\psi_n + 2i\omega(\omega + k) \frac{d\psi_n}{dy} \right\} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \left\{ (H_{n+1} + 2nH_{n-1}) + \frac{4n\omega}{\omega - k} H_{n-1} \right\} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) H_1 \\
&= \psi_1
\end{aligned}$$

と計算した結果と合致する.

して微分方程式を解けば

$$\begin{aligned} u = \phi &= C \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ &= C \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) H_0 \\ &= C\psi_0 \end{aligned}$$

を得る.  $C = 1$  とすれば,

$$\begin{pmatrix} v \\ u \\ \phi \end{pmatrix}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

である. なお (3.15) から (3.17) の固有関数は直交系をなしている.

直交性は (3.12) から直接導き出せる. (3.1) を以下の様書き換える:

$$\Omega\xi + i\omega\xi = 0. \quad (3.18)$$

ただし

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -y & ik \\ y & 0 & \frac{d}{dy} \\ ik & \frac{d}{dy} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}$$

としている. この表現式において, 演算子  $\Omega$  は歪エルミート行列である. このような演算子の固有値は必ず虚数であることと, 対応する固有関数は縮退が起こらない限り直交系を成すことが知られている.

### 3.3 波の空間構造

3.1, 3.2 節で得られた固有関数の例を, 図 3.3 - 図 3.9 に掲載し, 各モード毎にその特徴を検討していく. 速度場 ( $u, v$ ) とジオポテンシャル場  $\phi$  は任意に取っている.

#### 3.3.1 $n = 1, 2$ の場合

まず  $n = 1$  の場合の東進慣性重力波, 西進慣性重力波の速度場とジオポテンシャル場を図 3.3, , ロスビー波のそれらを図 3.4 示す. 波数はいずれも  $k = 0.5$  である.

図 3.3 において、東進慣性重力波の速度場は、ジオポテンシャル場のセルの東側で赤道から高緯度へ向かっており、逆に西進慣性重力波の速度場は高緯度から赤道に向かっている。また、ジオポテンシャル場は東西慣性重力波の間で半波長ずれており、それぞれ  $(X, Y) = (0, 0)$  の地点に高圧場、低圧場の中心が存在している。また、速度場はジオポテンシャル場に対して、概ねどの場所でも直交、あるいはクロスするような形になっており、重力波的な特徴を示している。このような特徴を示す図 3.3 に対し、図 3.4 においては、赤道近傍に東西流の速度場が形成されており、ジオポテンシャル場は赤道に関して対称に存在している。また、速度場はジオポテンシャル場にほぼ沿っており、準地衡的な関係を示している。従って、 $n = 1$  の場合、重力波、ロスビー波の特徴がそれぞれ表れていると言える。

次に  $n = 2$  について慣性重力波とロスビー波をそれぞれ図 3.5, 図 3.6 に示す。 $n = 2$  の場合も、慣性重力波については  $n = 1$  と同様の特徴が見られる。しかし、特に西進慣性重力波において、重力波的な特徴は  $n = 1$  の時よりも見られなくなり、特に  $1 < Y < 2$ ,  $-2 < Y < -1$  で準地衡的な関係が成立しているように見える。また、図 3.6 のロスビー波型の場において、 $n = 1$  の図 3.4 と同様に準地衡的な関係を示しているものの、赤道近傍を周回するような速度場が出現している。この速度場は時計回りではあるが、これに対応するほぼ圧力場が存在していない点が特徴的である。

$n = 1, 2$  のいずれの場合にも共通するのは、西進慣性重力波やロスビー波の空間構造が、準地衡的な特徴を示している点である。これは赤道域ゆえコリオリ力が消えている事に起因していると考えられる。

### 3.3.2 $n = 0$ の場合

$n = 0, k = 0.5$  の場合の東進慣性重力波, 西進慣性重力波の空間構造を図 3.7 に,  $n = 0, k = 1.0$  のロスビー波の空間構造を図 3.8 に示す<sup>\*7</sup>.

---

<sup>\*7</sup>図 3.1 のダイアグラムから分かる通り,  $k > 1/\sqrt{2}$  の時はロスビー波,  $k < 1/\sqrt{2}$  の時は重力波として扱われる. 従って, 3.1.1 節で示したように,  $k < 1/\sqrt{2}$  の時, ロスビー波は存在せず, 逆に  $k > 1/\sqrt{2}$  の時慣性重力波は存在しない. 結果として,  $n = 0$  のモードにおいて, 東進する波か, 西進する波の 2 種類しか存在しない.



図 3.7 の東進慣性重力波は、速度場とジオポテンシャル場が概ね直交するかクロスするかしており、重力波的な特徴が支配的であると言える。しかし、西進慣性重力波を見ると、高緯度で速度場とジオポテンシャル場は地衡的關係を示し、逆に赤道付近では速度場とジオポテンシャル場が直交して重力波らしい特徴を示している。従って、この西進慣性重力波は重力波ともロスビー波とも分類しがたい性質を持っていると言える。同様に図 3.8 を見てみると、波数の違いはあれど西進慣性重力波とほぼ同じような特徴を示しており、これらの西進する波はロスビー波とも重力波とも言えない波であることが分かる。この要因としては、(3.16) で示されている通り、異なる  $\omega$  と  $k$  に対して変化するのは  $v$  しかなく、 $k$  の違いが小さければ速度場や圧力場の違いも小さくなるという関係が成り立っていることが挙げられる。

このように、 $n = 0$  の低次のモードにおいて、西進する波についてロスビー波とも重力波とも区別し難い波が出現する。このような波を混合ロスビー重力波と呼び、赤道に特徴的な波として分類されている。

### 3.3.3 $n = -1$ の場合

$n = -1$  の場合の空間構造を図 3.9 に示す。

この場合も、混合ロスビー重力波と同様に、ロスビー波か重力波かと分類することは不可能である。図 3.9 から、 $n = -1$  の波は  $x$  方向には純粋な重力波として振る舞い、 $y$  方向には東西方向速度と南北方向圧力勾配の間に地衡關係が成立していると分かるからだ。これと似た特徴を示すものとしてケルビン波が挙げられる。ケルビン波とは、重力波の位相速度で岸に沿って伝播する波のことであるが、境界条件である岸が必須である。一方、この赤道域で発生する  $n = -1$  の波には岸が存在しない。赤道域に出現する  $n = -1$  の波を、その性質から赤道ケルビン波として分類する。

## 3.4 赤道域における波の捕捉

赤道域における大気、海洋中の波動現象の特徴の 1 つとして、低周波数の波の捕捉が挙げられる。この節では 3.3 節で見てきた波が赤道域に捕捉される原因を、波の屈折と反射の観点から考察する。(3.15) で示した通り、低周波数の重力波とロスビー波はいずれも赤道域に限定される。ここで (3.3) から  $v$  は以下の領域において

のみ評価できる振幅を持つことが分かる<sup>\*8</sup>:

$$y = \frac{y^*}{\sqrt{c/\beta}} < \sqrt{2n+1}. \quad (3.19)$$

この領域では解は波型になり、これより外の領域では解はゼロに近づいていく。ここで  $y^*$  は波の南北の広がりを示している。(3.3) は、均質流体中を伝播する波の運動を決定し、(3.19) は屈折率が正の領域と決定する。以下各波の種類毎に分けて考察する。 $k$  は水平面における波数、 $c_g$  は純粋な重力波の位相速度、波に関して、波面から生じる小さな波の伝播に着目するため、波が持っているスケールにおいてコリオリ力パラメータは一定と考える。

### 3.4.1 慣性重力波の捕捉

捕捉されたモードの波は直接波の屈折として捉えられる。一様でない媒質中を伝播する波については、コリオリ力の変化は慣性重力波の速度の変化に影響する。慣性重力波の位相速度は以下のように与えられる<sup>\*9</sup>:

$$c = \pm \sqrt{c_g^2 + f^2/k^2}. \quad (3.20a)$$

この関係式から、高緯度になるほど伝播速度は大きくなるので、赤道付近で生じた波は赤道に向かって屈折あるいは反射することが分かる。

この意味において、赤道は慣性重力波にとってダクトのような役割を果たす。これまでに得た低モードの解は、このダクトを通過して伝播しているものである。

<sup>\*8</sup>(3.19) の導出を以下に示す。まず (3.3):

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + \left( \omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - y^2 \right) v = 0 \quad (3.3)$$

において、 $y$  が十分小さいとし、分散関係式 (3.5) を用いれば、左辺第 2 項の  $v$  に対する係数は、ほぼ定数  $\alpha$  として扱える。よって、(3.3) は

$$\frac{d^2 v}{dy^2} \approx -\alpha v,$$

と近似でき、これを  $\alpha$  の正負に従って境界条件と合わせて解を求めると、

$$\begin{aligned} \alpha > 0; & v(y) = \exp(\pm i\sqrt{\alpha}y), \\ \alpha < 0; & v(y) = \exp(-\sqrt{\alpha}y). \end{aligned}$$

よって、この関数は原点付近で極大を持ち、 $|y|$  が増大するにつれて急激にゼロに漸近していく関数となる。この場合、評価可能な有意の値を取る範囲はある値  $y_c$  を超えることはない。この  $y_c$  は  $\alpha = 0$  即ち  $y_c = \sqrt{2n+1}$  であり、これを有次元化すると、(3.19) になる。

<sup>\*9</sup>付録 A.2 参照。

### 3.4.2 ロスビー波の捕捉

同様の視点からロスビー波の捕捉について考える。β面近似した場合、ロスビー波の位相速度は以下のように表される<sup>\*10</sup>:

$$c_R = -\frac{\beta}{k^2 + f^2/gH}. \quad (3.20b)$$

ここで、 $H$ は流体の平均深さである。ここで、 $f$ が大きくなるにつれて $c_R$ の大きさは小さくなる、即ち高緯度ではロスビー波の速度は小さいことが分かる。よって、3章で得たように、赤道域で低次の波は捕捉されるにも関わらず、(3.20b)からは高緯度においてロスビー波の反射は期待できない。ロスビー波の場合、赤道域への波の捕捉を単純に波の反射として説明することできない。

### 3.4.3 赤道ケルビン波の捕捉

次に、赤道ケルビン波について考える。ケルビン波は岸(境界)に沿って1方向伝播する波であり、これは岸に捕捉されている波であると言える<sup>\*11</sup>。赤道ケルビン波に境界はないが、赤道を挟んでコリオリパラメタが変化する。これが境界と同じような役割を果たすため、赤道ケルビン波は赤道近傍で捕捉される。

## 3.5 潮汐理論との比較

第2章 - 第3章では、地球の回転の効果を考慮した、深さ一定の静水圧平衡下にある流体を伝播する赤道域の自由振動を、浅水系β面で議論してきた。この章では、球面上の流体の自由振動問題を扱うラプラスの潮汐方程式と比較して、赤道波がどの程度の近似となっているかを考察する。

まず赤道波の方程式が、ラプラスの潮汐方程式をどのように近似したものかを検証する。

第3章で浅水系の基礎方程式(3.1)を南北方向速度 $v$ のに関する単一の方程式に変形した。以下では潮汐理論との比較のために、まず(3.1)を $\phi$ に関する単一の方

<sup>\*10</sup>付録 A.4 参照.

<sup>\*11</sup>付録 A.3 参照.

程式に書き直す. (3.1) から  $u, v$  を消去すると,

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{2y}{\omega^2 - y^2} \frac{d\phi}{dy} + \left[ -\frac{k}{\omega} \frac{\omega^2 + y^2}{\omega^2 - y^2} - k^2 + (\omega^2 - y^2) \right] \phi = 0. \quad (3.21)$$

を得る. ここで, 潮汐理論による, ラプラスの潮汐方程式は以下のように書ける<sup>\*12</sup>:

$$\frac{d}{d\mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{d\Theta}{d\mu} \right) - \frac{1}{f^2 - \mu^2} \left[ \frac{s}{f} \frac{f^2 + \mu^2}{f^2 - \mu^2} + \frac{s^2}{1 - \mu^2} \right] \Theta + \frac{4a^2\Omega^2}{gh} = 0 \quad (3.22)$$

ここで, 球面圧力座標系のジオポテンシャルを  $\Theta$ ,  $f$  を地球の角速度の 2 倍,  $2\Omega$ , で割った自由波の振動数,  $s$  は東西方向の波数,  $a$  は地球の半径,  $g$  は重力加速度,  $\mu$  は余緯度  $\theta$  の  $\cos \theta$ ,  $h$  は等価深度を示している. (3.22) は  $f$  を固有値,  $h$  を固有関数とした  $\mu$  の 2 階微分方程式であるが, これを直接解く事は難しい. それ故,  $h$  を鉛直構造方程式として与え, 適切な境界条件  $\mu = \pm 1$  を課して  $f$  に属する固有関数  $\Theta$  を求める. ここでは赤道域もしくは  $\mu = 0$  での運動を考えているので, (3.23) の近似形は  $\mu \ll 1$  であるとして得られる<sup>\*13</sup>:

$$\frac{d^2\Theta}{d\mu^2} + \frac{2\mu(1 - f^2)}{f^2 - \mu^2} \frac{d\Theta}{d\mu} + \left[ -\frac{s}{f} \frac{f^2 + \mu^2}{f^2 - \mu^2} - s^2 + (f^2 - \mu^2) \frac{4a^2\Omega^2}{gh} \right] \Theta = 0. \quad (3.23)$$

$f \rightarrow \omega$ ,  $s \rightarrow k$ ,  $\mu \rightarrow y$  として (3.23) を (3.21) と比較すると, よく似ていることが分かる. 違いは (3.23) の右辺第 2 項に  $(1 - f^2)$ , 右辺第 3 項に  $4a^2\Omega^2/gh$  の因子がかかっていることである.  $f$  は地球の回転に対する振動の振動数という無次元量なので, 数日程度の周期を持つ低次の振動を考えるにあたっては 1 とみなしても良い. また,  $a, h, \Omega, g, \mu$  の量に対応した同スケールリングを適用すると, これら 2 つの項はほぼ等しくなる. 従って, これまで扱ってきた方程式は, 潮汐方程式を赤道域で近似したものに等しいことが分かる. 従って, Mastuno (1966) で得られた微分方程式 (3.3) は, ラプラスの潮汐方程式の近似と言えることを示している. 即ち, これまでに扱ってきた赤道波の解は, ラプラスの潮汐方程式の赤道における近似解である.

## 3.6 まとめ

以上で第 3 章から得られた  $(u, v, \phi)$  の場を, 低次のモード  $n = -1, 0, 1, 2$  について計算した結果を示し, その特徴を検討した. その結果, 中緯度と同様に赤道域でも東進慣性重力波, 西進慣性重力波, ロスビー波が存在することが分かった. しかし,  $n = 0$  の混合ロスビー重力波のように, 重力波ともロスビー波とも分類しがた

<sup>\*12</sup>導出は付録 C に示す.

<sup>\*13</sup>導出はラプラスの潮汐方程式と共に付録 C に示す.

い波も存在することが分かった。従って、このような低次のモードの波に関して慣性重力波とロスビー波を区別することは不可能であることが分かる。更に  $n = -1$  の赤道ケルビン波のように、重力波でもロスビー波でもない波も存在することが分かった。

また、波がどのように赤道に捕捉されているかを検証した。その結果、慣性重力波は波の反射と屈折により、また赤道ケルビン波は赤道が境界の役割を担うために捕捉されていることが分かった。ロスビー波の捕捉の原因については、Mastuno (1966) では分からなかった。

最後に、球面上での自由振動を扱うラプラスの潮汐方程式と比較して、浅水系  $\beta$  面近似の下で得た赤道波の方程式の近似の程度を調べた。その結果、浅水系の方程式 (3.3) はラプラスの潮汐方程式を余緯度が小さいものとして近似したものに等しいことが分かり、赤道波の解は、潮汐方程式の近似解であることが分かった。

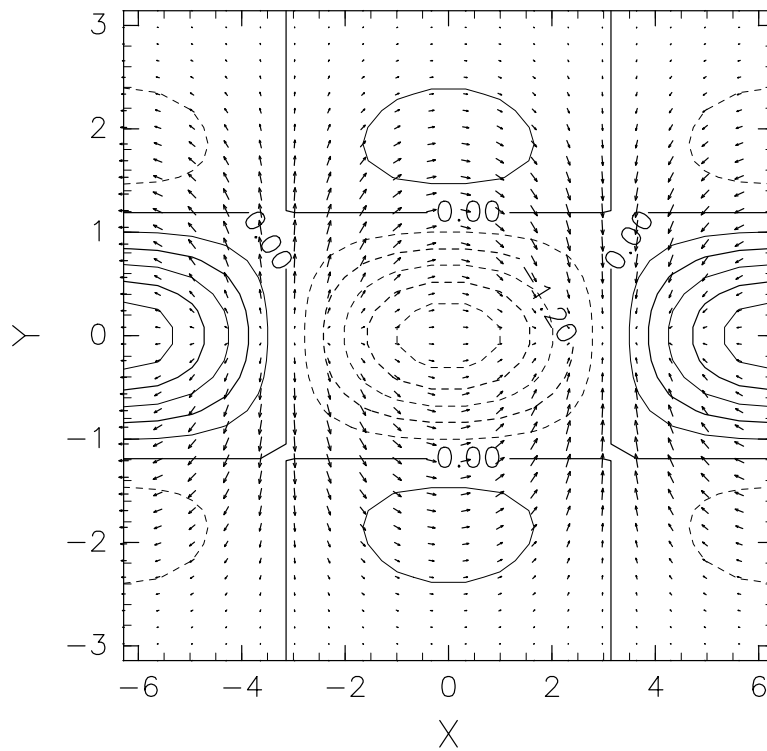
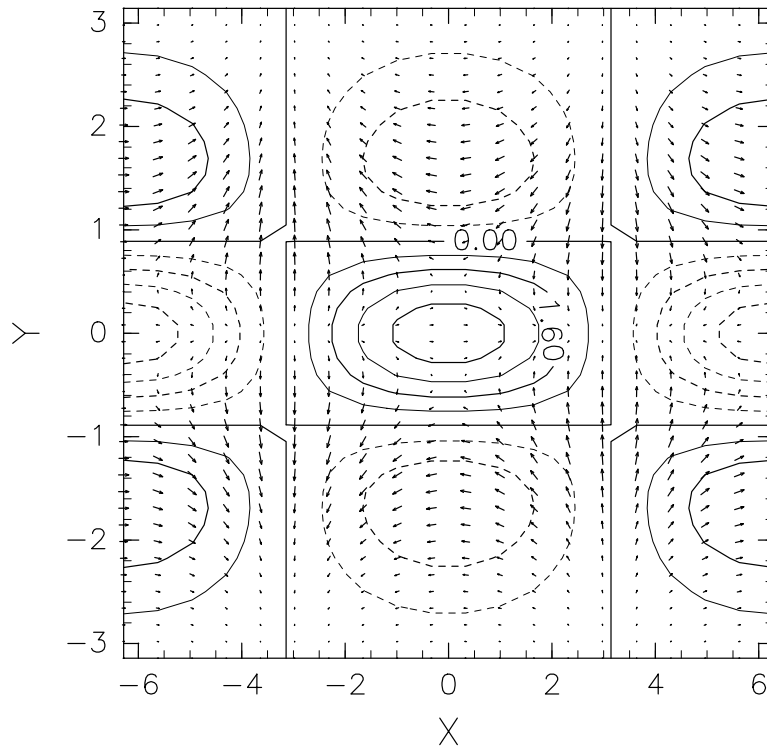


図 3.3:  $n = 1$ ,  $k = 0.5$  の  $(u, v, \phi)$  場. 上が東進慣性重力波, 下が西進慣性重力波.

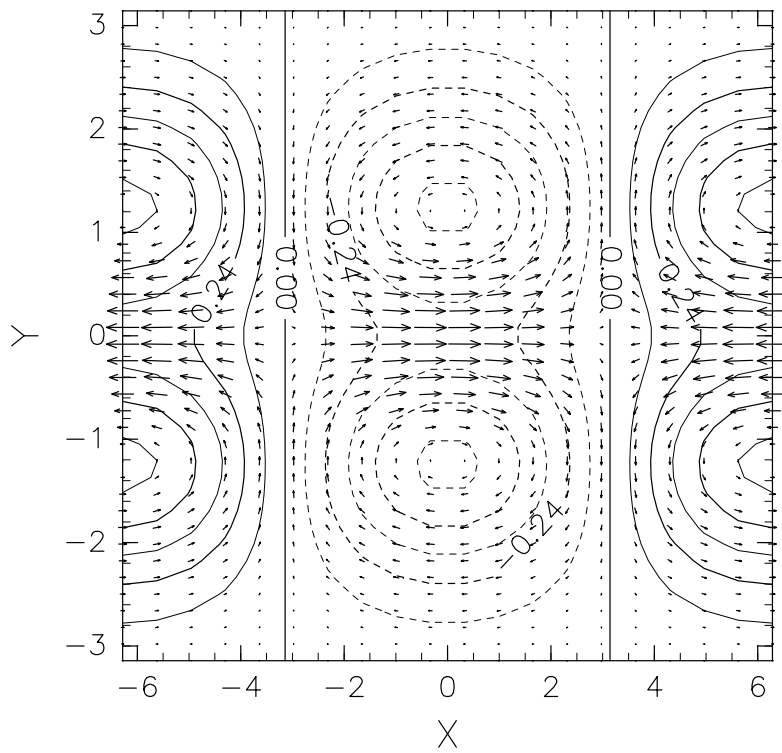


図 3.4:  $n = 1, k = 0.5$  の  $(u, v, \phi)$  場. ロスビー波.

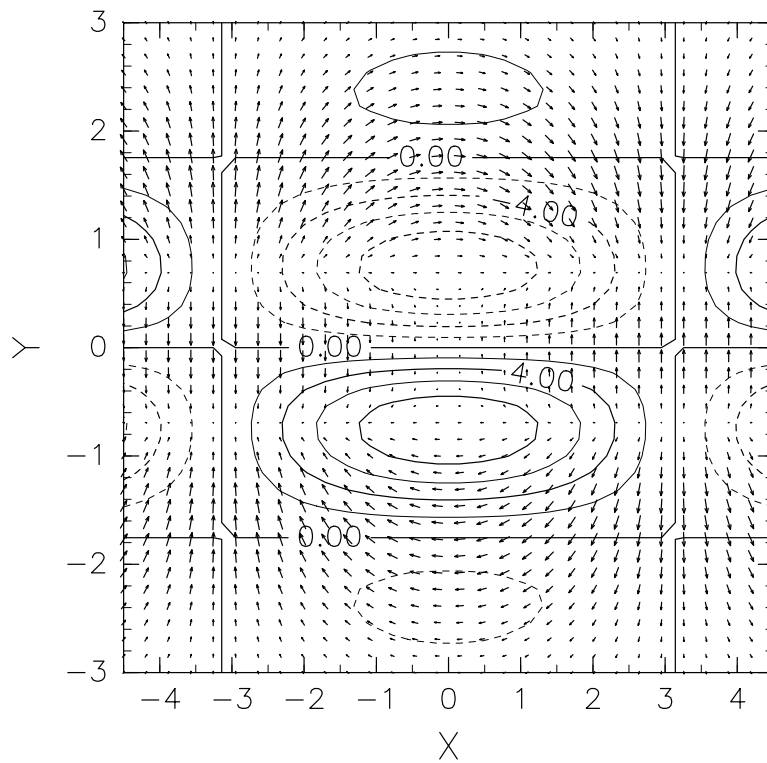
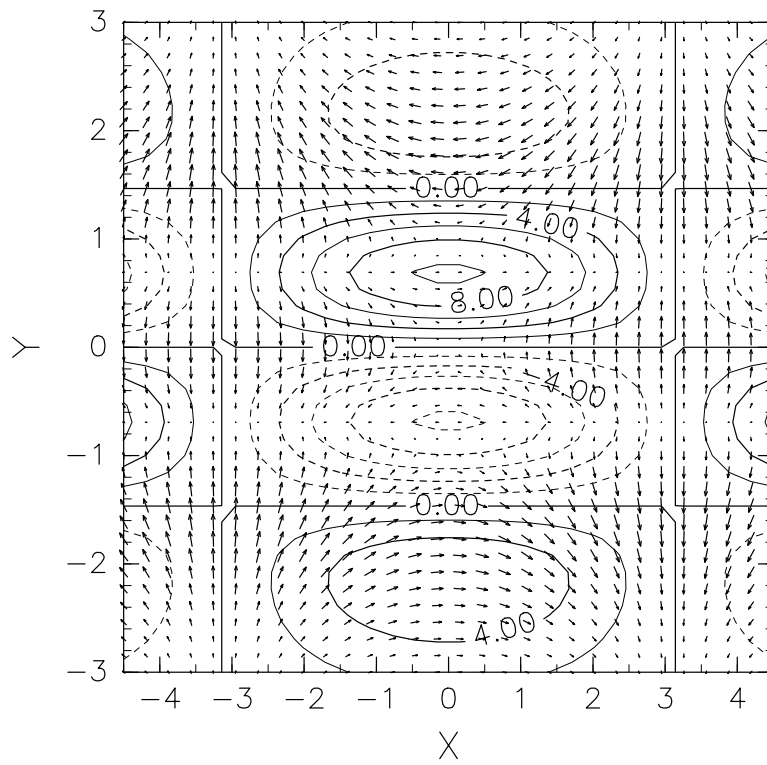


図 3.5:  $n = 2$ ,  $k = 0.5$  の  $(u, v, \phi)$  場. 上が東進慣性重力波, 下が西進慣性重力波.



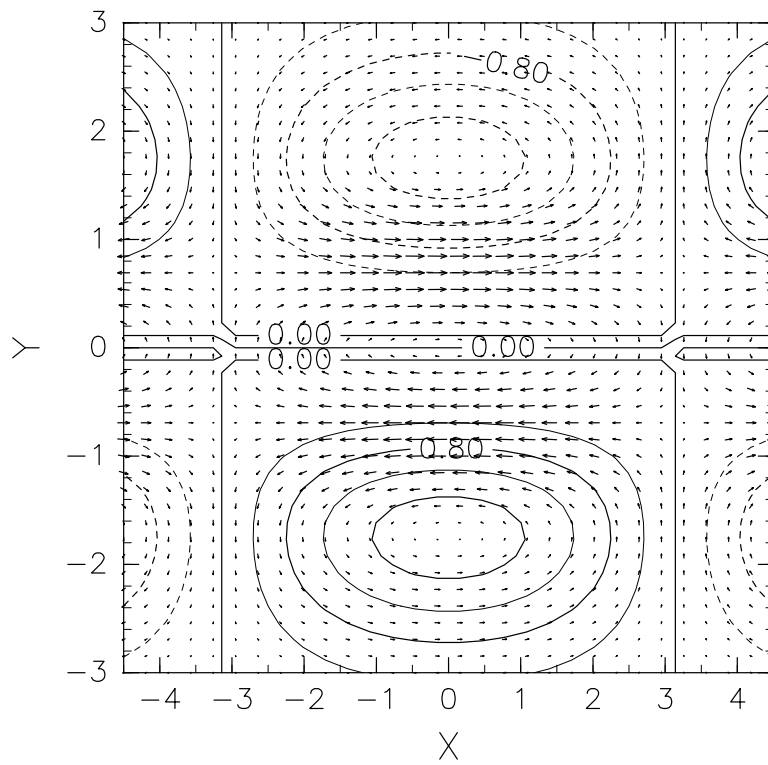


図 3.6:  $n = 2, k = 0.5$  の  $(u, v, \phi)$  場. ロスビー波.

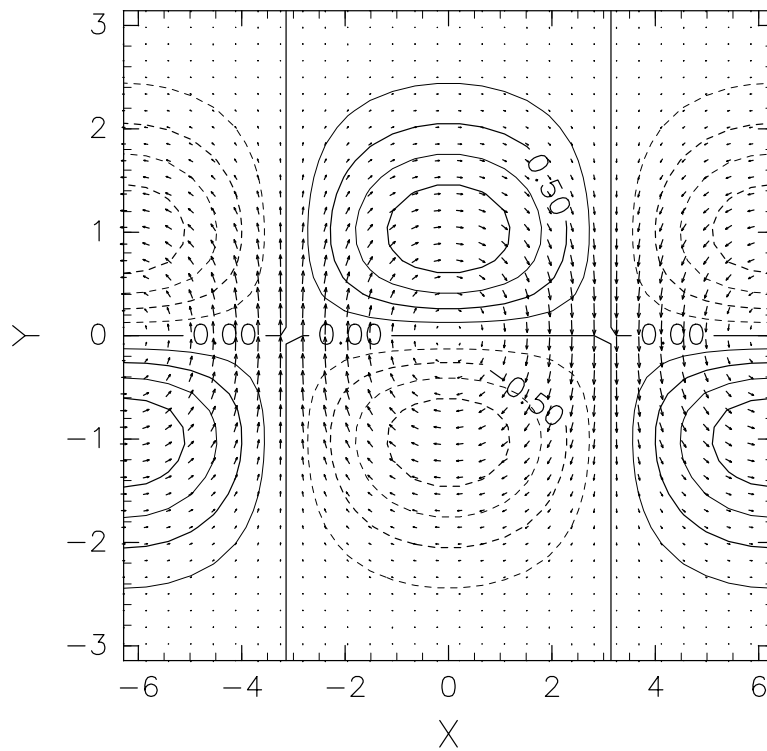
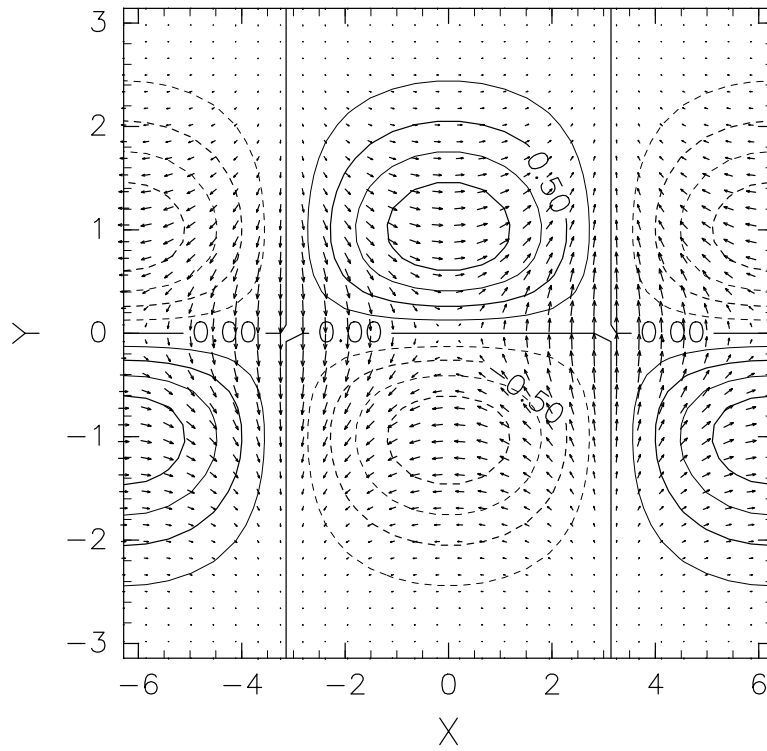


図 3.7:  $n = 0, k = 0.5$  の  $(u, v, \phi)$  場. 上が東進慣性重力波, 下が西進慣性重力波.

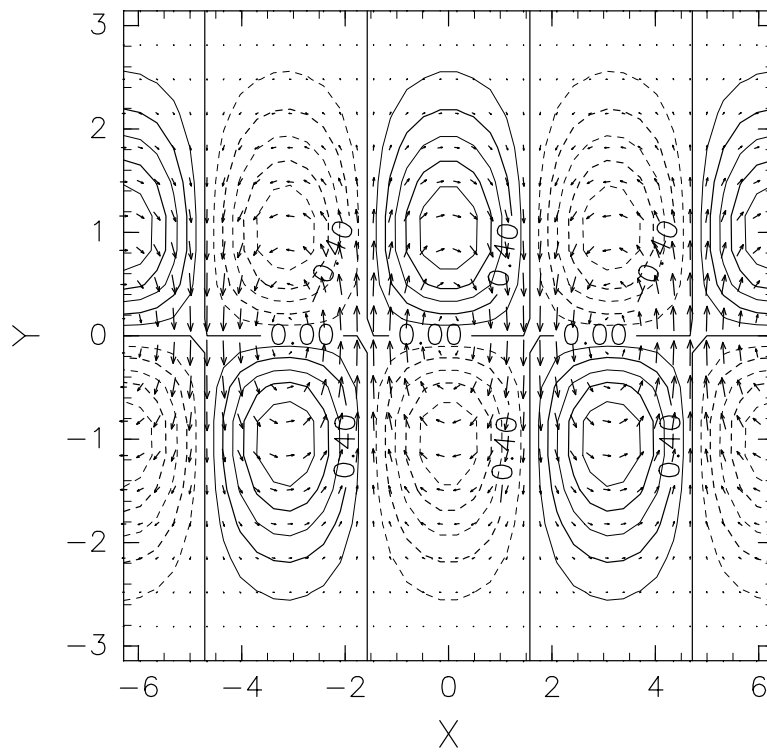


図 3.8:  $n = 0, k = 1.0$  の  $(u, v, \phi)$  場. ロスビー波.

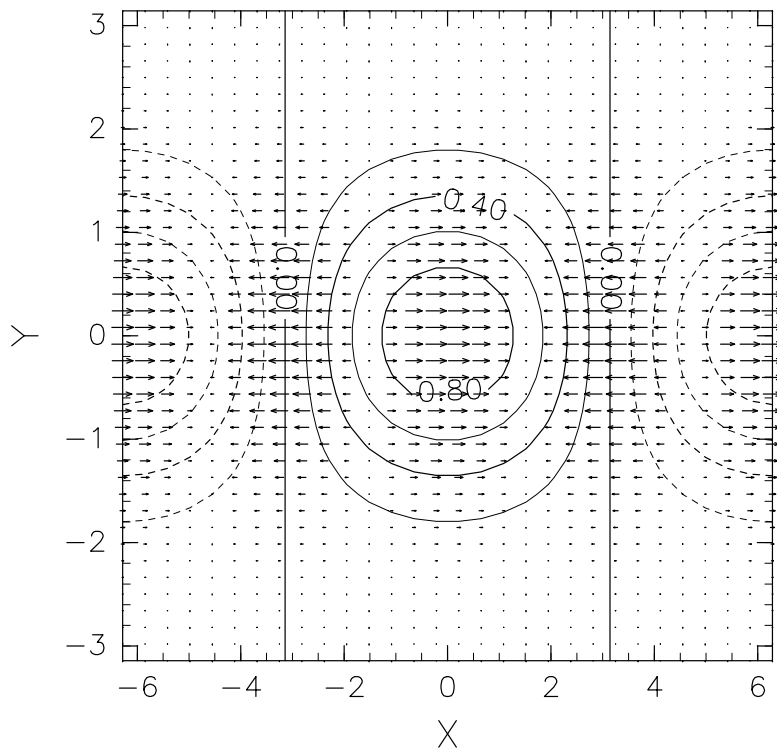


図 3.9:  $n = -1, k = 0.5$  の  $(u, v, \phi)$  場. 赤道ケルビン波.

## 第4章 赤道域の強制振動

ここまで、赤道域における自由振動を議論してきた。この章では、何らかの外力によって励起された強制振動について考察する。まずは一般的な数学的解析を行い、次に赤道域に沿って交互に質量の湧きだしと沈み込みがあった場合の特殊解を考え、波の空間構造を具体的に調べる。

### 4.1 一般的な解析

まずは一般的な数学的解析を示す。2章で扱ったモデルと同じモデルを使用する。外力が働いた結果定常状態になった場合の運動方程式と質量保存則は以下の通りである：

$$\begin{aligned} -fv + g\frac{\partial h}{\partial x} &= -\alpha u + F_x, \\ fu + g\frac{\partial h}{\partial y} &= -\alpha v + F_y, \\ H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\alpha h + Q. \end{aligned} \tag{4.1}$$

(2.1)と比較して右辺には2つの項が追加されている。 $F_x$ ,  $F_y$ はそれぞれ外力の $x$ ,  $y$ 成分で、 $Q$ は質量のソース(シンク)で、流体の運動や表面変位のうねりへの寄与を示している。 $F_x$ ,  $F_y$ ,  $Q$ が与えられて流体が運動を開始すると、摩擦力や拡散などの復元力が働き、相互作用を起こしてやがて定常状態に至る。この復元力の効果を単純化した形で $(-\alpha u, -\alpha v, -\alpha h)$ の項として加えている。

(4.1)は2章の後半で言及した通り、大気運動の内部モードとして記述される。この場合、 $h$ は温度と等価な等圧面間隔、 $Q$ は熱のソースとシンクとして表現される。このように捉えることで、2章と同様に(7.1)は無次元化される。更に外力の項が全て $x$ 方向に正弦波解を持っていると仮定すると、共通因子 $\exp(ikx)$ は落とすこ

とができるので, (4.1) は以下のように書き換えられる:

$$\begin{aligned}\alpha u - yv + ik\phi &= F_x, \\ \alpha v + yu + \frac{d\phi}{dy} &= F_y, \\ \alpha\phi + iku + \frac{dv}{dy} &= Q.\end{aligned}\tag{4.2}$$

次に境界条件を考える. 今までと同様の条件:

$$u, v, \phi \rightarrow 0 \quad \text{when } y \rightarrow \pm\infty,$$

が課される. 3章で得た自由振動の解も, 同じ境界条件を満たして完全系を成す固有関数の組を得たが, これは任意の3関数の組  $((u, v, \phi)$ , これらは絶対値の二乗の全領域の積分値が有限値になる条件を満たす) は固有関数の線形結合によって表されることを示している. 従って (7.2) の解と外力の関数は, 自由波の重ね合わせとして表現できる.

(4.2) を行列を用いて書き換えると,

$$(\Omega + \alpha I)\chi = \sigma\tag{4.3}$$

である. なおそれぞれの文字は, 以下の行列

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -y & ik \\ y & 0 & \frac{d}{dy} \\ ik & \frac{d}{dy} & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ Q \end{pmatrix}$$

を表している. 3章で得た自由波の解を  $\xi_n$ , その振動数を  $\omega_n$  として表すと, (4.3) は以下に従う:

$$\Omega\xi_n = -i\omega_n\xi_n.\tag{4.4}$$

なお添字  $n$  によって解をまとめている.

$\chi$  と  $\sigma$  を  $\xi$  について展開すると,

$$\chi = \sum a_n \xi_n, \quad \sigma = \sum b_n \xi_n.$$

これを (4.3) に代入すると

$$\sum (\Omega + \alpha I) a_n \xi_n = \sum b_n \xi_n,$$

であり, 更に (4.4) を代入すると

$$\sum a_n (-i\omega_n + \alpha) \xi_n = \sum b_n \xi_n,\tag{4.5}$$

を得る.  $\xi$  は互いに直交であるので, 展開係数  $a_n, b_n$  は以下の関係式を満たす:

$$a_n = \frac{1}{\alpha - i\omega_n} b_n. \quad (4.6)$$

この関係式は  $b_m$  が外力が加えられた時, どのように (4.2) の系が応答するかということを示している. (4.6) から同程度の入力  $b_m$  があつた場合, 低い振動数の波は大きな振幅を, 逆に大きな振動数を持つ波は小さな振幅を持つことが分かる. これは現在我々が定常状態か振動数ゼロの場合しか考慮していないことに起因する. 以上から, 振動数が小さくなればなるほど, 励起に対して共鳴的であることが分かる.  $b_n$  は以下の関係式:

$$b_n = \frac{\int \bar{\xi}_n(y) \sigma(y) dy}{\int |\xi_n(y)|^2 \sigma(y) dy}.$$

から得られるので,  $a_n$  を計算して得る事ができ, 結果的に外力が与えられた場合の (4.2) の任意の解が得られる.

## 4.2 特殊解

ここで, (4.2) の特殊解について考察する. 以下のような非斉次項に起因する解について考える:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q(y) \end{pmatrix}, \quad Q(y) = \phi_0 \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right).$$

これを (7.2) に代入すると,

$$\alpha u - yv + ik\phi = 0, \quad (4.7a)$$

$$\alpha v + yu + \frac{d\phi}{dy} = 0, \quad (4.7b)$$

$$\alpha\phi + iku + \frac{dv}{dy} = Q, \quad (4.7c)$$

となる. 以下 3 章と同様の手順で解いていく.

### 4.2.1 解の導出

まず (4.7a)  $\times ik$  - (4.7c)  $\times \alpha$  より

$$\phi = -\frac{1}{k^2 + \alpha^2} \left( ikyv + \alpha \frac{dv}{dy} - \alpha Q \right). \quad (4.8)$$

また (4.7a)× $\alpha$ −(4.7c)× $ik$  より

$$u = \frac{1}{k^2 + \alpha^2} \left( \alpha y v + ik \frac{dv}{dy} - ikQ \right). \quad (4.9)$$

(4.8) と (4.9) を (4.7b) に代入して

$$\begin{aligned} \alpha v + \frac{1}{\alpha^2 + k^2} \left( \alpha y^2 v + ik y \frac{dv}{dy} - ikQ \right) - \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \frac{d}{dy} \left( ik y v + \alpha \frac{dv}{dy} + \alpha Q \right) &= 0, \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 v}{dy^2} + \left\{ -(\alpha^2 + k^2) - y^2 + \frac{ik}{\alpha} \right\} v &= -\frac{dQ}{dy} + \frac{ik}{\alpha} y Q, \end{aligned} \quad (4.10)$$

を得る. これは (3.3) の右辺  $\neq 0$  の場合の方程式となっている. この (4.10) に仮定した  $Q$ ,  $v$  の解を代入する. (4.10) の右辺について, 与えられた質量のソースとシンク:

$$Q = \exp \left( -\frac{1}{2} y^2 \right), \quad (4.11)$$

を代入すると,

$$(\text{右辺}) = \left( \frac{ik}{\alpha} + 1 \right) y \exp \left( -\frac{1}{2} y^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{ik}{\alpha} + 1 \right) H_1(y), \quad (4.12)$$

となる. 次に左辺について,

$$v = \exp \left( -\frac{1}{2} y^2 \right) \tilde{H}, \quad \tilde{H} = \sum C_n H_n(y),$$

を代入すると,

$$(\text{左辺}) = \frac{d^2 \tilde{H}}{dy^2} - 2y \frac{d\tilde{H}}{dy} + \left\{ -\alpha^2 - k^2 - 1 + \frac{ik}{\alpha} \right\} \tilde{H}, \quad (4.13)$$

となる. これとエルミート多項式の関係を利用して整理すれば, (4.10) は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -k^2 - \alpha^2 - 1 + \frac{ik}{\alpha} - 2n \right) C_n H_n(y) &= \frac{1}{2} \left( \frac{ik}{\alpha} + 1 \right) H_1(y), \\ \Leftrightarrow C_n &= 0. \quad (n \neq 1) \end{aligned}$$

ここで  $\alpha = i\omega$ , 右辺の係数 = 0 として代入すると, (3.5) に等しくなる. また  $n = 1$  の時,

$$\begin{aligned} \left( -\alpha^2 - k^2 - 1 + \frac{ik}{\alpha} - 2 \right) C_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{ik}{\alpha} + 1 \right), \\ \Leftrightarrow C_1 &= \frac{ik + \alpha}{2\alpha(-\alpha^2 - k^2 - 3) + 2ik}. \end{aligned} \quad (4.14)$$



以上より,

$$v = 2C_1 y \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right), \quad (4.15)$$

を得る. これを (4.8), (4.9) に代入して整理すれば,  $u, v, \phi$  の解

$$\begin{pmatrix} v \\ u \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 y \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ \frac{1}{\alpha^2+k^2} (2C_1(\alpha - ik)y^2 + ik(2C_1 - 1)) \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ -\frac{1}{\alpha^2+k^2} (2C_1(ik - \alpha)y^2 + \alpha(2C_1 - 1)) \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

を得る.

## 4.2.2 解の吟味

解 (4.16) を吟味する. (4.16) をエルミート多項式を用いて整理すると, 以下を得る:

$$v = C_1 H_1(y) \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right), \quad (4.17a)$$

$$u = \frac{1}{\alpha^2 + k^2} \left\{ \frac{1}{2}(\alpha - ik)C_1 H_2(y) + (C_1(\alpha + ik) - ik)H_0(y) \right\} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right), \quad (4.17b)$$

$$\phi = \frac{1}{\alpha^2 + k^2} \left\{ \frac{1}{2}(\alpha - ik)C_1 H_2(y) - (C_1(\alpha + ik) - \alpha)H_0(y) \right\} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right). \quad (4.17c)$$

4.2.1 節で示したように, まず  $Q$  の強制項によって  $n = 1$  のモードの  $v$  が生成され, これによって導かれる  $u, \phi$  は  $n = 0, n = 2$  のモードを含んでおり, これと第 4 章から, 解 (4.16) は東進慣性重力波, 西進慣性重力波, ロスビー波を持っていることが分かる. 更に (3.15) と比較すると, ほぼ同じ形の解を持っているが, (4.17b) と (4.17c) にそれぞれ  $-ikH_0(y)e^{-y^2/2}$ ,  $-\alpha H_0(y)e^{-y^2/2}$  が付加していることが分かる. これは (3.17) のケルビン波のモードが現れていると考えられ<sup>\*1</sup>, 従って (4.16) はこの 4 種類の波の重ね合わせであると考えられる.

## 4.2.3 熱強制応答に対する自由振動解の寄与の評価

4.1 節で述べた通り, 強制振動解は自由振動解の重ね合わせによって表される. ここでは 4.2.1 節で設定した熱源と熱強制応答が東西慣性重力波, ロ

<sup>\*1</sup> $\alpha = i\omega$ , ケルビン波の分散関係  $\omega = -k$  を代入すればよい.

スビー波, ケルビン波それぞれの程度寄与することにより再現されるかを, 直交関数展開により定量的に調べる.

自由振動解  $\xi_m$  は 3.2 節より直交系をなしているので, 以下の性質が利用できる:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_n^* \xi_{m'} dy = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_m|^2 dy \delta_{m,m'}. \quad (4.18)$$

熱強制項  $\sigma$  は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

であるので, 解の第 3 成分に  $\psi_0$  を含む直交関数系 ( $\xi_{-1}$  と  $\xi_{1\sim 3}$ ) でのみ  $\sigma$  を表現できる. よって,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = b_{-1} \xi_{-1} + \sum_{m=1}^3 b_m \xi_m \quad (4.20)$$

と表される. この展開係数  $b_{-1}$ ,  $b_m$  を求める.

まず  $b_{-1}$  について, (4.20) の両辺に  $\xi_{-1}^*$  との内積を取ると,

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{-1}^* \sigma dy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^2 dy. \\ \text{(右辺)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{-1}^* \xi_{-1} dy + \sum_{m=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{-1}^* \xi_m dy \\ &= 2b_{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^2 dy \end{aligned}$$

よって,  $b_{-1}$  は

$$b_{-1} = \frac{1}{2}. \quad (4.21)$$

同様にして  $b_m$  を求める. (4.20) と  $\xi_{m'}$  との内積:

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{m'}^* \sigma dy, \\
 &= -(\omega_{m'} + k) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^2 dy, \\
 &= -\sqrt{\pi}(\omega_{m'} + k). \\
 (\text{右辺}) &= \sum_{m=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{m'}^* \xi_m dy, \\
 &= b_{m'} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_{m'}|^2 dy, \\
 &= b_{m'} \left[ \frac{1}{2}(\omega_{m'} - k)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2^2 dy + 2(\omega_{m'} + k)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^2 dy + (\omega_{m'}^2 - k^2) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^2 dy \right].
 \end{aligned}$$

ここで,  $\psi_m$  は互いに直交するから,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^2 dy = 2^m m! \sqrt{\pi},$$

と計算され,

$$b_{m'} = -\frac{\omega_{m'} + k}{4(\omega_{m'} - k)^2 + 2(\omega_{m'} + k)^2 + 2(\omega_{m'}^2 - k^2)^2}, \quad (4.22)$$

を得る. 以上から,  $\sigma$  を  $\xi_m$  で直交展開した時の展開級数  $b_{-1}$ ,  $b_m$  が求まった. 4.2 節の設定のもと, 波数  $k$  を 0.5 として  $b_m$  の具体的な値を計算する<sup>\*2</sup> と,

波の種類	振動数	展開級数
ケルビン波	$\omega_{-1} = -0.5000$	$b_{-1} = 0.5000$
東進慣性重力波	$\omega_1 = -1.8753$	$b_1 = 0.0288$
西進慣性重力波	$\omega_2 = 1.7203$	$b_2 = 0.0728$
ロスビー波	$\omega_3 = 0.1549$	$b_3 = -0.4560$

表 4.2.1:  $k = 0.5$  における各振動数の展開係数

の結果を得る. これらの数値を比較すると, 熱強制に対してはロスビー波とケルビン波の応答が支配的であることが分かる.

#### 4.2.4 波の空間構造

$k = 0.5$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $Q$  を (4.11) とした場合の波の空間構造を, 図 4.1 に示す.

<sup>\*2</sup>用いた  $\omega_m$  の値は, (3.5) で表される分散関係式に基づいている.

まず速度場に関して、赤道域に強い東西流が形成されていることと、赤道域から高緯度域に向かい、高緯度でコリオリ力に偏向されて再び赤道域に戻ってくる流れが形成されていることが分かる。次にジオポテンシャル場に関して、速度場が反時計回りの場所では低ジオポテンシャル、時計回りの場所には高ジオポテンシャル場が出現している。また低ジオポテンシャル側が高ポテンシャル側に対して窪んでいくトラフと、高ジオポテンシャル側が低ジオポテンシャル側に対して張り出しているリッジが形成されており、低ジオポテンシャル場は高ジオポテンシャル場によって2つに分断されていることが分かる。更に、速度場は赤道近傍を除いて概ねジオポテンシャル場に沿うようにして形成されていることから、重力波よりはロスビー波が支配的であることが分かる。これはロスビー波の振動数は重力波のそれよりもはるかに小さく、(4.6)から励起に対して共鳴的であることから自然な結果と言える。このことは、4.2.3での数値的な計算結果とも合致する。

これらの特徴と、質量のソースとシンクを与える強制項  $Q(y)$  の場を対応させると、図 4.1 は以下のように説明される:

ある時刻に質量のソースとシンクが与えられた場合、表面変位はソースがある地点では上昇し、シンクがある地点では下降するというように変化する。この表面変位の変動によって流体運動が引き起こされ、高緯度域に達した流れがコリオリ力によって偏向され、圧力場に対応した地衡流に収束する。このようにして反時計、あるいは時計回りの流れ場が、高圧、あるいは低圧場の場所に対応してでき、高緯度域に循環する速度場が形成される。また赤道近傍に、ソースとシンクの不均一を埋め合わせる捕捉された強い東西流が形成され、この流れに伴ってリッジとトラフが赤道に沿って分布し、圧力のセルを2つに分断している。この東西流に関して、高緯度域からの流れの向きは変わることによってこの流れが強化されることは重要である。即ち、高緯度域の循環は、同じ圧力場に対して回転のセンスが各半球で逆であるために、赤道域の各セルに向かって収束あるいは発散する運動をもたらす。例えば、図 4.1 の低圧場の西端において、流れは赤道に向かって収束し、東に向かって方向を変えていく一方で、水平速度の保存によって流体表面の上昇と赤道に沿ったリッジを生み出す。このようにして圧力場と流れ場の間に地衡流関係が赤道近傍で成立する。

ここで設定した質量のソースとシンクは、そのまま相対的に加熱された場と冷却されている場であると言っても良い。熱を受けて密度が小さくなった場は上昇してソースとなり、冷却されて密度が大きくなった場は下降してシンクとなるからだ。従ってこの強制振動解は、赤道域の熱源応答を示しているとも言える。

## 4.3 まとめ

以上で赤道域における強制力を与えた場合の波の空間構造を考察した。数学的な解析から、強制振動解は東進慣性重力波、西進慣性重力波、ロスビー波、赤道ケルビン波の線形結合で表されることが分かった。例として、赤道に沿って質量のソースとシンクが与えられた場合の特殊解を求め、その空間構造を計算した。その結果、数学的な解析の通り、4つの波の特徴を重ね合わせたような結果が得られ、直交関数展開による評価から、特にロスビー波とケルビン波が支配的であることが分かった。

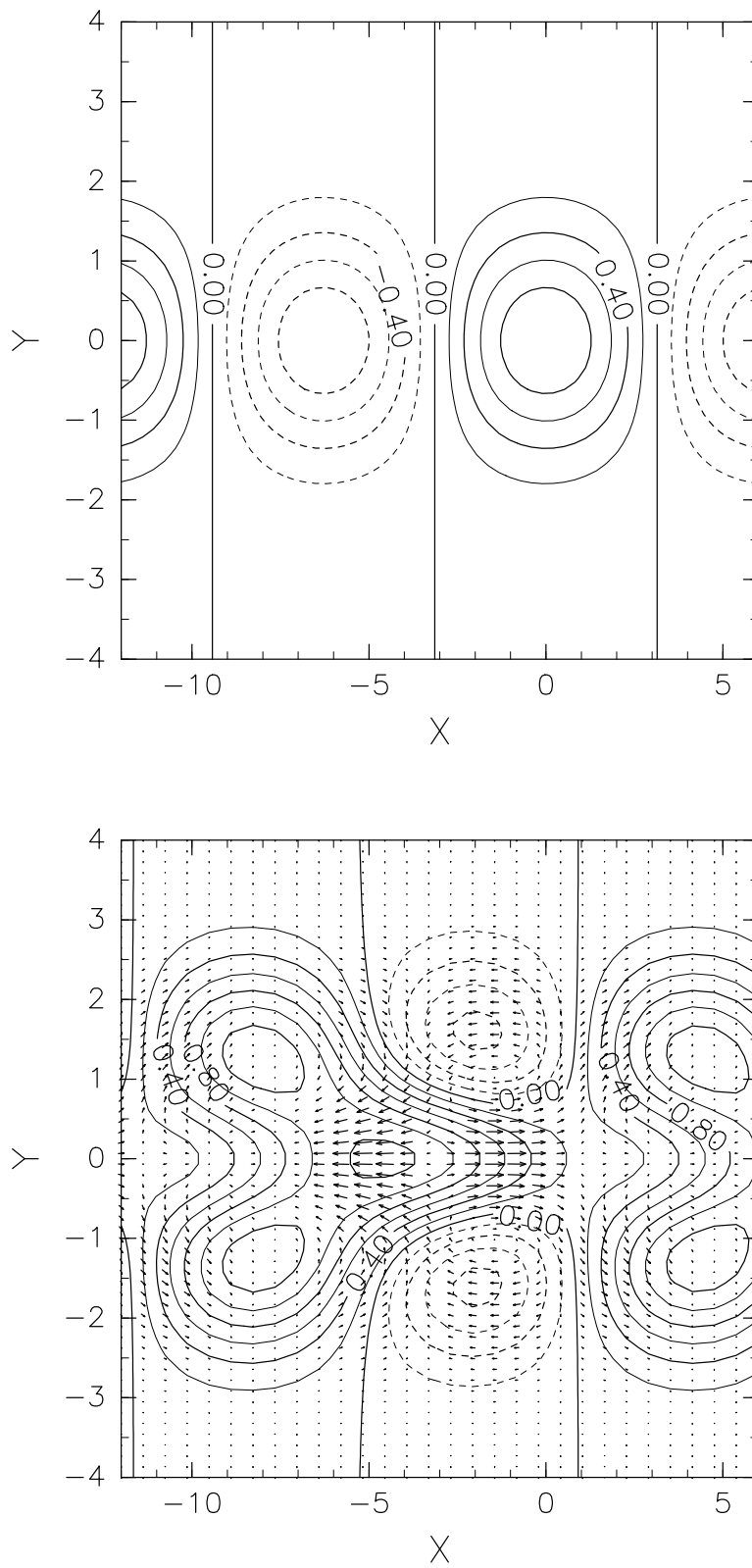


図 4.1: 強制振動解. 上が質量のソースとシンク, 下が  $k = 0.5, \alpha = 0.2$  の  $(u, v, \phi)$  場.

## 第5章 まとめ

本論文をまとめる. Matsuno (1966) に基づいて, 赤道域の大気海洋の大規模波動現象を考察した. 赤道  $\beta$  面上における均一非圧縮流体 1 層浅水モデルで, 波動解を仮定して分散関係を求め, 速度場とジオポテンシャル場を求めた. その結果, 赤道域に特徴的ないくつかの波が存在することが分かった.

### (1) 自由振動

コリオリ力の小さな赤道域においても, 中緯度と同様に慣性重力波とロスビー波の 2 つの種類の波が存在することが分かった. 特に, 南北方向のモードが小さい場合, 赤道に特有の波の空間構造が得られる. 以下にそれらの特徴をまとめる.

#### 慣性重力波, ロスビー波

波の南北モードがゼロや  $-1$  でない場合, コリオリパラメタ  $f$  が小さい赤道付近においても慣性重力波, ロスビー波は存在することが分散関係式から求められる. 具体的な空間構造を調べて見ると, 慣性重力波は速度場とジオポテンシャル場が直交し, ロスビー波は互いにほぼ沿っている, というそれぞれの特徴がよく現れていることが分かった. 慣性重力波とロスビー波は, 一般的に振動数によって明確に区別されるが, 空間構造もこれに従う.

#### 混合ロスビー重力波

波の南北モードがゼロである場合, 赤道域に存在する波は最早慣性重力波ともロスビー波とも言えない特徴を示すようになる. この波を混合ロスビー重力波と呼び, 南北波長より東西波長の方が長いときにはロスビー波, 東西波長より南北波長が長い場合は慣性重力波の特徴が支配的になる. また, 速度場とジオポテンシャル場の関係は準地衡的になる. 図 3.7 と図 3.8 ように, 振動数によって明確に波の種

類を区別できない以上, 赤道域の  $n = 0$  の波を区別することは不可能である.

## 赤道ケルビン波

波のモードが  $-1$  の場合, 赤道に沿って東進するケルビン波に似た波が存在する. これを赤道ケルビン波と呼ぶ. ケルビン波は岸などの境界があって初めて伝播する波であるが, 赤道ケルビン波の場合, コリオリパラメータが変化する境界, 即ち赤道がその境界の役割を担っていると考えられる.

### (2) 強制振動

最後に, 強制力が働いた場合の波の空間構造を考察した. 自由振動の時と同様に波動解を仮定して赤道  $\beta$  面の方程式を解くと, 得られる強制振動解は自由振動の重ね合わせであることが分かった. 具体的に質量のソースとシンクの強制力 (あるいは熱強制) がある場合の解を求めると, 慣性重力波, ロスビー波, 混合ロスビー重力波, 赤道ケルビン波の重ね合わせとなっている解が求められた. 実際に計算して空間構造を調べてみると, その通りとなっており, 解を直交関数展開して評価すると, 特にロスビー波とケルビン波が支配的になっていることが分かった.



## 付録 A 波の性質

この付録では、浅水系の基礎方程式 (2.1) から自由振動解として導かれる重力波、慣性重力波、ケルビン波、ロスビー波の性質の概略を、小倉 (1978) に基づいて述べる。

以下では 2 章で求めた浅水系の基礎方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g\frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu + g\frac{\partial h}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right) &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

で用いているコリオリパラメタ  $f$  の設定を変化させることによって、それぞれどのような波動解が導かれるかを見ていく。第 3 章では赤道近傍におけるコリオリパラメタを用いた浅水系の方程式を解いたが、ここではより一般的な場合を考える。

### A.1 重力波

まず、(2.1) において、回転の効果がない状態、つまりコリオリパラメタ  $f$  が  $f = 0$  である場合を考える。簡単の為、流体の深さ  $H = \text{const.}$ 、 $y$  方向に一様な運動、即ち  $y$  方向速度  $v = 0$  である運動をする場合を考える。この時、(2.1) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0,\tag{A.1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\tag{A.2}$$

となる。ここで、(A.1) と (A.2) をそれぞれ両辺時間微分して 1 つの式にまとめると、

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{gH},\tag{A.3}$$

を得る. これは波動方程式の形をしており,  $x$  軸方向に伝播する重力を復元力とした波動解があることが分かる.

## A.2 慣性重力波

次に, 回転の効果を考慮した浅水系を考える. まずは簡単の為, コリオリパラメータ  $f = f_0 = \text{const.}$ ,  $H = \text{const.}$  である場合を考える. この時, (2.1) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0, \quad (\text{A.6})$$

となる. (A.4) と (A.5) を両辺時間微分し, これらを連立して速度  $u$ ,  $v$  の式として整理すると,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2 \right) u = -g \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} - g f_0 \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (\text{A.7})$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2 \right) v = -g \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} - g f_0 \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (\text{A.8})$$

を得る. これを (A.6) に代入して速度の発散項を消去すれば,  $h$  に関する式

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2 \right) \frac{\partial h}{\partial t} = gH \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (\text{A.9})$$

を得る. ここで  $h$  について, 波数  $\mathbf{k} = (k, l)$ , 振動数  $\omega$  とした波動解を仮定すると,

$$\omega (\omega^2 - f_0^2 - gH|\mathbf{k}|) = 0, \quad (\text{A.10})$$

となり, この解

$$\omega = 0, \quad \pm \sqrt{f_0^2 + gH|\mathbf{k}^2|}, \quad (\text{A.11})$$

を得る. それぞれの解を吟味する. まず  $\omega = 0$  の時, (2.1) は

$$f_0 u = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (\text{A.12})$$

$$f_0 v = g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.14})$$

となり、これは地衡流の関係を満たしている。また、 $\omega \neq 0$  の時、この波の位相速度は

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \pm \sqrt{gH + \frac{f_0^2}{|\mathbf{k}|^2}}. \quad (\text{A.15})$$

従って、回転の効果を考慮した場合、重力波の運動は  $f_0$  の影響を受けることが分かる。このような波を慣性重力波と呼び、振動数  $\omega$  は常に  $f_0$  より大きく、位相速度  $c$  は重力波の位相速度  $c_g = \sqrt{gH}$  よりも大きいことが分かる。

### A.3 ケルビン波

回転の効果を考慮した深さ一定の流体について、岸がある空間中を伝播する波について調べる。慣性重力波の場合と同様に、 $f = f_0 = \text{const.}$ ,  $H = \text{const.}$  の設定の下、境界条件を課して考える。 $z$  方向の方程式は (A.7)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2 \right) \frac{\partial h}{\partial t} = gH \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (\text{A.7})$$

である。これに対して、 $x = 0$  において  $y$  方向に無限に伸びる壁があるとする。この条件を書き下すと、東西速度  $u$  は  $x = 0$  においてゼロであるから、(A.7) を利用すれば、

$$g \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + g f_0 \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.16})$$

また、無限遠の場所では擾乱はゼロに近づくとして、

$$h \rightarrow 0 \quad \text{at} \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{A.17})$$

を満たす。 $y$  方向にのみ伝播する波を考えればよいから、以下のように波動解を仮定する：

$$h = F(x) \sin\{l(y - ct)\}. \quad (\text{A.18})$$

なお  $l$  は波数の南北方向成分、 $c$  はケルビン波の位相速度である。これを (A.7) に代入すると、

$$(-l^2 c^2 + f_0^2) F = gH \left( \frac{d^2 F}{dx^2} - l^2 F \right). \quad (\text{A.19})$$

ここで、境界条件 (A.17) から、 $F(x)$  は  $\alpha$  を正の実数として

$$F(x) = \hat{h} \exp(-\alpha x), \quad (\text{A.20})$$

と書けるから、これを (A.19) に代入して

$$\alpha^2 = \frac{f_0^2}{gH} + l \left( 1 - \frac{c^2}{gH} \right). \quad (\text{A.21})$$

一方, (A.18), (A.20) を (A.16) に代入すると,

$$f_0 + \alpha c = 0, \quad (\text{A.22})$$

を得るから, (A.21) と (A.22) を連立して,

$$f_0^2 \left(1 - \frac{c^2}{gH}\right) = l^2 c^2 \left(1 - \frac{c^2}{gH}\right). \quad (\text{A.23})$$

従って,  $c$ ,  $\alpha$  はそれぞれ

$$(c, \alpha) = \left(-\frac{f_0}{l}, l\right), \quad \text{or} \quad \left(-f_0\sqrt{gH}, \frac{f_0}{\sqrt{gH}}\right). \quad (\text{A.24})$$

(A.24) の 1 つ目の解は慣性波であり, 2 つ目の解がケルビン波と呼ばれる. このケルビン波の解を求めてみると,  $(u, v, h)$  は

$$u = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$v = -h_0 \sqrt{\frac{g}{H}} \exp(-x/\lambda) \sin\{l(y + \sqrt{gH}t)\} \quad (\text{A.26})$$

$$h = h_0 \exp(-x/\lambda) \sin\{l(y + \sqrt{gH}t)\} \quad (\text{A.27})$$

ここで  $\lambda = \sqrt{gH}/f_0$  はロスビーの変形半径で, 特徴的な波のスケールを示している. これらの解から分かるケルビン波の特徴は,

1.  $x = 0$  も含めた至る所で  $u = 0$
2. 位相速度は  $-\sqrt{gH}$  で波の分散性がない
3. 流れの振幅が境界で最大

である. 一般に境界付近にエネルギーは集中している波を境界に捕捉された波と呼び, ケルビン波はこれに当たる. この結果は南北方向ではなく東西方向に境界, あるいは岸を設定した場合も同様である.

## A.4 ロスビー波

重力波, 慣性重力波, ケルビン波は全てコリオリパラメタがゼロか一定の場合に流体中を伝播する波であったが, ここではコリオリパラメタが緯度と共に変化する場合に発生する波, 即ち特に中緯度域で重要なロスビー波について述べる. コリオリパラメタは以下の様に変化するとする:

$$f = f_0 + \beta y. \quad (\text{A.28})$$

運動方程式は (2.1) と同様である. 第 1 式と第 2 式から渦度方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta v + f \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.29})$$

が導かれる. この渦度方程式と (2.1) の第 1 式と第 3 式を連立し,  $(u, v, h)$  が全て波動解

$$\begin{aligned} u &= \hat{u} \exp\{i(kx + ly - \omega t)\}, \\ v &= \hat{v} \exp\{i(kx + ly - \omega t)\}, \\ h &= \hat{h} \exp\{i(kx + ly - \omega t)\}, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

を持つと仮定して代入して整理すると,  $(u, v, h)$  がゼロでない斉次解を持つための条件は以下の行列式がゼロ, 即ち

$$\begin{vmatrix} -\omega l + ikf_0 & (\omega k + \beta) + if_0 l & 0 \\ i\omega & -f_0 & ikg \\ kH & lH & -\omega \end{vmatrix} = 0,$$

でなければならない. したがって, これを整理して

$$(\omega k + \beta)(\omega^2 - k^2 gH) - \omega k l^2 gH - k\omega f_0^2 = 0, \quad (\text{A.31})$$

を得る. これを  $\omega$  に関する三次方程式と見なして厳密解を求めることは可能だが, より物理的に意味を見出しやすい近似解をここでは求める. 3 解の内, 1 解が重力波の振動数  $k\sqrt{gH}$  よりも大きく, 残りの 2 解が小さいとすると, 上式は以下の様に変えられる:

$$(\omega k + \beta)(-k^2 gH) - \omega k l^2 gH - k\omega f_0^2 = 0. \quad (\text{A.32})$$

よって, これを整理すれば, 振動数  $\omega$  は

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{\beta k}{(k^2 + l^2) + f_0^2/gH}, \\ &= -\frac{\beta k}{(k^2 + l^2) + 1/\lambda^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

また, 位相速度  $c$  は

$$c = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{(k^2 + l^2) + 1/\lambda^2}, \quad (\text{A.34})$$

を得る. この振動数と位相速度を持つ波はロスビー波である. 次に, 残り 2 解について, これらは  $\omega \gg \beta/k$  でなければならないから, (A.31) は

$$\omega^2 = f_0^2 + gH(k^2 + l^2), \quad (\text{A.35})$$

と変形できる. 従って,  $\omega$  は

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{f_0^2 + gH(k^2 + l^2)}, \\ &= f_0 \sqrt{1 + \lambda^2(k^2 + l^2)}.\end{aligned}\tag{A.36}$$

(A.36) は A.2 節で求めた慣性重力波の速度 (A.11) と同じである.

ケルビン波の時と同様, 解  $(u, v, h)$  を求める. 以下  $h$  をジオポテンシャル  $\phi$  と読み替える. まず水平発散のない場合を考える. このとき  $u, v$  は流線関数  $\psi$  を用いて

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

と書ける. また, ポテンシャル渦度保存則は, 相対渦度  $\zeta = \nabla^2\psi$  より,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2\psi + \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0.\tag{A.37}$$

ここで,  $\psi$  を  $\psi = \hat{\psi} \exp\{-i(kx + ly - \omega t)\}$  と仮定して代入すると, (A.37) から位相速度  $c$  は

$$c = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2}.\tag{A.38}$$

よって, (A.34) の分母にある  $1/\lambda^2$  の項は, 水平発散の効果が現れたものと考えることができる. このことは, 水平スケールが  $\lambda$  より十分に小さい場合は水平発散, あるいは連続の式から自由表面の時間変化の効果を考えなくてもよいことを示している. 即ち, 重力波のように水平発散がなくてもロスビー波は伝播することが分かる.

以上から分かるロスビー波の特徴として, 以下の 4 点が挙げられる:

1. 位相は西進する.
2. 位相速度は  $\beta$  が一定であれば波数にのみ依存する.
3.  $\beta$  効果が復元力としてはたらいっている.
4. 水平発散がなくても流体中を伝播する.

また, 非発散でもロスビー波が伝播するということは, (A.12) - (A.14) で現される地衡風近似を満たしていることを示している. 従って, ロスビー波が解として得られた時, その場所では準地衡風近似が成立していると考えられる.

## 付録 B (3.5) の導出

境界条件 (3.4):

$$v \rightarrow 0; \quad \text{when } y \rightarrow \pm\infty, \quad (3.4)$$

が課せられた (3.3):

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \left( \omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - y^2 \right) v = 0, \quad (3.3)$$

から, 級数展開法を用いて (3.5):

$$\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.5)$$

を導出する. まず  $H_n(y)$  を

$$\tilde{H}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n, \quad (B.1)$$

とし,  $v$  が

$$v(y) = C e^{-\frac{1}{2}y^2} \tilde{H}(y) \quad (B.2)$$

であると仮定する. ここで, (B.1), (B.2) を (3.3) に代入し, 定数  $A$  を

$$A = \omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - 1, \quad (B.3)$$

として整理すると,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n y^{n-2} - 2y \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1} + A \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = 0 \quad (B.4)$$

を得る. 試みに  $n$  に 1 ~ 3 を代入して  $y^n$  の係数  $a_n$  を計算してみると,

$$\begin{aligned} y^0 \text{ の次数}; & \quad a_0 = 2a_0 + Aa_0 \\ y^1 \text{ の次数}; & \quad a_1 = 6a_3 + (A-2)a_1 \\ y^2 \text{ の次数}; & \quad a_2 = 12a_4 + (A-4)a_2 \\ y^3 \text{ の次数}; & \quad a_3 = 20a_0 + (A-6)a_3 \end{aligned}$$

となるが、これは (3.3) の解が独立な解  $y^n$  の線形結合で表されることを示しており、これが成立するためには  $a_n$  が全てゼロでなければならない。  $y^n$  の係数の一般項は帰納的に

$$b_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + (A-2n)a_n$$

で求められることから、  $a_n$  の漸化式

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (A-2n)a_n = 0$$

が成立する。全ての  $n$  で成立するためには、数列  $a_n$  が  $n \rightarrow \infty$  で収束しなければならない。実際に計算すると、  $n \rightarrow \infty$  において

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+2}}{a_n} &= -\frac{2n-A}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{2n-A}{n^2+3n+2} \\ &\sim \frac{2}{n} \quad (\text{at } n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

ここで、  $\exp(y^2)$  を無限級数展開した場合、  $y^n$  の係数  $a_n$  の一般項は、

$$\exp(y^2) = 1 + \frac{2}{2!}y^2 + \frac{12}{4!}y^4 + \cdots + \frac{1}{(n/2)!}y^n + \frac{1}{((n+2)/2)!}y^{n+2} + \cdots,$$

より、

$$a_n = \frac{1}{(n/2)!},$$

で表される。従って、  $n \rightarrow \infty$  のとき、

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+2}}{a_n} &= \frac{(\frac{n}{2})!}{(\frac{n+2}{2})!} \\ &= \frac{2}{n+2} \\ &\rightarrow \frac{2}{n} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

よって、  $\tilde{H}$  を級数展開したものと、  $\exp(y^2)$  を  $y=0$  (赤道) まわりでテイラー展開したものが一致するので、  $\tilde{H}$  は  $n \rightarrow \infty$  の時  $\exp(y^2)$  であることが分かる。よって  $v(y)$  は

$$v(y) = C \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \exp(y^2) = C \exp\left(\frac{1}{2}y^2\right),$$

で表されるが、これは境界条件 (3.4) を満たさないので、無限級数展開ではなく有限級数展開でなければならない。有限級数展開になる条件は、

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = -\frac{2n-A}{(n+2)(n+1)} = 0,$$



であることなので,  $2n = A$ , 即ち  $\left(\omega^2 + k^2 + \frac{k}{\omega}\right)$  が奇数:

$$\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.5)$$

でなければならない. 以上より, 分散関係式 (3.5) が導出された.

## 付録 C (3.5) とシュレディンガー方程式の類似性

付録 A では赤道波の分散関係式 (3.5) を級数展開法により導いたが, 実は (3.5) はシュレディンガー方程式とよく類似している. ここではその類似性を, Landau (1977) に基づいて示す.

$E$  を固有値,  $n$  を整数,  $\psi$  を波動関数,  $m$  を質量,  $\omega$  を振動数,  $x$  を位置,  $\hbar$  をプランク定数とすると, シュレディンガー方程式は以下の様に見える:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \psi = 0. \quad (\text{C.1})$$

ここで,  $\alpha$  を無次元化量とした  $x = \alpha\tilde{x}$  を (B.1) に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2\psi}{d\tilde{x}^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2}m\omega^2 \alpha\tilde{x}^2 \right) \psi &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2\psi}{d\tilde{x}^2} + \left( \frac{2m}{\hbar^2} E - \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 \alpha^4 \tilde{x}^2 \right) \psi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

ここで (3.3)

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \left( \omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - y^2 \right) = 0 \quad (\text{3.3})$$

との比較のため,  $\alpha$  を以下の様に置く:

$$1 = \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 \alpha^4 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = \frac{\hbar}{m\omega}.$$

これを (B.2) に代入して

$$\frac{d^2\psi}{d\tilde{x}^2} + \left( \frac{2}{\hbar\omega} E - \tilde{x}^2 \right) \psi = 0. \quad (\text{C.3})$$

(C.3) と (3.3) を比較すれば,  $\omega^2 - k^2 + k/\omega$  と  $2E/\hbar\omega$  が等価である. 量子力学において, 固有値  $E$  は  $E = (n + 1/2)\hbar\omega$  であることが知られており<sup>\*1</sup>, これを代入す

<sup>\*1</sup>Landau (1977)

れば,

$$\begin{aligned}\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} &= \frac{2}{\hbar\omega} E \\ &= \frac{2}{\hbar\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega.\end{aligned}\tag{C.4}$$

よって, (C.4) を整理すれば (3.5)

$$\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} = 2n + 1, \quad (n = 0, 1, 2\dots)\tag{3.5}$$

を得る.

## 付録D 潮汐方程式の導出

ラプラスの潮汐方程式 (3.22), 及び (3.23) を Holton(1975), 廣田 (2000) に基づいて導出する.

### D.1 ラプラスの潮汐方程式 (3.22) の導出

球座標系における, 非圧縮非粘性流体の線形化された支配方程式系は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0, \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{RT}{H}, \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{H}{R} N^2 \bar{w} = \frac{J}{c_p}, \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{1}{a \cos \theta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) \right\} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 w) = 0, \quad (\text{D.5})$$

(D.1), (D.2) はそれぞれ  $x$  方向,  $y$  方向の運動方程式, (C.3) は静水圧平衡の式, (D.4) は熱力学的エネルギー方程式, (D.5) は連続の式である. なお  $x$  軸は東向きを正に取っている.

まず  $u, v, \phi$  の解が以下の様な変数分離形で書けると仮定する:

$$u = U(\theta)G(z) \exp \{i(s\lambda - \sigma t)\}, \quad (\text{D.6})$$

$$v = V(\theta)G(z) \exp \{i(s\lambda - \sigma t)\}, \quad (\text{D.7})$$

$$\phi = \Phi(\theta)G(z) \exp \{i(s\lambda - \sigma t)\}, \quad (\text{D.8})$$

これらを (D.1), (D.2) に代入すると,

$$\begin{aligned} -i\sigma V + 2\Omega \sin \theta U + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= 0, \\ -i\sigma U - 2\Omega \sin \theta V + \frac{is}{a \cos \theta} \Phi &= 0, \end{aligned}$$

を得る. これらを連立して整理すれば,  $U, V$  を  $\Phi$  の関数として表した形

$$U = \frac{1}{a(\sigma^2 - 4\Omega^2 \sin^2 \theta)} \left( 2\Omega \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\sigma s}{\cos \theta} \Phi \right), \quad (\text{D.9})$$

$$V = -\frac{1}{a(\sigma^2 - 4\Omega^2 \sin^2 \theta)} \left( 2\Omega \sin \theta \frac{is\Phi}{\cos \theta} + i\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right), \quad (\text{D.10})$$

を得る. ここで, 静水圧平衡の式から

$$T = \frac{H}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

であるから, これを熱力学的エネルギー方程式に代入し, 流体は断熱的に変化すると仮定すれば,  $w$  は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \frac{H}{R} N^2 w &= 0, \\ \Leftrightarrow w &= -\frac{1}{N^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

と書ける. これを (D.5) に代入して鉛直速度  $w$  を含まない連続の式

$$\frac{1}{a \cos \theta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) \right\} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\rho_0}{N^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right) = 0, \quad (\text{D.12})$$

を得る. ここに (D.9), (D.10) を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{is}{a \cos \theta} U G + \frac{1}{a \cos \theta} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} G \cos \theta - V G \sin \theta \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_0}{N^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \frac{dG}{dz} \right) &= 0, \\ \Leftrightarrow \frac{G}{a \cos \theta} \left( isU + \frac{\partial V}{\partial \theta} \cos \theta - V \sin \theta \right) + \frac{i\sigma \Phi}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_0}{N^2} \frac{dG}{dz} \right) &= 0, \\ \Leftrightarrow \frac{G}{a \cos \theta} \left( isU + \frac{\partial}{\partial \theta} (V \cos \theta) \right) + \frac{i\sigma \Phi}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_0}{N^2} \frac{dG}{dz} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

(D.13) の両辺を  $G\Phi$  で割って整理すれば

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{1}{\Phi} \left( isU + \frac{\partial}{\partial \theta} (V \cos \theta) \right) = -\frac{i\sigma}{\rho_0} \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_0}{N^2} \frac{dG}{dz} \right), \quad (\text{D.14})$$

となり、左辺と右辺がそれぞれ  $\theta, z$  のみの関数となっている。両辺が等しくなるためには、両辺は定数でなければならない。この定数(変数分離定数) $i\sigma/gh$  とおくと、(D.14)の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{1}{a \cos \theta} \frac{1}{\Phi} \left( isU + \frac{\partial}{\partial \theta} (V \cos \theta) \right) &= \frac{i\sigma}{gh} \\ \Leftrightarrow -i\sigma\Phi + \frac{gh}{a \cos \theta} \left( isU + \frac{\partial}{\partial \theta} (V \cos \theta) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (D.15)$$

となり、これに  $U, V$  を代入すると、

$$\begin{aligned} -i\sigma\Phi + \frac{gh}{a \cos \theta} \left( is \frac{1}{a(\sigma^2 - 4\Omega^2 \sin^2 \theta)} \left( 2\Omega \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\sigma s}{\cos \theta} \Phi \right) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{1}{a(\sigma^2 - 4\Omega^2 \sin^2 \theta)} \left( 2\Omega \sin \theta \frac{is\Phi}{\cos \theta} + i\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \cos \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (D.16)$$

ここで変数変換を以下のように行う:

$$\mu = \sin \theta, \quad \sigma = 2\Omega f$$

すると、微分演算子と定数はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} &= \frac{d\mu}{d\theta} \frac{d}{d\mu} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \frac{d}{d\mu} = \sqrt{1 - \mu^2} \frac{d}{d\mu} \\ \sigma^2 - 4\Omega^2 \sin^2 \theta &= 4\Omega^2 (f^2 - \mu^2) \end{aligned}$$

と変換されるから、これらを (D.16) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \left\{ \frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{d\Phi}{d\mu} + \frac{\mu s \Phi}{f(f^2 - \mu^2)} \right\} \\ - \frac{s\mu}{f(f^2 - \mu^2)} \frac{d\Phi}{d\mu} - \frac{s^2 \Phi}{(f^2 - \mu^2)(1 - \mu^2)} + \frac{4a^2 \Omega^2}{gh} \Phi = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{d\mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{d\Phi}{d\mu} \right) \\ - \frac{1}{f^2 - \mu^2} \left( -\frac{s(f^2 + \mu^2)}{f(f^2 - \mu^2)} + \frac{s^2}{1 - \mu^2} \right) \Phi + \frac{4a^2 \Omega^2}{gh} \Phi = 0 \end{aligned} \quad (D.17)$$

ここで、(D.6) - (D.7) で東向きを正としたので、西向きを正とするように (D.17) を変換し、更にジオポテンシャル  $\Phi$  を  $\Theta$  に書き直すと、

$$\frac{d}{d\mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{d\Theta}{d\mu} \right) - \frac{1}{f^2 - \mu^2} \left( \frac{s(f^2 + \mu^2)}{f(f^2 - \mu^2)} + \frac{s^2}{1 - \mu^2} \right) \Theta + \frac{4a^2 \Omega^2}{gh} \Theta = 0 \quad (6.2)$$

の形のラプラスの潮汐方程式を得る。なお変数分離定数の中に表れている  $h$  は等価深度と呼ばれ、平均海面高度を含めた大気の深さを示している。

## D.2 (3.23) の導出

与えられた条件  $\mu \ll 1$  から,  $1 - \mu^2 \sim 1$  と見なせるので, まず得られた潮汐方程式 (6.2) の両辺に  $(f^2 - \mu^2)$  をかけると,

$$(f^2 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{d\Theta}{d\mu} \right) - \left( \frac{s(f^2 + \mu^2)}{f(f^2 - \mu^2)} + \frac{s^2}{1 - \mu^2} \right) \Theta + \frac{4a^2\Omega^2}{gh} (f^2 - \mu^2) \Theta = 0 \quad (6.2)$$

である. ここで, 左辺第 1 項について,

$$\begin{aligned} (f^2 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{d\Theta}{d\mu} \right) &= 2\mu \left( \frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} - 1 \right) \frac{d\Theta}{d\mu} + (1 - \mu^2) \frac{d^2\Theta}{d\mu^2} \\ &\approx 2\mu \left( \frac{1}{f^2 - \mu^2} - 1 \right) \frac{d\Theta}{d\mu} + \frac{d^2\Theta}{d\mu^2} \\ &\approx 2\mu \frac{1}{1 - f^2} \frac{d\Theta}{d\mu} + \frac{d^2\Theta}{d\mu^2} \end{aligned} \quad (D.18)$$

であり, 他の項も同様にして (6.3)

$$\frac{d^2\Theta}{d\mu^2} + \frac{2\mu}{f^2 - \mu^2} \frac{d\Theta}{d\mu} + \left[ -\frac{s}{f} \frac{f^2 + \mu^2}{f^2 - \mu^2} - s^2 + (f^2 - \mu^2) \frac{4a^2\Omega^2}{gh} \right] \Theta = 0. \quad (6.3)$$

を得る.

## 謝辞

本研究を行うにあたり, 多くの方々に御指導, 御協力頂きました. 指導教官の神戸大学 林祥介 教授には, 卒業研究のテーマを示して頂き, 神戸大学 岩山隆寛 准教授には研究の全体にわたる御指導を, 神戸大学 高橋芳幸 准教授には様々なアドバイスを頂きました.

また, 博士課程の皆様をはじめ, 地球及び惑星大気科学研究室の皆様には本研究に関する様々な相談をさせて頂き, 助言して下さいました. ここに深く感謝申し上げます.

数値計算と図の作成には, 地球流体電脳ライブラリ dcl-5.4.8 <http://www.gfd-dennou.org/library/dcl/> を使用させて頂きました.



## 参考文献

- Landau, L. D. and Lifshiz, E.M., 1977: Quantum Mechanics, *Pergamon Press*, pp.67-70
- Matsuno, T., 1966: Quasi-geostrophic motion in the equatorial area. *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 25-42
- Holton, J.R., 1975: The dynamic Meteorology of the Stratosphere and Mesosphere, pp.52-63
- 小倉 義光, 1978: 気象力学通論, 東京大学出版会, pp.34-67.
- 廣田勇, 2000: ラプラスから 200 年 — 大気波動力学の歴史と現状 —, 数理解析研究所講究録, 156-169.
- 新田尚, 野瀬純一, 伊藤朋之, 住明正編, 2005: 気象ハンドブック第 3 版, 朝倉書店, pp.168-180