

修 士 学 位 論 文

準地衡 2 層モデルにおける  
準地衡乱流の波数空間動力学  
に関する研究

2017 年 2 月 3 日

専 攻 名 : 惑星学専攻

学籍番号 : 153s401s

氏 名 : 岡崎 正悟

神戸大学大学院理学研究科博士前期課程



---

## 論文要旨

準地衡 2 層モデルにおける地衡流乱流の波数空間におけるエネルギーやエンストロフィーの変換過程について考察を行なった. Tung and Orland (2003) は, 準地衡 2 層モデルを用いて Nastrom and Gage (1985) の航空機観測のデータに基づく大気のエネルギースペクトル (高波数領域における  $k^{-5/3}$  に比例するスペクトル) を再現した. そして, そのエネルギースペクトルの形成メカニズムを提唱している. 特に, 準地衡 2 層モデルにおける慣性領域において, エネルギーフラックス  $\Pi_E(k)$  とエンストロフィーフラックス  $\Pi_Q(k)$  の間に

$$k^2\Pi_E(k) - \Pi_Q(k) > 0 \quad (1)$$

となる波数帯域が存在し, そこで  $k^{-5/3}$  のスペクトルが形成されることが示されている. 準地衡 2 層モデルにおける (1) については数学的に証明することはできず, 数値計算によって確かめる必要がある. そこで本研究では, 準地衡 2 層モデルを用いて Nastrom and Gage (1985) のエネルギースペクトルの結果を再現することが出来るかを確認, 波数空間におけるエネルギーやエンストロフィーの流れについて解析を行ない, (1) が成立するか否かを確認した.

まず, 上層と下層で粘性係数が同じ場合について数値計算を行なった. このとき, Nastrom and Gage (1985) の結果は再現されず, (1) も成立しなかった. 次に, Gkioulekas (2014) で (1) の成立の可能性が示唆された, 上層と下層で異なる粘性係数を用いた場合について数値計算を行なった. すると, 下層の粘性係数が非常に弱い場合に (1) も成立しなかったが, Nastrom and Gage (1985) の結果に似たエネルギースペクトル再現された. このことは, Tung and Orland (2003) で示された結果は粘性が非常に弱い場合の数値計算の結果であり, そこで提唱された大気のスぺクトルの形成メカニズムは普遍的ではないことを示唆している.



## 目次

論文要旨	i
第 1 章 はじめに	1
1.1 研究の背景	1
1.2 研究の目的	4
第 2 章 数値計算の概要	7
2.1 モデルの概要と支配方程式	7
2.2 TO03 のモデルとの違い	8
2.3 数値計算の設定	8
第 3 章 波数空間における系の性質	11
3.1 波数空間内におけるエネルギー保存則	12
3.2 波数空間におけるエンストロフィー保存則	14
第 4 章 理論的考察	17
4.1 スペクトルの発展方程式	17
4.2 (1.1) の成立可能性	18
第 5 章 数値計算の結果	21
5.1 計算設定	21
5.2 初期のエネルギーの発展	21
5.3 case1 の結果	22
5.4 上層と下層で粘性係数を変えた場合	28
5.5 まとめと考察	29
第 6 章 議論と結論	33
6.1 議論	33
6.2 結論	33
付録 A 支配方程式の導出	37
A.1 問題設定	37
A.2 準備	37
A.3 準地衡渦位方程式の導出	40
A.4 準地衡 2 層渦位方程式の導出	41

A.5	支配方程式系の変形 . . . . .	44
付録 B	波数空間における方程式系	47
B.1	波数空間における方程式系の導出 . . . . .	47
B.2	波数空間におけるエネルギー方程式 . . . . .	53
B.3	エネルギー詳細保存 . . . . .	55
B.4	エンストロフィー詳細保存 . . . . .	57
付録 C	線型安定性解析	61
付録 D	次元解析によるエネルギー散逸波数と エンストロフィー散逸波数の導出	65
参考文献		67

## 表目次

5.1.1	計算設定 . . . . .	21
5.5.2	エネルギー散逸率 . . . . .	29
5.5.3	エンストロフィー散逸率 . . . . .	32



## 目次

1.1	FGGE データセットのスペクトル解析の結果. [Boar and Shepherd (1983) Fig.1(a)] . . . . .	1
1.2	2次元一様等方性乱流におけるエネルギー Spektral の概形とエネルギーやエンストロフィーの流れの概念図. [Vallis (2006) Fig.8.7] . . . . .	2
1.3	GASP の航空機観測による圏界面付近のデータのスペクトル解析の結果. [Nastrom and Gage (1985) Fig.3 を一部加工] . . . . .	3
1.4	Tung and Orland (2003) で主張される地衡流乱流のエネルギー Spektral の形成メカニズムの概念図. [Tung and Orland (2003) [13] Fig.2(c)] . . . . .	4
1.5	Tung and Orland (2003) で示されたエネルギーフラックスとエンストロフィーフラックスの結果. [Tung and Orland (2003) Fig.7 を一部加工] . . . . .	5
5.1	初期のエネルギー発展の様子. . . . .	22
5.2	線型発展の時間における正味のエネルギー注入率 $k_x U k_d^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}) \hat{\tau}^*(\mathbf{k})$ の Spektral 構造. . . . .	23
5.3	case1 のエネルギーの発展. . . . .	23
5.4	case1 のエンストロフィーの発展. . . . .	24
5.5	$t = 1935$ の時刻における渦位場の様子. . . . .	25
5.6	case1 の時間平均したエネルギー Spektral の結果と TO03 のエネルギー Spektral の比較. . . . .	26
5.7	case1 のエネルギーフラックス. . . . .	26
5.8	case1 のエネルギーにおける強制と散逸の Spektral. . . . .	27
5.9	case1 のエンストロフィーフラックス. . . . .	27
5.10	強制と散逸のエンストロフィー Spektral. . . . .	28
5.11	case1 での (1.1) の検証. 赤色が $k^2 \Pi_E - \Pi_Q$ , 青色が $k^2 \Pi_E$ , 緑色が $\Pi_Q$ の波数分布を表す. . . . .	28
5.12	case2 のエネルギーの時間変化. . . . .	29
5.13	case1-4 のエネルギー Spektral の比較. . . . .	30
5.14	case1-4 の (1.1) の検証結果の比較. . . . .	31
A.1	2層モデルの概念図. . . . .	42



# 第1章 はじめに

## 1.1 研究の背景

### 1.1.1 大気のスpekトルの形成

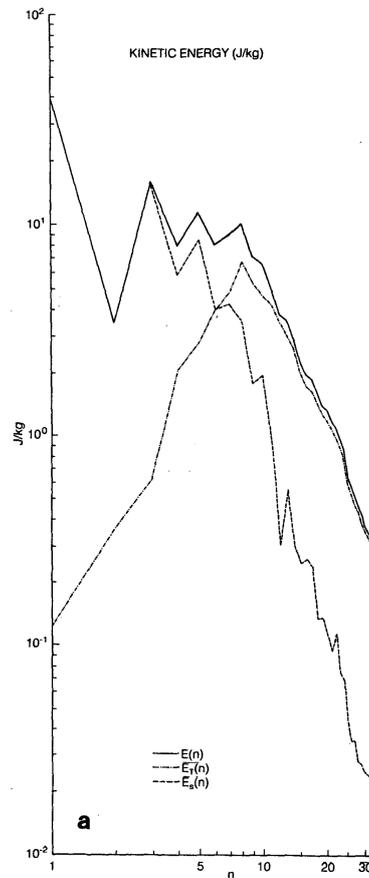


図 1.1 FGGE データセットのスpekトル解析の結果. 横軸は波数, 縦軸はエネルギー  
 スペクトルを示す. 一点鎖線は定常成分を示し, 低波数側で卓越している. 点線は非定常  
 成分を示し, 高波数側で卓越している. 実線はそれらの合計のスpekトルを示している.  
 [Boar and Shepherd (1983) Fig.1(a)]

地球における大気や海洋の大規模運動は, しばしば 2 次元流体的な性質を持つことが知られている. その理由として, 幾何学的に薄いこと, 回転系であること, 密度成層をしていることなどが挙げられる. 実際に, いくつかの観測事実から, 地球大気の大規模運動の 2 次元流体的な性質が確認されている. その一例として, Boar and Shepherd (1983) (以下, BS83 と略記する) によって行われた FGGE データセットの解析結果を図 1.1 に示す. これによると, 東西波数  $k$  が 14 から 25 の間では, スペクトルの傾きが波数  $k$  の  $-3$  乗になっ

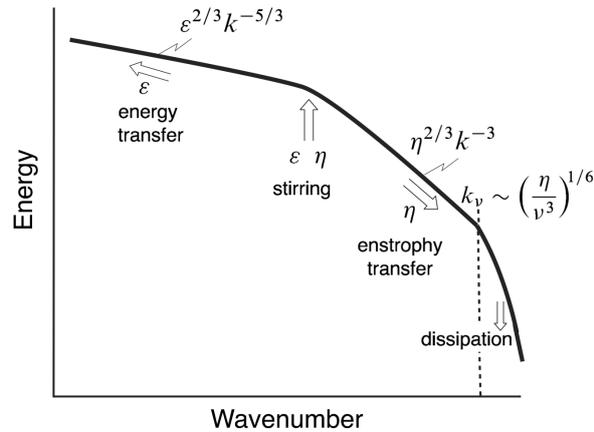


図 1.2 2次元一様等方性乱流におけるエネルギー・スペクトルの概形とエネルギーやエンストロフィーの流れの概念図. エネルギーやエンストロフィーをある狭い帯域に注入したとき, それよりも低波数側にはエネルギーがカスケードし, エネルギー慣性領域が形成され, スペクトルの傾きは  $k^{-5/3}$  となる. 一方, 高波数側には, エンストロフィーがカスケードし, エンストロフィー慣性領域が形成され, スペクトルの傾きは  $k^{-3}$  となる [14]

ていることがわかる. 線型の傾圧不安定論によると, 変形半径近傍の波数を持つ擾乱が最速成長擾乱であるため, 変形半径あたりで平均流からエネルギーが注入される. 系の強制は波数が8から10の帯域でなされると考えられるため,  $k^{-3}$  のスペクトルが形成されているのは, 強制されている帯域よりも高波数側である. 一方, 2次元一様等方性乱流の強制波数よりも高波数領域に形成されるエンストロフィー慣性領域では, エネルギー・スペクトルの傾きは  $k^{-3}$  となることが知られている [8](概念図を図 1.2 に示す). そこで, 大気における  $k^{-3}$  のスペクトルは2次元一様等方性乱流におけるエンストロフィー慣性領域のスペクトルと類似のものであると考えられている.

一方, 2次元一様等方性乱流の理論では説明できない大気の観測結果もある. 図 1.3 は Nastrom and Gage (1985) によって示された, GASP の航空機観測による圏界面付近のデータのスペクトル解析の結果である. 総観規模スケール ( $10^3 \sim 10^4 \text{km}$ ) においては, BS83 と同様に  $k^{-3}$  のスペクトルになっていることが分かる. しかし, 総観規模よりも小さなスケールでは,  $k^{-5/3}$  のスペクトルを示している. 地球大気の変形半径はおおよそ  $10^4 \text{km}$  のスケールであるため,  $k^{-5/3}$  のスペクトルが形成されているのは, エネルギー注入波数よりも高波数側である. 2次元一様等方性乱流の理論では, エネルギー注入波数よりも低波数側でエネルギー慣性領域のスペクトルが  $k^{-5/3}$  となることが知られているため, このスペクトルの形成のメカニズムは, 2次元一様等方性乱流の理論では説明することができない.

$k^{-3}$  と高波数側の  $k^{-5/3}$  のスペクトルはその後の大気大循環モデルや客観解析データを用いた研究においても頻りに得られている [6][12][1]. そこで, これは大気の大規模運動の普遍的特徴であるとされ, しばしば Nastrom-Gage スペクトル (以下, N-G スペクトル

## 1.1 研究の背景

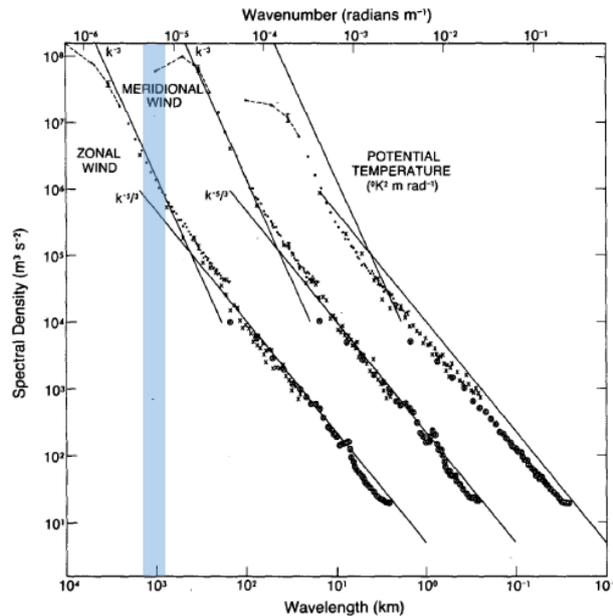


図 1.3 GASP の航空機観測による圏界面付近のデータのスペクトル解析の結果. 横軸は波数, 縦軸はエネルギー・スペクトルを示す. 左から, 東西風, 南北風, 温位のスペクトルを示し, 南北風と温位のスペクトルは便宜的にそれぞれ 1 桁ずつ高波数側にずらしてかかっている. 直線は,  $k^{-3}$  と  $k^{-5/3}$  の傾きを示している. 色が塗られた帯域は, 地球大気におけるエネルギー注入波数帯域を示す.[Nastrom and Gage (1985) Fig.3 を一部加工]

ルと略記する) と呼ばれる. N-G スペクトルが形成されるメカニズムは, 2次元一様等方性乱流の理論とは別の観点から説明する必要がある, と考えられてきた. この説明に対するアプローチは一般に 3つに分類できる [3]:

1. 対流によって生成されたエネルギーの大きなスケールへの逆カスケードによって形成 (Lilly 1983).
2. 発散流によって形成 (例えば, Koshyk and Hamilton 2001).
3. 大きなスケールからのエネルギーの直接的なカスケード (Tung and Orland 2003).

1. のタイプの説明は現在では否定されている. 2. のタイプの説明は現在もっともらしい説明とされている. 3. のタイプの説明については, 普遍的か否かは今のところ決着していない. 本研究ではこの 3. のタイプの説明について詳しく研究する.

### 1.1.2 2層モデルによる再現

3. のタイプの説明は Tung and Orland (2003)(以下, TO03 と略記する) によって提唱された. 彼らは, 標準的な準地衡 2層モデル ( $\beta$  チャネルの準地衡 2層モデル) を用いて N-G スペクトルを再現し, 準地衡 2層モデルにおけるエネルギーとエンストロフィーの流れについて以下のように主張している:

主張 (1) 準地衡 2層モデルでは, エンストロフィー慣性領域において「隠れたエネルギーカ

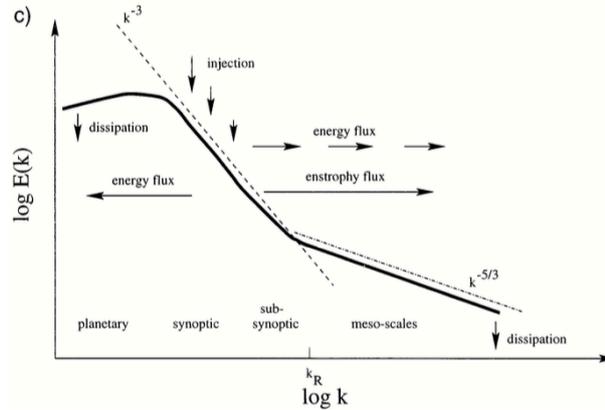


図 1.4 Tung and Orland (2003) で主張される地衡流乱流のエネルギースペクトルの形成メカニズムの概念図. [Tung and Orland (2003) [13] Fig.2(c)]

スケード (hidden energy cascade)」がある (図 1.4).

主張 (2) 強制波数よりも高波数側の領域において, エネルギーカスケードがエンストロフィーカスケードより卓越する波数帯域が出現する (図 1.5). その帯域において, 以下の不等式が成立する:

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Q(k) > 0. \quad (1.1)$$

ここで,  $\Pi_E(k)$  はエネルギーフラックス,  $\Pi_Q(k)$  はエンストロフィーフラックスを表す. (1.1) を満たす領域において, エネルギー慣性領域スペクトル  $k^{-5/3}$  が形成される.

過去の研究で, 2 次元 Navier-Stokes 方程式系において, エネルギーを注入している帯域以外の全ての波数で  $k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Q(k) < 0$  となることが示されている (Gkioulekas and Tung (2007)[4]). 準地衡 2 層モデルにおいては, Gkioulekas (2014)[5] において, (1.1) が成立する波数帯が存在する可能性があることが理論的に示唆されているのみで, 普遍的に (1.1) が成立することは証明されていない.

また, TO03 では準地衡 2 層モデルでの数値実験の結果が示されているが, データ解析が不十分であり, 上記の主張が本当に正しいのか疑問が残る点がある.

## 1.2 研究の目的

以上の背景を踏まえ本研究では, TO03 で提唱された準地衡 2 層モデルにおける N-G スペクトルの形成メカニズムが普遍的であるか否かについて議論する. そのために, 準地衡 2 層モデルを用いた数値シミュレーションを行い, N-G スペクトルが形成されるかどうかを確かめた. また, TO03 では詳細に示されていなかった波数空間内におけるエネルギーやエンストロフィーの流れに関する解析と考察を行い, (1.1) が成立するか否かを確認した.

本論文の構成は以下の通りである: 第 2 章で数値計算に用いたモデルについて述べる. 支配方程式の導出については, 付録 A を参照されたい. 第 3 章では波数空間における支配

## 1.2 研究の目的

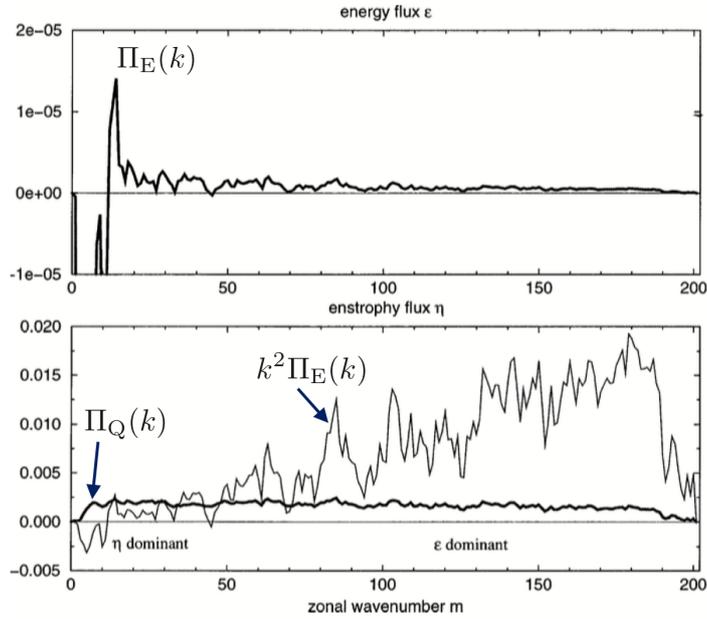


図 1.5 上はエネルギーフラックス  $\Pi_E(k)$  の波数分布を示し, 下はエネルギーフラックスに波数の 2 乗をかけたもの  $k^2\Pi_E(k)$  とエンストロフィーフラックス  $\Pi_Q(k)$  の大きさの比較を示す. 下の図から, エネルギーフラックスがエンストロフィーフラックスよりも卓越する領域が現れることがわかり, その波数よりも高波数側においてエネルギースペクトルの傾きが  $k^{-5/3}$  になると彼らは主張している. [Tung and Orland (2003) [13] Fig.7 を一部加工]

方程式の重要な性質, 特に保存則について確認する. こちらも, 証明については付録 B を参照されたい. 第 4 章では, (1.1) の成立可否について数学的な証明を試みる. 第 5 章では, 本研究で行った数値実験と解析の結果を示す. 第 6 章では (1.1) の成立についての別の観点からの議論を行い, 結論を述べる.



## 第 2 章 数値計算の概要

本章では本研究で行なった数値計算の概要について述べる。支配方程式の導出については、付録 A を参照されたい。また、ケースごとの計算設定の違いについては第 5 章で述べる。

### 2.1 モデルの概要と支配方程式

数値計算に用いたモデルは, Larichev and Held (1995) に基づく準地衡 2 層モデルである。  $f$  平面上のブシネスク流体で, 鉛直方向に静水圧平衡を仮定する。流れの領域は, 水平方向は  $[0, 0] \times [2\pi, 2\pi]$  の矩形で境界は周期的であるとし, 上下には平らな固体壁を仮定する。鉛直シアーを持つ水平面内において一様な  $x$  方向の流れによって系を強制し, 超粘性とエクマンダンピングによってエネルギーやエンストロフィーを散逸する。粘性については, 上層と下層で異なる値を用いる。支配方程式は, 以上の仮定を課した 2 層の準地衡渦位方程式

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} + J(\Psi_1, Q_1) = -\nu \nabla^8 Q_1, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} + J(\Psi_2, Q_2) = -(\nu + \Delta\nu) \nabla^8 Q_2 - \kappa \nabla^2 \Psi_2 \quad (2.1b)$$

である。ここで, 下付き文字の 1 と 2 はそれぞれ上層と下層の物理量であることを示し,  $J$  は水平ヤコビアンで,  $\nabla^2$  は水平ラプラシアンである。また,  $\nu$  は粘性係数,  $\Delta\nu$  は上層と下層の粘性係数の値の差<sup>†1</sup>,  $\kappa$  はエクマン係数を表す。  $\Psi_*$  は流線関数で, 渦位  $Q_*$  と水平方向速度  $u_*, v_*$  の定義は以下の通りである:

$$Q_1 = \nabla^2 \Psi_1 + k_d^2 \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2}, \quad (2.2)$$

$$Q_2 = \nabla^2 \Psi_2 + k_d^2 \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2}, \quad (2.3)$$

$$(u_*, v_*) = \left( -\frac{\partial \Psi_*}{\partial y}, \frac{\partial \Psi_*}{\partial x} \right). \quad (2.4)$$

ここで, 層の厚さは上層と下層で等しいとし,  $k_d^{-1}$  は内部変形半径である。いま, 擾乱のエネルギー源として南北方向に鉛直シアーを仮定している。平均流の大きさを  $U$  (定数) とし, 流線関数を平均流の成分と平均流からのズレ (擾乱) の成分に分解する:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -Uy + \psi_1(x, y, t), \\ \Psi_2 &= Uy + \psi_2(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

<sup>†1</sup> Larichev and Held (1995) では,  $\Delta\nu = 0$  であるが, ここではより一般的な  $\Delta\nu \neq 0$  の場合を考える

ここで,  $\psi_1$  と  $\psi_2$  はそれぞれ  $0 \leq x, y \leq 2\pi$  の範囲で周期的であるとする. さらに, 順圧 (barotropic) モードと傾圧 (baroclinic) モードの流線関数をそれぞれ以下のように定義する:

$$\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}, \quad \tau = \frac{\psi_1 - \psi_2}{2}. \quad (2.6)$$

これらを用いて, 支配方程式 (2.1a) と (2.1b) を変形すると以下ようになる:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \psi) + J(\tau, \nabla^2 \tau) + U \frac{\partial \nabla^2 \tau}{\partial x} \\ & = -\kappa \nabla^2 \frac{\psi - \tau}{2} - \nu \nabla^8 (\nabla^2 \psi) - \frac{1}{2} \Delta \nu \nabla^8 \{ \nabla^2 \psi - (\nabla^2 - k_d^2) \tau \}, \end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\nabla^2 \tau - k_d^2 \tau)}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \tau - k_d^2 \tau) + J(\tau, \nabla^2 \psi) + U \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + k_d^2 U \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ & = -\kappa \nabla^2 \frac{\tau - \psi}{2} - \nu \nabla^8 (\nabla^2 \tau - k_d^2 \tau) - \frac{1}{2} \Delta \nu \nabla^8 \{ (\nabla^2 - k_d^2) \tau - \nabla^2 \psi \}. \end{aligned} \quad (2.7b)$$

## 2.2 TO03 のモデルとの違い

TO03 で使われたモデルは,  $\beta$  面上の準地衡 2 層水路モデルで, 切断波数の近くで subgrid スケールの現象による粘性散逸機構を入れたモデルである. 水路モデルで  $\beta$  効果と subgrid スケールの散逸機構を含む点において, 本研究で用いたモデルと異なる. しかし, TO03 で述べられている高波数側での  $k^{-5/3}$  のスペクトルの形成は, 「隠れたエネルギーカスケード」による慣性領域スペクトルとして説明されている. そこで, 領域の幾何学や散逸機構には依存しないだろうと考えられる. また,  $\beta$  効果は低波数側で効果的に働くので, いま問題にしている高波数領域では効かないであろうと推測できる. よって, 彼らの提唱するメカニズムの普遍性を前節で述べたモデルで研究することは妥当であると考えられる.

## 2.3 数値計算の設定

空間差分はスペクトル法, 時間差分は 4 次のルンゲクッタ法を用いた. 初期値は, 順圧モードと傾圧モードのエネルギー・スペクトルを全波数で一定値とした:  $E_\psi(k, t=0) = E_\tau(k, t=0) = 6.0 \times 10^{-8}$ . 低解像度の計算で統計的定常状態に達したと思われる時刻で計算を止め, その最後の時刻の順圧モードと傾圧モードの渦度を初期値としてより高解像度の計算を行う方法を採用した (このような方法は, しばしば「スピニアップ」と呼ばれる). まず, 解像度  $256^2$  の計算から始め, スピニアップを行なって  $512^2, 1024^2$  の計算を行った.  $k_d$  よりも高波数側のメカニズムを詳しく解析するために, Larichev and Held (1995) では  $k_d = 50$  に対して, 本研究では  $k_d = 10$  とした. 平均流の強さ  $U$ , エクマンダンピングの係数  $\kappa$  は Larichev and Held (1995) の値を参考に,  $U = 2.5 \times 10^{-2}$ ,  $\kappa = 4.0 \times 10^{-2}$  と

## 2.3 数値計算の設定

---

した<sup>†2</sup>. 粘性係数  $\nu$  の値は解像度によって

- $256^2$  のとき :  $\nu = 1.350 \times 10^{-14}$
- $512^2$  のとき :  $\nu = 5.280 \times 10^{-17}$
- $1024^2$  のとき :  $\nu = 2.017 \times 10^{-19}$

とした. 粘性係数をこのように変えているのは, 切断波数における粘性のタイムスケールを同じに設定し, 高解像度の計算ではよりレイノルズ数の高い状態を実現するためである.

---

<sup>†2</sup> 系へのエネルギー注入は  $U k_d^2$  に比例するので,  $U k_d^2$  が Larichev and Held (1995) と同じになるように設定している. また, エネルギーの散逸は主にエクマンダンピングによって起こるので,  $\kappa$  の値は Larichev and Held (1995) と同じ値に設定している.



---

### 第 3 章 波数空間における系の性質

---

本章では、準地衡 2 層モデルにおいて成立するエネルギーやエンストロフィーの保存則を整理する。証明については付録 B を参照のこと。

まず、順圧モードと傾圧モードにおける支配方程式 (2.7a) と (2.7b) の波数空間内での表式は、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) \\ = & \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \hat{\psi}^*(\mathbf{l}, t) \hat{\psi}^*(\mathbf{m}, t) + \hat{\tau}^*(\mathbf{l}, t) \hat{\tau}^*(\mathbf{m}, t) \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$\begin{aligned} & - ik_x U |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}(\mathbf{k}, t) - \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 \{ \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) - \hat{\tau}(\mathbf{k}, t) \} \\ & - \nu |\mathbf{k}|^{10} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) - (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \hat{\tau}(\mathbf{k}, t) \} \\ & (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \frac{\partial}{\partial t} \hat{\tau}(\mathbf{k}, t) \\ = & \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\psi}^*(\mathbf{l}, t) \hat{\tau}^*(\mathbf{m}, t) - |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}^*(\mathbf{m}, t) \hat{\tau}^*(\mathbf{l}, t) \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \\ & + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\psi}^*(\mathbf{l}, t) \hat{\tau}^*(\mathbf{m}, t) - |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}^*(\mathbf{m}, t) \hat{\tau}^*(\mathbf{l}, t) \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \\ & + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 \{ \hat{\psi}^*(\mathbf{l}, t) \hat{\tau}^*(\mathbf{m}, t) - \hat{\psi}^*(\mathbf{m}, t) \hat{\tau}^*(\mathbf{l}, t) \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \end{aligned} \quad (3.1b)$$

$$\begin{aligned} & - ik_x U |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) + ik_x U k_d^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) - \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 \{ \hat{\tau}(\mathbf{k}, t) - \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) \} \\ & - \nu |\mathbf{k}|^8 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \hat{\tau}(\mathbf{k}, t) \\ & - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \hat{\tau}(\mathbf{k}, t) - |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) \} \end{aligned}$$

である。ただし、

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \tau &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{\tau}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{aligned}$$

である。以下、 $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t) \equiv \hat{\psi}_{\mathbf{k}}$ ,  $\hat{\tau}(\mathbf{k}, t) \equiv \hat{\tau}_{\mathbf{k}}$  と表記する。

## 3.1 波数空間内におけるエネルギー保存則

(3.1a) と (3.1b) から波数空間内でのエネルギー方程式を導くと、

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{k}|^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 = & \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \} \\
 & + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \} \\
 & - k_x U |\mathbf{k}|^2 \text{Im}\{\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*\} \\
 & - \frac{1}{2} \kappa |\mathbf{k}|^2 \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \{\hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}}\}] - \nu |\mathbf{k}|^{10} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 & - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ |\mathbf{k}|^2 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 - (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}}] \}
 \end{aligned} \tag{3.2a}$$

$$\begin{aligned}
 & (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 = & \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}\{[|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}\{[|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 \text{Re}\{[\hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & + k_x U |\mathbf{k}|^2 \text{Im}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] - k_x U k_d^2 \text{Im}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] \\
 & - \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 \text{Re}\{[\hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \hat{\psi}_{\mathbf{k}}] \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \} - \nu |\mathbf{k}|^8 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 & - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 - |\mathbf{k}|^2 \text{Re}[\hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{k}}] \}
 \end{aligned} \tag{3.2b}$$

となる。ここで、 $\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j}$  である。平均流や摩擦、粘性がないとき、

$$\begin{aligned}
 & |k|^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 = & \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \\
 & + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}
 \end{aligned} \tag{3.3a}$$

$$\begin{aligned}
 & (|k|^2 + k_d^2) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 = & \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \\
 & + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \\
 & + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 \text{Re}[\{\hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}
 \end{aligned} \tag{3.3b}$$

の両式を足して  $\mathbf{k}$  について和を取ると保存する。これらを

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{\psi}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \{T_{\text{I}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})\} \tag{3.4a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{\tau}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \{T_{\text{I}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})\} \tag{3.4b}$$

と書くことにする。ここで、

$$\begin{aligned}
 T_{\text{I}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{\text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}\}, \\
 T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{\text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}\}, \\
 T_{\text{I}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}, \\
 T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}, \\
 T_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 \text{Re}[\{\hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}
 \end{aligned}$$

である。このとき、以下のエネルギー詳細保存則が成立する：

$$T_{\text{I}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{I}}^{\psi}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\text{I}}^{\psi}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0, \tag{3.5a}$$

$$T_{\text{I}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{I}}^{\tau}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\text{I}}^{\tau}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0, \tag{3.5b}$$

$$T_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0, \tag{3.5c}$$

$$\begin{aligned}
 & T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \\
 & + T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.5d}$$

## 3.2 波数空間におけるエンストロフィー保存則

同様に, (3.1a) と (3.1b) から波数空間内でのエンストロフィー方程式を導くと,

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{k}|^4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 = & \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \} \\
 & + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \} \\
 & - k_x U |\mathbf{k}|^4 \text{Im} \{ \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \} \\
 & - \frac{1}{2} \kappa |\mathbf{k}|^4 \text{Re} [ \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \{ \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \} ] - \nu |\mathbf{k}|^{12} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 & - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^{10} \{ |\mathbf{k}|^2 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 - (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re} [ \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}} ] \},
 \end{aligned} \tag{3.6a}$$

$$\begin{aligned}
 & (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2)^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 = & \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re} [ \{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \} ] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re} [ \{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \} ] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re} [ \{ \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \} ] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & + k_x U |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Im} [ \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* ] - k_x U k_d^2 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Im} [ \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* ] \\
 & - \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re} [ \{ \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* ] - \nu |\mathbf{k}|^8 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2)^2 |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 & - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \{ (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 - |\mathbf{k}|^2 \text{Re} [ \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{k}} ] \}
 \end{aligned} \tag{3.6b}$$

となる。平均流や摩擦, 粘性が無い場合,

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{k}|^4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 &= \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \\
 &\quad + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0'} \}
 \end{aligned} \tag{3.7a}$$

$$\begin{aligned}
 & (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2)^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 &= \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \\
 &\quad + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \\
 &\quad + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0'}
 \end{aligned} \tag{3.7b}$$

の両式を足して  $\mathbf{k}$  について足すと保存する。これらを

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Q}_{\psi}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \{ C_{\text{I}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) \}, \tag{3.8a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Q}_{\tau}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \{ C_{\text{I}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) \} \tag{3.8b}$$

と書く。ここで,

$$\begin{aligned}
 C_{\text{I}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \}, \\
 C_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \}, \\
 C_{\text{I}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{k}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0'}, \\
 C_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{k}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}, \\
 C_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 (|\mathbf{k}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{ \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}
 \end{aligned}$$

である。このとき, 次のエンストロフィー詳細保存則が成立する:

$$C_I^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_I^\psi(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + C_I^\psi(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0, \quad (3.9a)$$

$$C_{II}^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{II}^\psi(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + C_{II}^\psi(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \\ + C_I^\tau(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_I^\tau(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + C_I^\tau(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0, \quad (3.9b)$$

$$C_{II}^\tau(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{II}^\tau(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + C_{II}^\tau(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \\ + C_{III}^\tau(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{III}^\tau(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + C_{III}^\tau(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0. \quad (3.9c)$$

---

## 第 4 章 理論的考察

---

本章では、波数空間における方程式を計算することによって (1.1) が成立するか否かを議論する. (1.1) の左辺の符号は数学的に確定できないことを明らかにし、後の章の数値計算の必要性を述べる.

### 4.1 スペクトルの発展方程式

エネルギースペクトルの発展方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k) = -\frac{\partial}{\partial k} \Pi_E(k) + F^\mathcal{E}(k) + D_{\text{Ek}}^\mathcal{E}(k) + D_{\text{vis}}^\mathcal{E}(k) \quad (4.1)$$

である. ここで,  $E(k)$  はエネルギースペクトル,  $\Pi_E(k)$  はエネルギーフラックス,  $F^\mathcal{E}(k)$  はエネルギーの強制を表す項,  $D_{\text{Ek}}^\mathcal{E}(k)$  はエクマンダンピングによるエネルギーの散逸を表す項,  $D_{\text{vis}}^\mathcal{E}(k)$  は粘性によるエネルギーの散逸を表す項である. 右辺の各項の定義はそれぞれ以下のとおりである:

$$\begin{aligned} \Pi_E(k) &\equiv \int_k^\infty T(k') dk' \quad (\text{ただし, } T_E(k) \text{ はエネルギー伝達関数}), \\ F^\mathcal{E}(k) &\equiv - \sum_{k \leq \mathbf{k} < k + \Delta k} \left\{ k_x U k_d^2 \text{Im}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] \right\}, \\ D_{\text{Ek}}^\mathcal{E}(k) &\equiv - \sum_{k \leq \mathbf{k} < k + \Delta k} \left\{ \frac{1}{2} \kappa |\mathbf{k}|^2 \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \{\hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}}\}] + \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 \text{Re}[\{\hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \hat{\psi}_{\mathbf{k}}\} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] \right\}, \\ D_{\text{vis}}^\mathcal{E}(k) &\equiv - \sum_{k \leq \mathbf{k} < k + \Delta k} \left\{ \nu |\mathbf{k}|^{10} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 + \nu |\mathbf{k}|^8 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ |\mathbf{k}|^2 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 - (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}}] \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 - |\mathbf{k}|^2 \text{Re}[\hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{k}}] \} \right\}. \end{aligned}$$

同様に、エンストロフィースペクトルの発展方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(k) = -\frac{\partial}{\partial k} \Pi_Q(k) + F^Q(k) + D_{\text{Ek}}^Q(k) + D_{\text{vis}}^Q(k) \quad (4.2)$$

である. ここで,  $Q(k)$  はエンストロフィースペクトル,  $\Pi_Q(k)$  はエンストロフィーフラックス,  $F^Q(k)$  はエンストロフィーの強制を表す項,  $D_{\text{Ek}}^Q(k)$  はエクマンダンピングによるエンストロフィーの散逸を表す項,  $D_{\text{vis}}^Q(k)$  は粘性によるエンストロフィーの散逸を表す項

である. 右辺の項の定義はそれぞれ以下のとおりである:

$$\begin{aligned}
 \Pi_Q(k) &\equiv \int_k^\infty C(k') dk' \quad (\text{ただし, } C_E(k) \text{ はエンストロフィー伝達函数}), \\
 F^Q(k) &\equiv - \sum_{k \leq \mathbf{k} < k+\Delta k} \left\{ -k_x U |\mathbf{k}|^2 k_d^2 \text{Im}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] + k_x U k_d^2 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Im}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] \right\}, \\
 D_{\text{Ek}}^Q(k) &\equiv - \sum_{k \leq \mathbf{k} < k+\Delta k} \left\{ \frac{1}{2} \kappa |\mathbf{k}|^4 \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \{\hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}}\}] + \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{\hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \hat{\psi}_{\mathbf{k}}\} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] \right\}, \\
 D_{\text{vis}}^Q(k) &\equiv - \sum_{k \leq \mathbf{k} < k+\Delta k} \left\{ \nu |\mathbf{k}|^{12} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 + \nu |\mathbf{k}|^8 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2)^2 |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^{10} \{ |\mathbf{k}|^2 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 - (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}}] \} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \{ (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 - |\mathbf{k}|^2 \text{Re}[\hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{k}}] \} \right\}.
 \end{aligned}$$

## 4.2 (1.1) の成立可能性

以下, Tung and Orland (2003) でも取り上げられた, エンストロフィー慣性領域における

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Q(k) \quad (4.3)$$

の符号について議論する. 定常性乱流を考える. このとき,  $\partial \Pi_E(k) / \partial t = 0$ ,  $\partial \Pi_Q(k) / \partial t = 0$  である. よって, (4.1), (4.2) より

$$\Pi_E(k) = - \int_k^\infty \sum_{q \leq \mathbf{q} < q+\Delta q} \left\{ F^E(q) + D_{\text{Ek}}^E(q) + D_{\text{vis}}^E(q) \right\} dq, \quad (4.4)$$

$$\Pi_Q(k) = - \int_k^\infty \sum_{q \leq \mathbf{q} < q+\Delta q} \left\{ F^Q(q) + D_{\text{Ek}}^Q(q) + D_{\text{vis}}^Q(q) \right\} dq \quad (4.5)$$

となる. これを (4.3) に代入すると,

$$\begin{aligned}
 & k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Q(k) \\
 = & - \int_k^\infty \sum_{q \leq \mathbf{q} \leq q + \Delta q} \left\{ \underbrace{k_d^2 q_x U \operatorname{Im}\{\hat{\psi}_q \hat{\tau}_q^*\}}_{(*)} (k_d^2 - k^2) \right. \\
 & - \frac{1}{2} \kappa q^2 (k^2 - q^2) |\hat{\psi}_q - \hat{\tau}_q|^2 \\
 & + \frac{1}{2} \kappa q^2 k_d^2 (|\hat{\tau}_q|^2 - \underbrace{\operatorname{Re}\{\hat{\psi}_q \hat{\tau}_q^*\}}_{(**)}) \\
 & - (k^2 - q^2) \left( \nu q^{10} |\hat{\psi}_q|^2 + \frac{1}{2} \Delta \nu q^8 \{q^2 |\hat{\psi}_q|^2 - (q^2 + k_d^2) \underbrace{\operatorname{Re}[\hat{\psi}_q^* \hat{\tau}_q]}_{(**)}\} \right) \\
 & - (k^2 - q^2 - k_d^2) \left( \nu q^8 (q^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_q|^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \Delta \nu q^8 \{ (q^2 - k_d^2) |\hat{\tau}_q|^2 - q^2 \underbrace{\operatorname{Re}[\hat{\psi}_q^* \hat{\tau}_q]}_{(**)} \} \right) \Big\} dq
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

となる. ここでは,  $k_d$  よりも高波数側における (4.3) の符号について議論しているので,  $k > k_d$  である. つまり,  $-k^2 + k_d^2 < 0$  である. また, 積分範囲の設定から  $k^2 - q^2 \leq 0$ ,  $k^2 - k_d^2 - q^2 < 0$ ,  $q^2 - k_d^2 > 0$  である. よって, (4.6) の項のうち, 符号不確定なのは (\*) を含む項と (\*\*) を含む項 (いずれも, 順圧モードと傾圧モードの相関の項) のみである. しかし, これらの符号は数学的に決定することはできない. つまり, 準地衡 2 層モデルにおいては, これらの項の作用があるために, (4.3) の符号を数学的に決定することができない. よって, 数値計算によって (4.3) の符号がどのようになるかを調べる必要がある.



## 第 5 章 数値計算の結果

本章では, 本研究で行なった数値計算の結果をまとめる. TO03 の結果との比較を行ない, 最後にまとめと考察を述べる.

### 5.1 計算設定

表 5.1.1 計算設定

	case1	case2	case3	case4
$\Delta v$ の値	0	$-5.280 \times 10^{-17}$	$5.280 \times 10^{-17}$	$1.560 \times 10^{-16}$
解像度	$1024^2$	$512^2$		
切断波数	341	170		
解析時間	$t = 1800 \sim 2000$	$t = 1300 \sim 1500$		

表 5.1.1 に計算設定を示す. case1 では, Larichev and Held (1995) や Tung and Orland (2003) と同じく, 上層と下層で粘性係数が同じ場合の計算設定である. case2 では, 下層の粘性係数がゼロとなるように設定した. case3 と case4 では, 下層の粘性係数が上層の粘性係数に比べてそれぞれ 2 倍, 3 倍になる値に設定した. これらは, Gkioulekas (2014)[5] で下層の粘性係数が上層の粘性係数よりも大きい場合, (1.1) が成立する可能性があるとして述べられており, それを検証するための設定である.

case1 は, 第 2 章で述べた初期値からスタートし,  $t \in [0, 1000]$  の時間は解像度  $256^2$  で, スピンアップをし,  $t \in (1000, 1500]$  の時間は解像度  $512^2$ ,  $t \in (1500, 2000]$  の時間は解像度  $1024^2$  で計算を行ない,  $t \in [1800, 2000]$  の計算結果を解析に用いた. case2, case3, case4 については, case1 の  $t = 1000$  の値を初期値として用い,  $t = 1500$  まで解像度  $512^2$  で時間発展させた. 解析には  $t \in [1300, 1500]$  の計算結果を用いた.

### 5.2 初期のエネルギーの発展

このモデルでは, 波数空間で非常に小さな波数に依らない振幅とランダムな位相を初期条件として与えているので, 発展は傾圧不安定の線型成長に従うと考えられる. 図 5.1 に  $t \in [0, 250]$  のエネルギーの発展を示す. エネルギーの指数函数的成長は  $t \lesssim 50$  で見られる. 線型論によると, 最速成長率  $\alpha_{\max}$  は  $k_x = 0.64k_d \sim 6.4, k_y = 0$  のとき,  $\alpha_{\max} \sim 0.205$  であるから, エネルギーが  $e$  倍になる時間は  $1/\alpha_{\max} \sim 4.89$  である. しかし, この時間 ( $t \lesssim 50$ ) における 2 次元エネルギースペクトルのピークは  $(k_x, k_y) = (1, 1)$  にあるので, ピークの全波数は  $k = \sqrt{2}$  である. この波数を持った擾乱の成長率は  $\alpha_{k=\sqrt{2}} \sim 0.049$  で

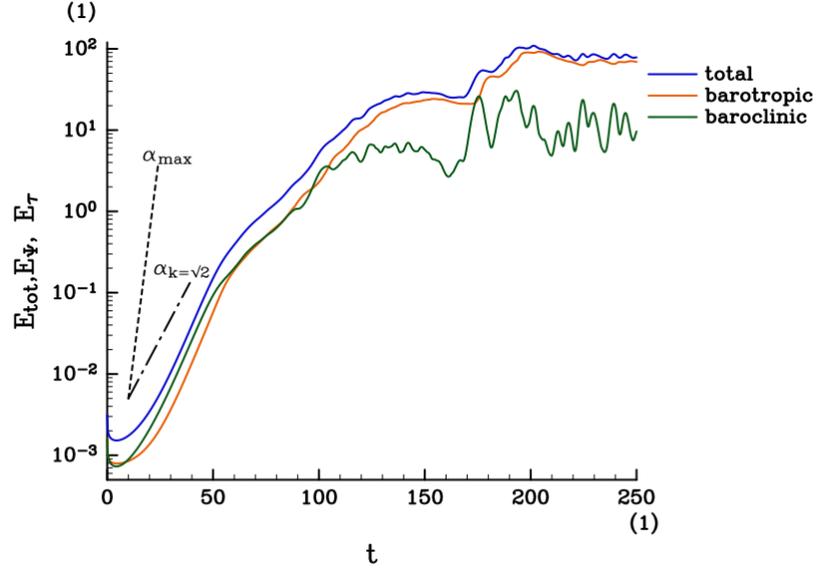


図 5.1 初期のエネルギー発展. 縦軸はエネルギーの大きさ (log スケール), 横軸は時刻. 点線の傾きは, 傾圧不安定の線型論から導出される, 最速成長率  $\alpha_{\max}$  の傾きを, 一点鎖線の傾きは,  $t = 30$  におけるエネルギースペクトルのピークの波数 ( $k = \sqrt{2}$ ) における成長率  $\alpha_{k=\sqrt{2}}$  を示す.

ある<sup>t1</sup>. 図 5.1 から, 初期の発展は成長率  $\alpha_{k=\sqrt{2}}$  で発展していることがわかる. つまり,  $t \lesssim 50$  における系の発展は傾圧不安定によって起きている.

正味のエネルギー注入項  $Uk_d^2(\partial\psi/\partial x)$  の波数スペクトルを図 5.2 に示す. 傾圧不安定の線型論で特徴づけられる発展を示す  $t \lesssim 50$  では, このスペクトルは  $k \approx k_d = 10$  近傍よりも低波数領域で有意な値を持っている. しかし,  $t \gtrsim 50$  では, スペクトルのピークはより低波数側にシフトしていく. これは, 順圧エネルギーの逆カスケードによって順圧エネルギーが低波数側に集積するために起こるものであると考えられる. したがって,  $t \gtrsim 50$  は非線型項が卓越した発展段階と考えられ, 実際に非線型項が線型項を卓越している (図省略).

### 5.3 case1 の結果

#### 5.3.1 エネルギーとエンストロフィーの発展

図 5.3 と図 5.4 に case1 のエネルギーとエンストロフィーの時間変化をそれぞれ示す. 線型発展が終わった後は, エネルギーは順圧モードが, エンストロフィーは傾圧モードが卓越している. スピンアップの後にどちらもある値のあたりで振動しており, 統計的平衡状態に達していると考えられる.

### 5.3 case1 の結果

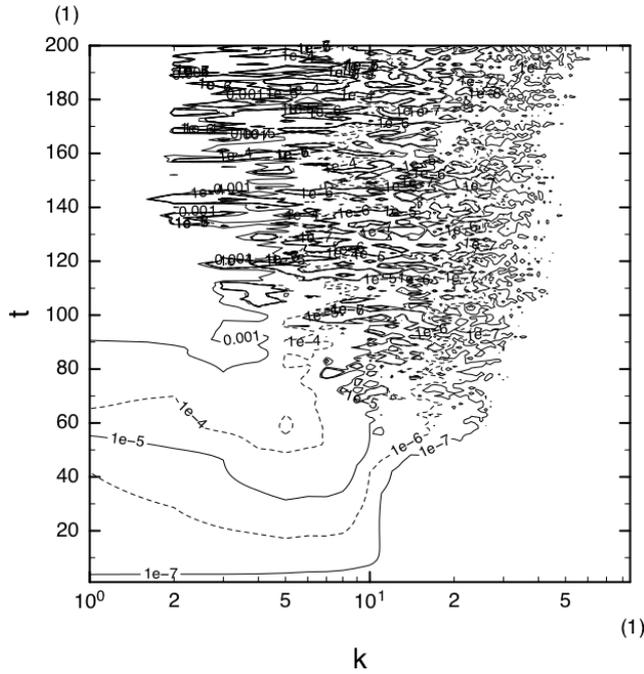


図 5.2 線型発展の時間における正味のエネルギー注入率  $k_x U k_d^2 \hat{\psi}(k) \hat{\tau}^*(k)$  のスペクトル構造. 横軸が水平方向の波数  $k$ , 縦軸が時刻  $t$  を表す.

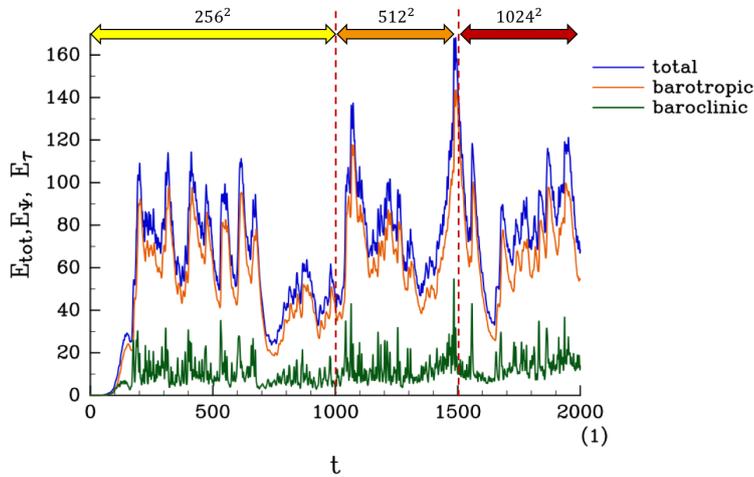


図 5.3 case1 のエネルギーの発展. 青色が全エネルギー, 橙色が順圧モードのエネルギー, 緑色が傾圧モードのエネルギーを示す.

#### 5.3.2 渦位場の様子

case1 の  $t = 1935$  における渦位場の様子を図 5.5 に示す. 順圧モードの渦位場の様子は 2 次元一様等方性乱流の渦位場の様子とよく似ており, 空間の所々に軸対称な渦が点在する. 一方, 傾圧モードの渦位場は渦位の強いところが墨流しのように現れる. この結果は,

<sup>†1</sup> 成長率の導出は, 付録参照.

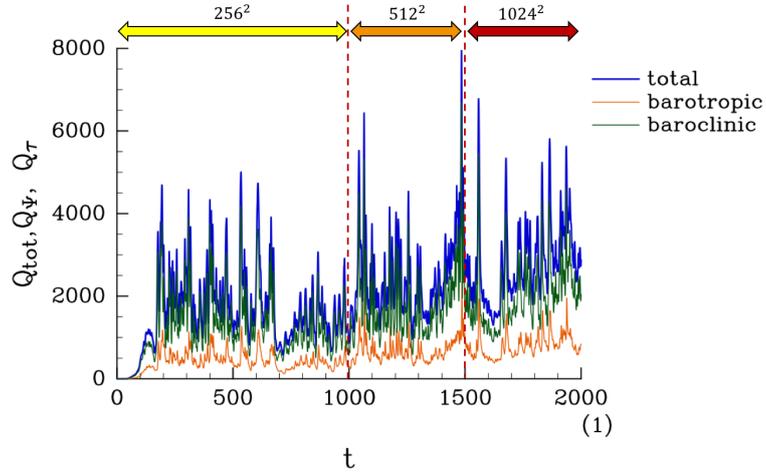


図 5.4 case1 のエンストロフィーの発展. 青色が全エンストロフィー, 橙色が順圧モードのエンストロフィー, 緑色が傾圧モードのエンストロフィーを示す.

Larichev and Held (1995) と整合的な結果である. 上層と下層の渦位は共に傾圧モードの渦位場に似ており, 概ね上層と下層は互いに逆符号である.

### 5.3.3 波数空間における解析結果

#### エネルギースペクトル

図 5.6 に case1 の場合と TO03 の場合のエネルギースペクトルの比較を示す. エネルギー注入波数は線型の傾圧不安定論によると  $k_d$  近傍であるが, この系では図 5.2 で示されているように最低波数であることを注意しておく. case1 では変形半径に対応する波数  $k_d = 10$  よりも低波数側では, スペクトルの傾きが  $k^{-5/3}$ , 高波数側では  $k^{-3}$  に近づいている<sup>+2</sup>. また, case1 ではエネルギー散逸波数が  $k_{\text{diss}}^E \simeq 232$ , エンストロフィー散逸波数が  $k_{\text{diss}}^Q \simeq 234$  となった<sup>+3</sup>. 図 5.6 の左側の結果を見ると,  $k \approx 230$  付近でエネルギースペクトルが急降下しており, この計算結果は散逸領域まで解像できていることがわかる. 一方, TO03 では, 低波数側では  $\beta$  項が効いており, エネルギースペクトルは  $E(k) \propto k^{-5/3}$  になっていない. 高波数側では,  $E(k) \propto k^{-3}$  の領域があるが非常に狭く, むしろ,  $E(k) \propto k^{-5/3}$  が顕著である. TO03 では, 強制波数よりも高波数側の  $E(k) \propto k^{-3}$  の領域はエンストロフィー慣性領域で,  $E(k) \propto k^{-5/3}$  の領域はエネルギーカスケードがエンストロフィーカスケードを卓越するエネルギー慣性領域であるとしているが, エネルギーやエンストロフィーの強制や散逸のスペクトルは示されていない. また, エネルギーやエンストロフィーの散逸波数がいくらなのかも明示されていない. エネルギースペクトルの計算結果は切断波数近傍で急峻な傾きを持っていないため, 散逸領域は解像されていないことが推測できる.

<sup>+2</sup> これらはそれぞれエネルギー慣性領域とエンストロフィー慣性領域によるものであると考えられるが, 後の節で散逸と強制のスペクトルやエネルギーフラックスの結果を示してから結論付けることにする.

<sup>+3</sup> エネルギー散逸波数とエンストロフィー散逸波数は次元解析から導出することが出来る (付録 D).

### 5.3 case1 の結果

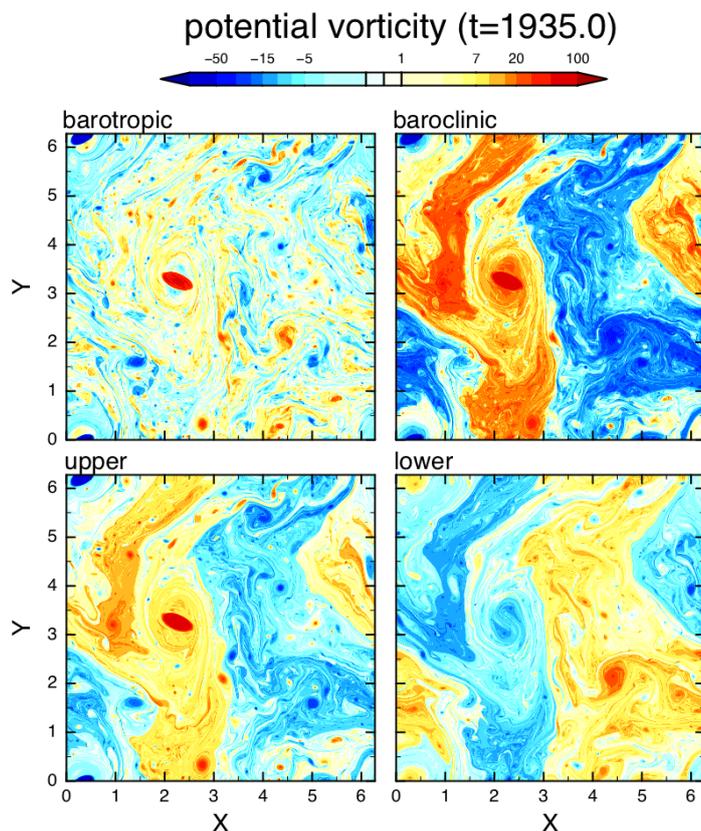


図 5.5  $t = 1935$  の時刻における渦位場の様子. 左上が順圧モード, 右上が傾圧モード, 左下が上層, 右下が下層の渦位を示す.

#### エネルギーの収支解析

エネルギーフラックスを図 5.7 に示す. これによると,  $k_d$  よりも低波数側はフラックスが一定になっていないが, 正の値であることから, 低波数側から高波数側にエネルギーがカスケードしていることがわかる. 通常の 2 次元一様等方性乱流におけるエネルギー慣性領域で高波数側から低波数側への逆カスケードがあり, エネルギーフラックスは一定で, そこで  $k^{-5/3}$  のスペクトルが形成される. エネルギー慣性領域となっている. しかし, 上記の結果から, case1 のこの領域はエネルギー慣性領域になっているとは言えない. また, 強制と散逸のスペクトルを示した図 5.8 から, case1 では最低波数において強制項  $U k_d^2 \partial \psi / \partial x$  による強制があり, これによって高波数側にエネルギーがカスケードしていると結論付けられる. よって, 図 5.13 で示された case1 のエネルギースペクトルの低波数側の傾き  $k^{-5/3}$  はこの領域がエネルギー慣性領域であるためではなく, 偶然  $k^{-5/3}$  に近い傾きになっただけであると考えられる. 一方, 高波数側では, エネルギー散逸率の値 ( $9.70 \times 10^{-5}$ ) とエネルギーフラックスの値 (約  $1.00 \times 10^{-4}$ ) を比較すると, わずかながらエネルギーが高波数側にカスケードしていることが分かる.

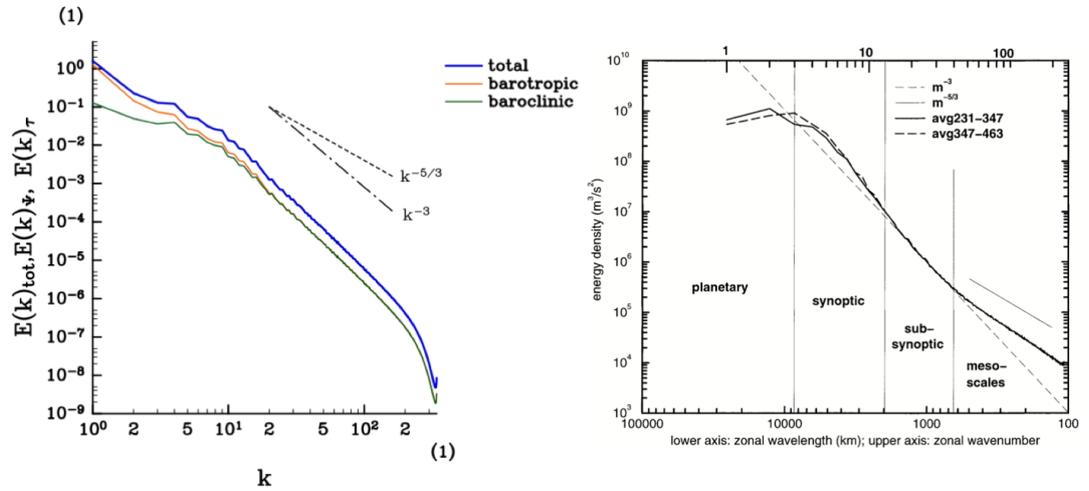


図 5.6 case1 の  $t \in [1800, 2000]$  で時間平均したエネルギースペクトルの結果 (左) と TO03 のエネルギースペクトル (右) の比較. 左図の青色は全エネルギースペクトル, 橙色は順圧モードのエネルギースペクトル, 緑色は傾圧モードのエネルギースペクトルを示す. 右図の太い線はそれぞれ時間平均した全エネルギースペクトルを示し, 実線が時刻 231 から 347, 破線が時刻 347 から 463 の時間平均となっている. 細い破線は  $k^{-3}$  の傾き, 細い点線は  $k^{-5/3}$  の傾きをそれぞれ示す.

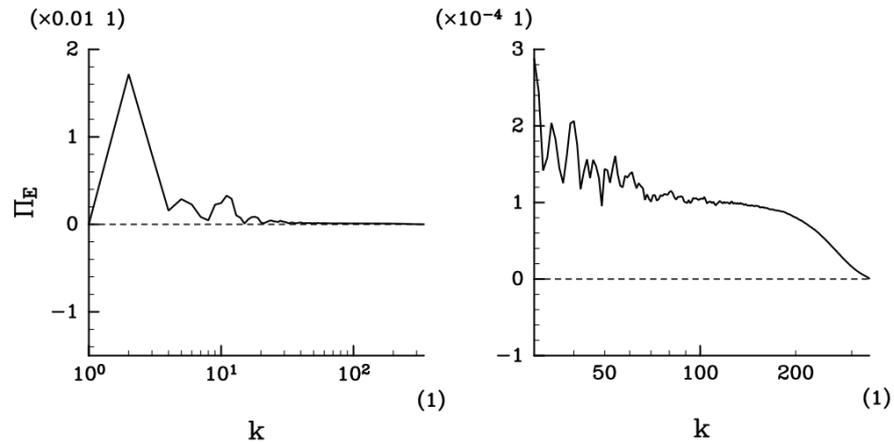


図 5.7 case1 のエネルギーフラックス. 左は全波数領域, 右は高波数領域の図.

エンストロフィーの収支解析

エンストロフィーフラックスを図 5.9 に示す. これによると, 全波数に渡ってエンストロフィーは高波数側にカスケードしており, 特に,  $k_d$  よりも高波数側ではエンストロフィーフラックスがほぼ一定となっている<sup>†4</sup>. また, エンストロフィーの強制と散逸のスペクトル

<sup>†4</sup> エンストロフィー散逸率が 6.22 でエンストロフィーフラックスの値は約 6.2 なので, ほぼ釣り合っている.

### 5.3 case1 の結果

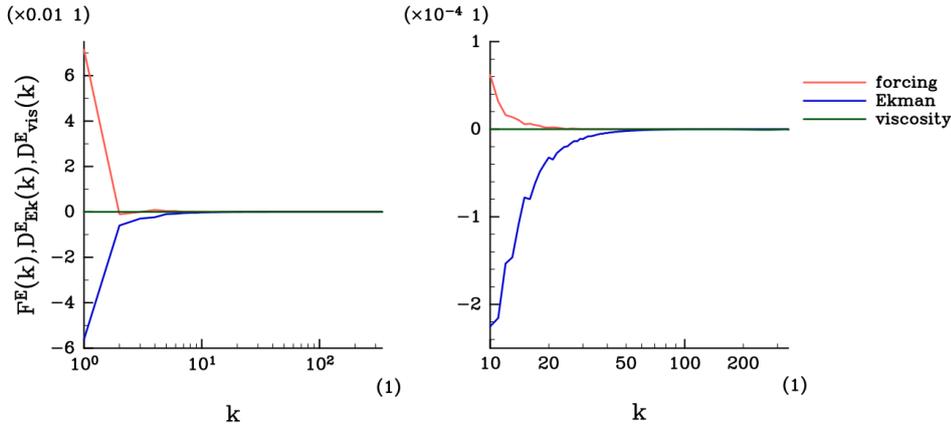


図 5.8 case1 のエネルギーにおける強制と散逸のスペクトル. 赤色が強制, 青色がエクマンダンピングによる散逸, 緑色が粘性による散逸を示す. 左は全波数領域, 右は変形半径よりも高波数側の領域を示す.

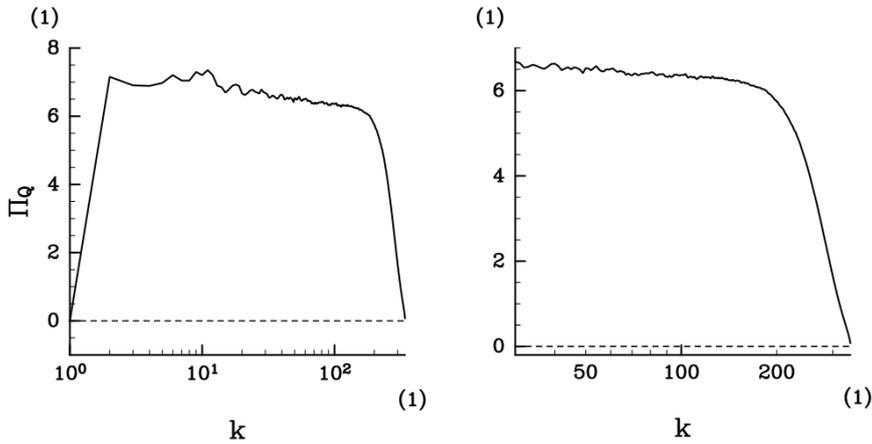


図 5.9 case1 のエンストロフィーフラックス. 左は全波数領域, 右は高波数領域の図.

(図 5.10) によると, この領域では僅かながらエクマンダンピングによる散逸があるものの, 強制や散逸はほぼ無いものとみなせる. 図 5.10 の  $k_d$  よりも大きな波数領域におけるエンストロフィーフラックスの一定値からのズレは, このエクマン散逸の効果によるものである. よって, この領域はエンストロフィー慣性領域とみなすことができ, スペクトルの傾きが  $k^{-3}$  となった結果と整合的である. また, エンストロフィー散逸波数  $k_{diss}^Q \approx 234$  あたりでは粘性による散逸がよく利いていることもわかる.

#### 5.3.4 (1.1) の検証

case1 で (1.1) が成立するかを検証したのが図 5.11 である.  $k_d$  よりも大きな波数領域において, 高波数側に行くに連れて  $k^2$  を掛けたエネルギーフラックスは確かに大きくなっていくが,  $k^2\Pi_E$  が  $\Pi_Q$  よりも大きくなる前に, エンストロフィー散逸波数に到達している.

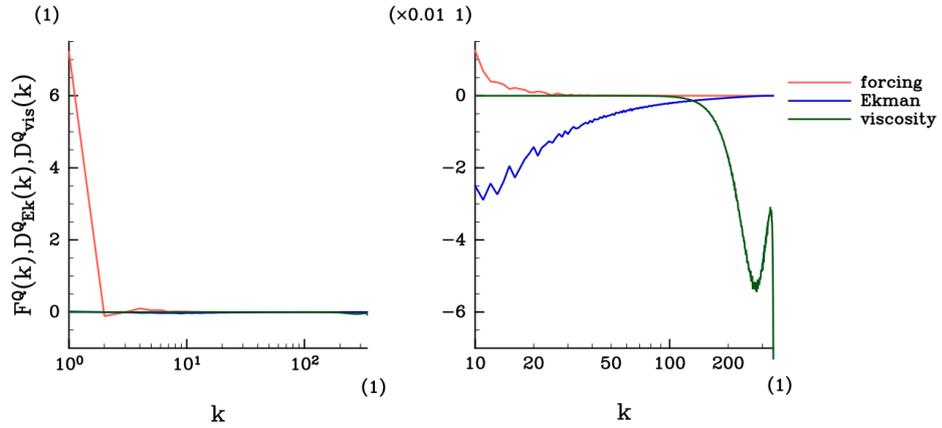


図 5.10 case1 の強制と散逸のエンストロフィースペクトル. 赤色が強制, 青色がエクマンダンピングによる散逸, 緑色が粘性による散逸を示す. 左は全波数, 右は  $k_d$  よりも高波数側のスペクトル.

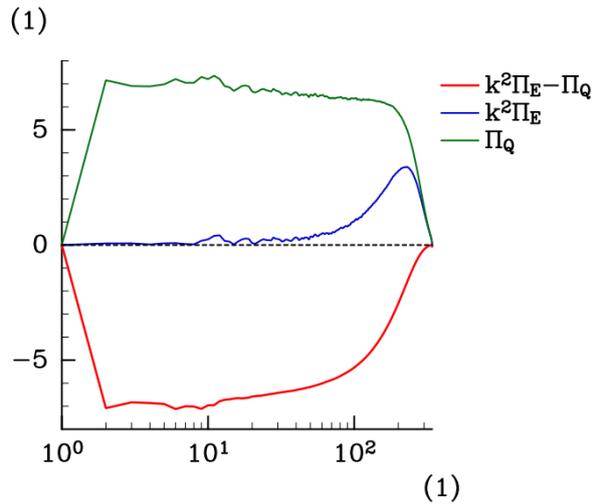


図 5.11 case1 での (1.1) の検証. 赤色が  $k^2 \Pi_E - \Pi_Q$ , 青色が  $k^2 \Pi_E$ , 緑色が  $\Pi_Q$  の波数分布を表す.

よって, この設定では, TO03 で主張されていた (1.1) が成立する領域は現れなかった.

#### 5.4 上層と下層で粘性係数を変えた場合

次に, case2, case3, case4 の計算結果を示す. case2 では図 5.12 でエネルギーの時間変化を示したように, 正定値であるべきエネルギーが負になり, 数値計算が破綻してしまっただ. case3, case4 のエネルギーやエンストロフィの時間変化や渦位場の様子は case1 と大きく変わらなかった.

case1~4 の場合のエネルギースペクトルを図 5.13 に示す. case3, case4 については, case1 と似た結果になった. 一方, case2 については, 高波数側でスペクトルの傾きが  $k^{-3}$  となっている領域は狭く, 切断波数に近い領域ではスペクトルの傾きが緩やかになってお

## 5.5 まとめと考察

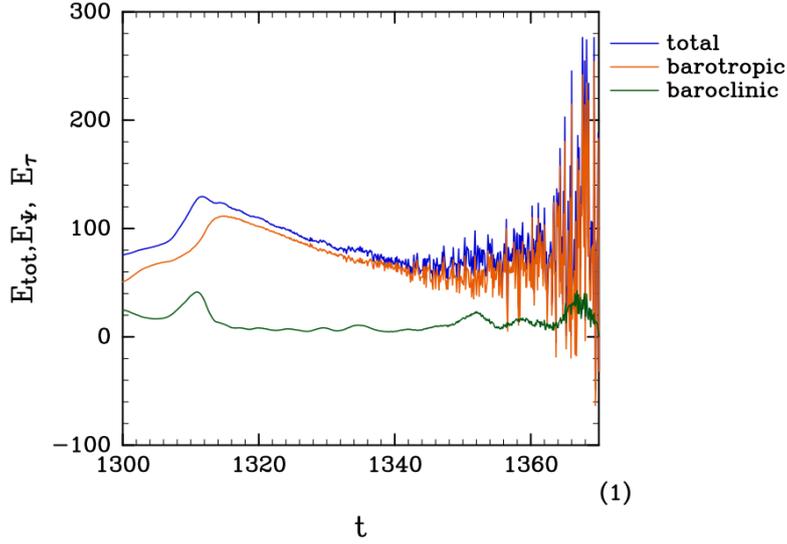


図 5.12 case2 のエネルギーの時間変化. 途中から非線型作用の振幅が大きくなり, エネルギーが負になるなど, 数値計算が破綻してしまっている.

り,  $k^{-5/3}$  に近い傾きになっている. これは, 図 5.6 の右に示した TO03 のエネルギースペクトルの結果と非常に似ている. しかしながら, case2 の計算は上で述べたように非物理的な振る舞いを示し, 定常性は実現していないことから,  $k^{-5/3}$  の結果も信頼するに足らない.

図 5.14 に (1.1) の検証結果の比較を示す. いずれの場合でも, (1.1) は成立しなかった.

## 5.5 まとめと考察

表 5.5.2 エネルギー散逸率

	case1	case2	case3	case4
$\psi \cdot J(\psi, \nabla^2 \psi)$	$1.62 \times 10^{-17}$	$1.87 \times 10^{-16}$	$-5.97 \times 10^{-18}$	$-2.97 \times 10^{-17}$
$\psi \cdot J(\tau, \nabla^2 \tau)$	$7.17 \times 10^{-2}$	$8.20 \times 10^{-2}$	$2.86 \times 10^{-2}$	$5.30 \times 10^{-2}$
$\psi \cdot U \partial \nabla^2 \tau / \partial x$	$1.53 \times 10^{-3}$	$1.44 \times 10^{-3}$	$1.09 \times 10^{-3}$	$1.35 \times 10^{-3}$
$\psi \cdot \kappa \nabla^2 (\psi - \tau) / 2$	$-7.31 \times 10^{-2}$	$-8.09 \times 10^{-2}$	$-3.33 \times 10^{-2}$	$-5.44 \times 10^{-2}$
$\psi \cdot [v \nabla^8 (\nabla^2 \psi) (\nabla^2 - k_d^2) \tau]$ $+ \frac{1}{2} \Delta v \nabla^8 \{ \nabla^2 \psi (\nabla^2 - k_d^2) \tau \}$	$-4.85 \times 10^{-5}$	$-1.29 \times 10^{-4}$	$-9.43 \times 10^{-5}$	$-1.86 \times 10^{-4}$
$\tau \cdot J(\tau, \nabla^2 \psi)$	$4.42 \times 10^{-18}$	$9.00 \times 10^{-19}$	$-3.75 \times 10^{-20}$	$-4.75 \times 10^{-19}$
$\tau \cdot J(\psi, \nabla^2 \tau)$	$-7.17 \times 10^{-2}$	$-8.20 \times 10^{-2}$	$-2.86 \times 10^{-2}$	$-5.31 \times 10^{-2}$
$\tau \cdot J(\psi, -k_d^2 \tau)$	$-1.46 \times 10^{-17}$	$8.10 \times 10^{-18}$	$1.80 \times 10^{-18}$	$4.69 \times 10^{-18}$
$\tau \cdot U \partial \nabla^2 \psi / \partial x$	$-1.53 \times 10^{-3}$	$-1.44 \times 10^{-3}$	$-1.09 \times 10^{-2}$	$-1.35 \times 10^{-3}$
$\tau \cdot U k_d^2 \partial \psi / \partial x$	$7.24 \times 10^{-2}$	$8.20 \times 10^{-2}$	$2.98 \times 10^{-2}$	$5.46 \times 10^{-2}$
$\tau \cdot \kappa \nabla^2 (\tau - \psi) / 2$	$1.07 \times 10^{-3}$	$-2.20 \times 10^{-4}$	$2.01 \times 10^{-4}$	$2.23 \times 10^{-4}$
$\tau \cdot [v \nabla^8 (\nabla^2 - k_d^2) \tau]$ $+ \frac{1}{2} \Delta v \nabla^8 \{ (\nabla^2 - k_d^2) \tau - \nabla^2 \psi \}$	$-4.85 \times 10^{-5}$	$-1.29 \times 10^{-4}$	$-9.30 \times 10^{-5}$	$-1.85 \times 10^{-4}$

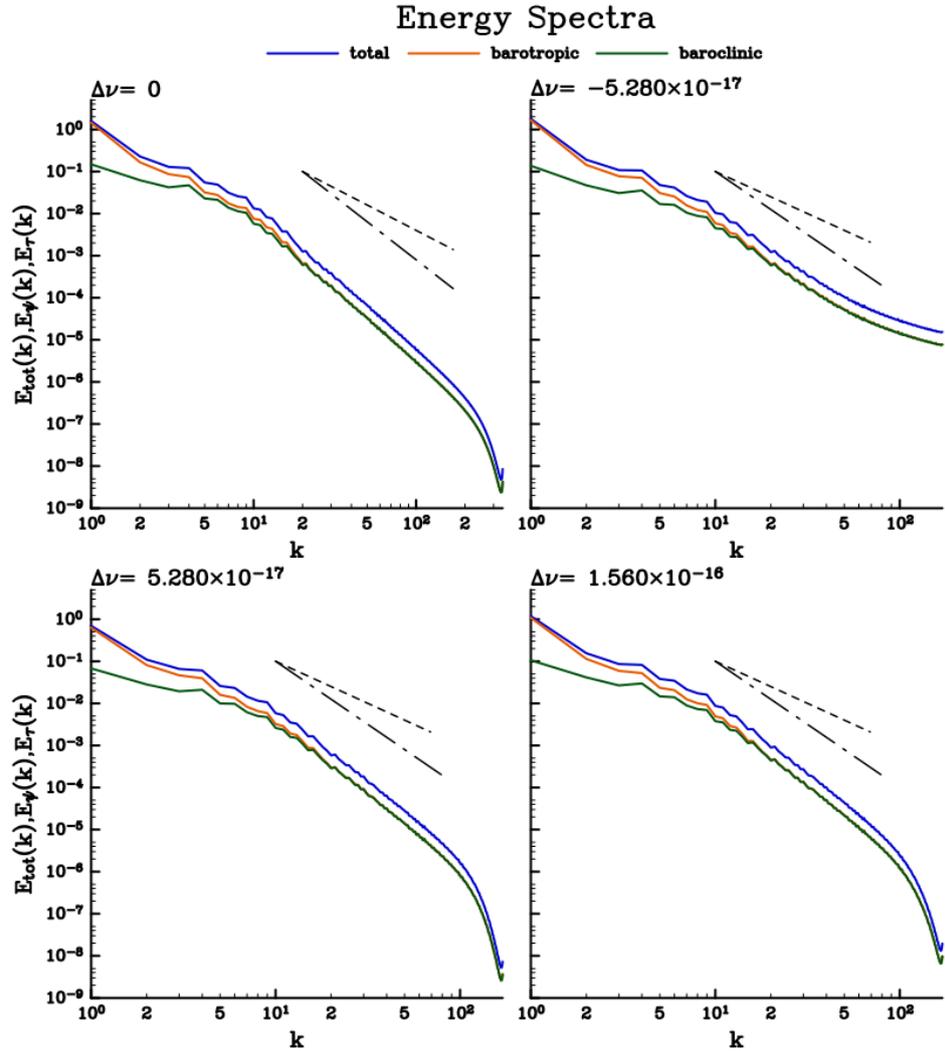


図 5.13 エネルギースペクトルの比較. 左上が case1, 右上が case2, 左下が case3, 右下が case4 の場合を示している. 青色は全エネルギースペクトル, 橙色は順圧モードのエネルギースペクトル, 緑色は傾圧モードのエネルギースペクトルを示す. 点線は  $k^{-5/3}$ , 一点鎖線は  $k^{-3}$  の傾きをそれぞれ表す.

表 5.5.2 にエネルギーの変化率に対する (3.2a) と (3.2b) の各項の寄与を, 表 5.5.3 にエンストロフィーの変化率に対する (3.6a) と (3.6b) の各項の寄与をそれぞれ示す. いずれの場合も, エネルギー保存則とエンストロフィー保存則が成立している.

TO03 では上層と下層の粘性係数の違いについては言及されておらず, もし彼らの主張が正しければ case1 の設定で (1.1) が成立している領域で N-G スペクトルが形成されるはずであるが, 結果としては全波数領域で (1.1) は成立しなかった. Gkioulekas (2014) では上層と下層の粘性係数を変えることにより (1.1) が成立する可能性が示唆されていたが, 上層と下層で粘性係数を変えた場合 case2, case3, case4 でも全波数領域で (1.1) が成立しなかった. しかし, 粘性が上層よりも下層の方が弱い case2 では, TO03 で得られたエネルギースペクトルに近い形となっており, 高波数領域で  $k^{-5/3}$  のスペクトルが形成されてい

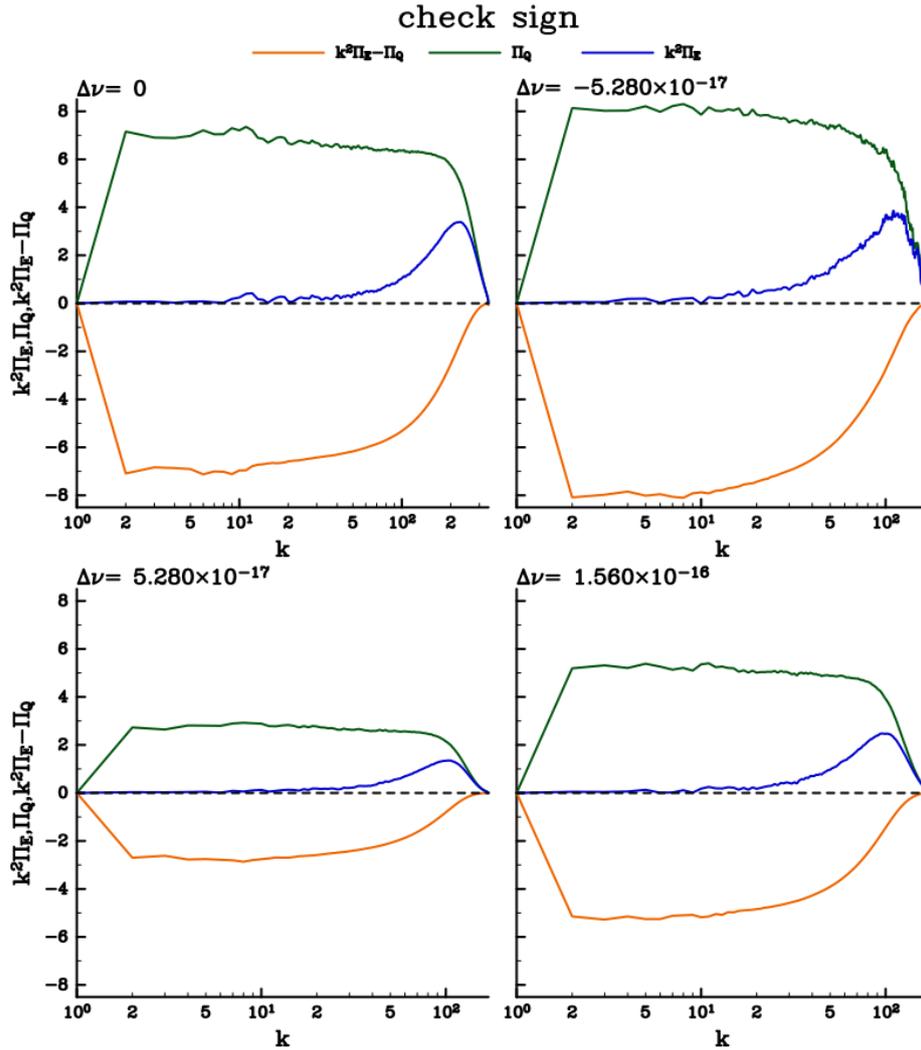


図 5.14 (1.1) の検証結果の比較. 左上が case1, 右上が case2, 左下が case3, 右下が case4 の場合を示している. いずれの図においても, 橙色が  $k^2\Pi_E - \Pi_Q$ , 青色が  $k^2\Pi_E$ , 緑色が  $\Pi_Q$  の波数分布を示す.

るように見える. これは, 高波数領域での粘性による散逸が弱いために, エネルギーが系の外に散逸しきれていないため, スペクトルがめくり上がっているためだと考えられる. 実際, case2 の下層の粘性係数は  $\nu + \Delta\nu = 0$  となっており, 散逸波数が定義できず, 散逸領域を解像することができない.

表 5.5.3 エンストロフィー散逸率

	case1	case2	case3	case4
$\nabla^2 \psi \cdot J(\psi, \nabla^2 \psi)$	$4.85 \times 10^{-16}$	$-1.21 \times 10^{-15}$	$-1.57 \times 10^{-16}$	$3.09 \times 10^{-16}$
$\nabla^2 \psi \cdot J(\tau, \nabla^2 \tau)$	$3.89 \times 10^0$	$4.26 \times 10^0$	$1.47 \times 10^0$	$2.76 \times 10^0$
$\nabla^2 \psi \cdot U \partial \nabla^2 \tau / \partial x$	$1.22 \times 10^{-1}$	$7.74 \times 10^{-2}$	$1.08 \times 10^{-1}$	$1.17 \times 10^{-1}$
$\nabla^2 \psi \cdot \kappa \nabla^2 (\psi - \tau) / 2$	$-7.62 \times 10^{-1}$	$-2.10 \times 10^0$	$-3.28 \times 10^{-1}$	$-5.00 \times 10^{-1}$
$\nabla^2 \psi \cdot [v \nabla^8 (\nabla^2 \psi) + \frac{1}{2} \Delta v \nabla^8 \{ \nabla^2 \psi (\nabla^2 - k_a^2) \tau \}]$	$-3.11 \times 10^0$	$-2.08 \times 10^0$	$-1.26 \times 10^0$	$-2.38 \times 10^0$
$(\nabla^2 - k_a^2) \tau \cdot J(\tau, \nabla^2 \psi)$	$-3.89 \times 10^0$	$-4.26 \times 10^0$	$-1.47 \times 10^0$	$-2.76 \times 10^0$
$(\nabla^2 - k_a^2) \tau \cdot J(\psi, \nabla^2 \tau)$	$-7.17 \times 10^0$	$-8.20 \times 10^0$	$-2.86 \times 10^0$	$-5.31 \times 10^0$
$(\nabla^2 - k_a^2) \tau \cdot J(\psi, -k_a^2 \tau)$	$7.17 \times 10^0$	$8.20 \times 10^0$	$2.86 \times 10^0$	$5.31 \times 10^0$
$(\nabla^2 - k_a^2) \tau \cdot U \partial \nabla^2 \psi / \partial x$	$-2.76 \times 10^{-1}$	$-2.22 \times 10^{-1}$	$-2.16 \times 10^{-1}$	$-2.52 \times 10^{-1}$
$(\nabla^2 - k_a^2) \tau \cdot U k_a^2 \partial \psi / \partial x$	$7.39 \times 10^0$	$8.34 \times 10^0$	$3.08 \times 10^0$	$5.59 \times 10^0$
$(\nabla^2 - k_a^2) \tau \cdot \kappa \nabla^2 (\tau - \psi) / 2$	$-2.04 \times 10^{-1}$	$-1.70 \times 10^0$	$-1.03 \times 10^{-1}$	$-1.70 \times 10^{-1}$
$(\nabla^2 - k_a^2) \tau \cdot [v \nabla^8 (\nabla^2 - k_a^2) \tau + \frac{1}{2} \Delta v \nabla^8 \{ (\nabla^2 - k_a^2) \tau - \nabla^2 \psi \}]$	$-3.11 \times 10^0$	$-2.08 \times 10^0$	$-1.25 \times 10^{-0}$	$-2.39 \times 10^0$

---

## 第 6 章 議論と結論

---

### 6.1 議論

(1.1) の成立の可否について次元解析に基づいて議論してみる. 次元解析よりエネルギー散逸波数  $k_{\text{diss}}^{\mathcal{E}}$  とエンストロフィー散逸波数  $k_{\text{diss}}^{\mathcal{Q}}$  はそれぞれ

$$k_{\text{diss}}^{\mathcal{E}} \sim \left( \frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{1/22},$$

$$k_{\text{diss}}^{\mathcal{Q}} \sim \left( \frac{\eta}{\nu^3} \right)^{1/24}$$

となる. ここで,  $\varepsilon$  はエネルギー散逸率,  $\eta$  はエンストロフィー散逸率である. 定常性が成り立っている時, エネルギーフラックス  $\Pi_E$  とエンストロフィーフラックス  $\Pi_Q$  はそれぞれエネルギー散逸率とエンストロフィー散逸率に等しいので,

$$\Pi_E = \varepsilon \sim (k_{\text{diss}}^{\mathcal{E}})^{22} \nu^3,$$

$$\Pi_Q = \eta \sim (k_{\text{diss}}^{\mathcal{Q}})^{24} \nu^3$$

となる. TO03 の主張が正しいとすれば, エンストロフィー慣性領域において  $k^2 \Pi_E - \Pi_Q$  の符号が入れ替わるので, エンストロフィー慣性領域のある波数  $k_c$  で  $k_c^2 \Pi_E - \Pi_Q = 0$  が成立するはずである. さらに,  $k_c$  はエネルギー散逸波数よりも小さくなければ,  $k^{5/3}$  のスペクトル領域は形成されない. つまり,

$$k_c^2 \Pi_E - \Pi_Q = \nu^3 \left\{ k_c^2 (k_{\text{diss}}^{\mathcal{E}})^{22} - (k_{\text{diss}}^{\mathcal{Q}})^{24} \right\} = 0,$$

$$\Leftrightarrow k_c = \frac{(k_{\text{diss}}^{\mathcal{Q}})^{12}}{(k_{\text{diss}}^{\mathcal{E}})^{11}} = \left( \frac{k_{\text{diss}}^{\mathcal{Q}}}{k_{\text{diss}}^{\mathcal{E}}} \right)^{12} k_{\text{diss}}^{\mathcal{E}}$$

より,  $(k_{\text{diss}}^{\mathcal{Q}}/k_{\text{diss}}^{\mathcal{E}}) < 1$  が成立しなくてはならない, 言い換えれば,  $k_{\text{diss}}^{\mathcal{Q}} < k_{\text{diss}}^{\mathcal{E}}$  が成立しなければならない. しかしながら, 本研究で行なった数値計算で  $k_{\text{diss}}^{\mathcal{E}}$  や  $k_{\text{diss}}^{\mathcal{Q}}$  が定義できる計算の結果について,  $k_{\text{diss}}^{\mathcal{Q}} < k_{\text{diss}}^{\mathcal{E}}$  とはならず, このような点からも (1.1) が成立しなかったと主張できる.

### 6.2 結論

本論文では, TO03 で述べられた, 準地衡 2 層モデルにおける N-G スペクトルの形成過程の普遍性と (1.1) の成立の可否について数値計算を用いて調べた.

TO03 は, 標準的な準地衡 2 層モデルを用いて N-G スペクトルを再現した. その理論的な説明は, 強制波数よりも高波数側に「隠れたエネルギーカスケード」がエンストロフィーカスケードを卓越する波数帯域が出現し, そこで (1.1) が成立する, というものである. そ

の「隠れたエネルギーカスケード」が高波数帯域において  $k^{-5/3}$  のスペクトルを形成すると結論付けた。

しかし, TO03 では, 示されている数値実験の結果のデータや波数空間における解析が不十分であった. そこで, 本研究では TO03 の主張の普遍性を数値実験によって確かめ, 波数空間における系の性質を解析した.

まず, 上層と下層で同じ粘性係数を与えて計算したところ, 隠れたエネルギーカスケードは存在するものの, N-G スペクトルは再現されず, 高波数帯域で (1.1) は成立しなかった. 次に, Gkoulekas (2014) で (1.1) の成立の可能性が示唆された, 上層と下層で粘性係数が異なる場合について計算を行った. 下層の粘性係数がゼロの場合に N-G スペクトルに似たスペクトルが形成されたが, 散逸波数まで解像されておらず, 結果の信頼性は乏しい. 下層のほうが粘性係数が高い場合は, いずれも上層と下層で同じ粘性係数を与えた場合と結果の傾向は変わらなかった.

数学的に (1.1) を示すことはできないため, 数値実験によって (1.1) を検証したことが本研究の意義である. 結論として, TO03 で提唱されたメカニズムは準地衡 2 層モデルにおける普遍的なものではないことが確かめられ, (1.1) の成立についても普遍的な性質では無いことがわかった. しかし, この結果は準地衡 2 層モデルで N-G スペクトルが形成されることや (1.1) が成立することの否定ではない. 上記 2 点が成立する可能性の有無と成立する場合の条件を検証することは今後の課題である.

## 謝辞

本研究を行うにあたり, 多くの方々にお世話になりました.

指導教員である神戸大学 岩山隆寛准教授には, 議論に多くの時間を費して頂きました. 深く感謝致します. 神戸大学 林祥介教授, 同大学 高橋芳幸准教授には, 研究室での講義や日々の本読みゼミ, セミナーにおいてはもちろん, 研究室活動全般に渡って有益な助言を頂きました. 宇宙科学研究所 村上真也博士には, 学部時から計算機の使い方や研究のことについて基本的な事柄から丁寧にご指導いただきました. 神戸大学博士後期課程 河合祐太氏は研究室の先輩としてあらゆる疑問に丁寧に答えていただきました. 神戸大学理学研究科地球および惑星大気科学研究室の皆様には, 日常的な研究室活動で大変お世話になりました. 感謝を申し上げます.

本研究の数値実験において, スペクトル法での計算には地球流体電脳倶楽部のスペクトルモデル SPMODEL を, データ入出力には地球流体電脳倶楽部の gtool5 Fortran 90/95 ライブラリを, データ解析には電脳 Ruby プロジェクトの成果物を利用させて頂きました. また, 本論文の作成には L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub> を, 図の作成には電脳 Ruby プロジェクトの成果物を利用させて頂きました. 感謝を申し上げます.



## 付録 A 支配方程式の導出

ここでは、モデルで用いた支配方程式の導出を行う。

### A.1 問題設定

考える流体は  $f$  平面上の非粘性ブシネスク流体で、静止状態では静水圧平衡  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g$  が成り立っているとする。この系での支配方程式は、

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x'}, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y'}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\bar{\rho}} g, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = -w \frac{d\bar{\theta}}{dz'}, \quad (\text{A.5})$$

である。ここで、 $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$  である。また、 $\bar{\cdot}$  は高さ  $z$  における適当な長さの時間平均と流れの領域にわたる水平方向の平均をとった量を表している。さらに、地衡流の関係、(コリオリ力) = (圧力傾度力), が成立しているとする:

$$\begin{cases} -fv_g = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x'}, \\ fu_g = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y'}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_g = -\frac{1}{\bar{\rho}f} \frac{\partial p}{\partial y'}, \\ v_g = \frac{1}{\bar{\rho}f} \frac{\partial p}{\partial x'}, \end{cases} \\ \Leftrightarrow \mathbf{v}_g = \frac{1}{\bar{\rho}f} \mathbf{k} \times \nabla_h p.$$

ここで、 $a_{tot}(x, y, z, t) = \bar{a}(z) + a(x, y, z, t)$  である<sup>†1</sup>。ここで、 $\nabla_h \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$  である。

### A.2 準備

地衡流的相対渦度は

$$\zeta_g \equiv \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{\bar{\rho}f} \nabla_h^2 p \quad (\text{A.6})$$

で定義される。次に、スケール解析を行う。ここで、水平方向速度と水平方向スケール代表的な大きさをそれぞれ  $U, L$  とおく。このとき、時間の代表的な大きさは  $L/U$  となる。そ

<sup>†1</sup> ブシネスク流体では、密度の平均量  $\bar{\rho}$  は  $z$  の関数ではなく、定数として扱う。

ここで,

$$\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{U}{L}. \quad (\text{A.7})$$

移流項の鉛直方向成分については,  $w \sim Ro \frac{H}{L} U^2$  より,

$$w \frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{U}{L} Ro. \quad (\text{A.8})$$

さらに, 水平方向の運動を地衡流による部分とそれからのズレの部分とに分ける:

$$\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{v}_g + Ro \boldsymbol{v}_a. \quad (\text{A.9})$$

よって,  $Ro$  の最低次のオーダーで Lagrange 微分は

$$\frac{D}{Dt} = \left( \frac{D}{Dt} \right)_g \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_g \cdot \nabla_h = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{A.10})$$

と書ける.

鉛直方向には, 基準状態からの摂動もまた静水圧平衡であると仮定する. ブシネスク流体では, 密度は温位の役割を果たすので, (A.3) は

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\bar{\rho} \theta}{\bar{\theta}} g \quad (\text{A.11})$$

となる<sup>t3</sup>.

また, 地衡流の関係式を  $z$  で微分し, (A.11) を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}_g}{\partial z} &= \frac{1}{\bar{\rho} f} \boldsymbol{k} \times \nabla_h \frac{\partial p}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\bar{\rho} f} \boldsymbol{k} \times \nabla_h \left( \frac{\bar{\rho} \theta}{\bar{\theta}} g \right) \\ &= \frac{g}{f \bar{\theta}} \boldsymbol{k} \times \nabla_h \theta \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

である.

<sup>t2</sup> 鉛直流と鉛直スケールの代表的な大きさをそれぞれ  $W, H$  とする. このとき, 連続の式

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim \frac{U}{L}} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\sim \frac{W}{H}} = 0$$

から, 単純には  $W \sim \frac{H}{L} U$  であるが, 水平流は非発散であることから,  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$  は極めて小さいため, 第 1 項と第 2 項の和の大きさは  $\frac{U}{L}$  に小さな量のロスビー数  $Ro = \frac{U}{fL}$  を掛けることによって大きさをバランスさせている.

<sup>t3</sup> 温位と密度の関係は, 平均量に対しては  $\bar{\theta} = c\bar{\rho}$  であるが, 摂動に対しては  $\theta = -c\rho$  である. ここで,  $c$  は  $\text{K}/(\text{kg m}^{-3})$  の次元を持つ正の定数である. これらの関係式の符号については,  $\bar{\theta}, \bar{\rho}$  は正定値であるのに対して, 平均量には符号がつかない. 摂動に関しては, 周囲より軽いパーセル ( $\bar{\rho} < 0$ ) は, 周囲より温かい ( $\bar{\theta} > 0$ ) ので, 負符号がつく.

## A.2 準備

---

準地衡における熱力学エネルギー方程式は, (A.5) に (A.10) を適用した

$$\left(\frac{D\theta}{Dt}\right)_g = -w \frac{d\bar{\theta}}{dz} \quad (\text{A.13})$$

である. この式は

$$N = \left[\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz}\right]^{1/2} \quad (\text{A.14})$$

を用いると,

$$\left(\frac{D\theta}{Dt}\right)_g = -w \frac{\bar{\theta}}{g} N^2 \quad (\text{A.15})$$

と書ける.

以上, まとめると,

$$\left(\frac{Du}{Dt}\right)_g - fv = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{A.16})$$

$$\left(\frac{Dv}{Dt}\right)_g + fu = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \bar{\rho} \frac{\theta}{\bar{\theta}} g \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\left(\frac{D\theta}{Dt}\right)_g = -w \frac{\bar{\theta}}{g} N^2 \quad (\text{A.20})$$

である.

ここで, (A.16) と (A.17) をベクトル形式で書くと,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_h\right) \mathbf{v}_g + Ro \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_h\right) \mathbf{v}_a + f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g + f Ro \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_h p.$$

地衡流の関係から,  $f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_h p$ , さらに, 上の式の第2項は  $O(Ro)$  程度と見積もれるので,  $O(Ro)$  の範囲内で,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_h\right) \mathbf{v}_g + f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a = 0$$

となる. 結局, (A.16) と (A.17) は

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} - f v_a = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} + f u_a = 0 \quad (\text{A.22})$$

となる. また, (A.19) を (A.9) に代入すると, 地衡流は非発散であるから,

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.23})$$


---

を得る.

以上より,  $f$  平面上の非粘性ブシネスク流体に準地衡近似を適用した方程式系は, ここまでで導出した式と地衡流の式を合わせたものとなる:

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} - f v_a = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} + f u_a = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \bar{\rho} \frac{\theta}{\bar{\theta}} g, \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.27})$$

$$\left( \frac{D\theta}{Dt} \right)_g = -w \frac{\bar{\theta}}{g} N^2, \quad (\text{A.28})$$

$$u_g = -\frac{1}{\bar{\rho} f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (\text{A.29})$$

$$v_g = \frac{1}{\bar{\rho} f} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (\text{A.30})$$

### A.3 準地衡渦位方程式の導出

ここから, 渦位方程式を導くために, (A.25) を  $x$  で偏微分した式から (A.24) を  $y$  で偏微分した式を引くと,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial v_g}{\partial x} + u_g \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial x} \frac{\partial v_g}{\partial y} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v_g}{\partial x} + f \frac{\partial u_a}{\partial x} = 0 \\ -) & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial u_g}{\partial y} \frac{\partial u_g}{\partial x} + u_g \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \frac{\partial u_g}{\partial y} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_g}{\partial y} - f \frac{\partial v_a}{\partial y} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \left( u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \underbrace{\left( \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right)}_{\nabla \cdot \mathbf{v}_g = 0} \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \\ & + f \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

#### A.4 準地衡 2 層渦位方程式の導出

となる.  $\zeta_g$  の定義を用いて書き直すと,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{D\zeta_g}{Dt}\right)_g &= -f \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) \\
 &= f \frac{\partial w}{\partial z} \\
 &= -\frac{fg}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{D}{Dt} \left( \frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right)_g \right\} \\
 &= -\frac{fg}{N^2} \left[ \left( \frac{D}{Dt} \right)_g \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right\} + \frac{\partial v_g}{\partial z} \cdot \nabla_h \left( \frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right] \\
 &= -\left( \frac{D}{Dt} \right)_g \left\{ \frac{fg}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

となる. 最後の等式は, (A.12) を用いた. よって,

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_g \underbrace{\left\{ \zeta_g + \frac{fg}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right\}}_{(*)} = 0 \tag{A.32}$$

となる. ここで, (\*) 部分を準地衡流渦位 (QG PV) と呼ぶ. 地衡流の関係からの式

$$\zeta_g = \frac{1}{\bar{\rho}f} \nabla_h^2 p$$

と静水圧の式

$$\frac{\theta}{\bar{\theta}} = \frac{1}{\bar{\rho}g} \frac{\partial p}{\partial z}$$

を (A.32) に代入し, 両辺に  $\bar{\rho}f$  をかけると,

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_g \left\{ \nabla_h^2 p + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right\} = 0 \tag{A.33}$$

となる. 準地衡流近似における方程式系 (A.24)~(A.30) は上の式にまとめられる. つまり, 圧力  $p$  がわかれば, 7 つの未知変数  $u_g, v_g, w, u_a, v_a, \theta, p$  のうち,  $p$  以外の未知変数を知ることが出来る.

#### A.4 準地衡 2 層渦位方程式の導出

準地衡 2 層モデルにおける方程式を導出する.

図 A.4 のように, 大気を厚さの等しい 2 層に分け, 上層の物理量を層の中心の高さで代表し, 下層の物理量も層の中心で代表する. 境界条件として上下には固体壁を仮定する. 添字の数字付の物理量は, その数字のレベルの物理量を表す. 渦度方程式 (A.31) (以後, 添字の  $g$  は省略する)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta = f \frac{\partial w}{\partial z} \tag{A.34}$$

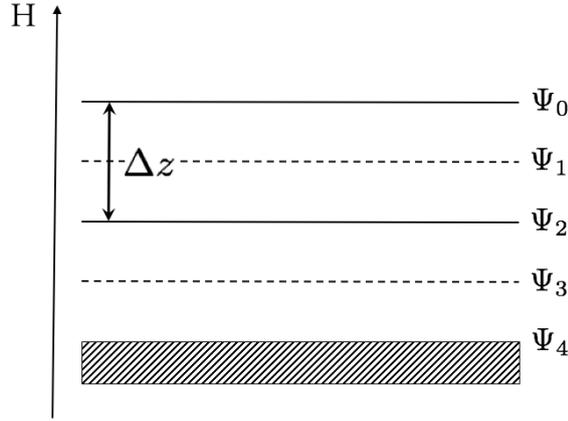


図 A.1 2層モデルの概念図.

を 1 層目 (レベル 1) と 2 層目 (レベル 3) にそれぞれ適用する:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta_1 = f \frac{w_0 - w_2}{\Delta z} = -\frac{f}{\Delta z} w_2, \quad (\text{A.35})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_3 \frac{\partial}{\partial x} + v_3 \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta_3 = f \frac{w_2 - w_4}{\Delta z} = \frac{f}{\Delta z} w_2. \quad (\text{A.36})$$

ここで,  $\frac{\partial w}{\partial z}$  の見積もりには中央差分を用いた. また, 熱力学方程式はレベル 2 に適用し,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_2 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \theta_2 = -\frac{\bar{\theta}_2}{g} N^2 w_2, \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\theta_2}{\bar{\theta}_2} = \frac{1}{\bar{\rho} g} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_2 = \frac{1}{\bar{\rho} g} \frac{p_1 - p_3}{\Delta z} \quad (\text{A.38})$$

である. (A.37) を (A.35) に用いると,

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_2 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{f}{\Delta z} \frac{g}{N^2} \frac{\theta_2}{\bar{\theta}_2} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla \right) \left\{ \frac{f}{\bar{\rho}} \frac{1}{(\Delta z)^2 N^2} (p_1 - p_3) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

となる. 同様に, (A.37) を (A.36) に用いると,

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= - \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_2 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{f}{\Delta z} \frac{g}{N^2} \frac{\theta_2}{\bar{\theta}_2} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla \right) \left\{ \frac{f}{\bar{\rho}} \frac{1}{(\Delta z)^2 N^2} (p_3 - p_1) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

となる. ここで, 地衡流の関係

$$u = -\frac{1}{\bar{\rho} f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{\bar{\rho} f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{A.41})$$

から, 流線函数  $\Psi$  は

$$\Psi \equiv \frac{p}{\rho f} \quad (\text{A.42})$$

と定義でき,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \nabla \Psi \quad (\text{A.43})$$

となる. これを用いると (A.39) は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_2 \cdot \nabla \right) \left\{ \frac{f^2}{N^2} \frac{1}{(\Delta z)^2} (\Psi_1 - \Psi_3) \right\} \quad (\text{A.44})$$

となり, (A.40) は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_2 \cdot \nabla \right) \left\{ \frac{f^2}{N^2} \frac{1}{(\Delta z)^2} (\Psi_3 - \Psi_1) \right\} \quad (\text{A.45})$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_2 &= \frac{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3}{2} = \boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_1) \\ &= \boldsymbol{v}_3 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3) \end{aligned}$$

を踏まえると,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_2 \cdot \nabla (\Psi_1 - \Psi_3) \\ &= \left\{ \boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_1) \right\} \cdot \nabla (\Psi_1 - \Psi_3) \\ &= \left\{ \boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{k} \times \nabla (\Psi_3 - \Psi_1) \} \right\} \cdot \{ \nabla (\Psi_1 - \Psi_3) \} \\ &= \boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla (\Psi_1 - \Psi_3) \end{aligned}$$

となる. よって, (A.44) は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla \right) \left\{ \frac{f^2}{N^2} \frac{1}{(\Delta z)^2} (\Psi_1 - \Psi_3) \right\} \quad (\text{A.46})$$

となり, (A.45) は同様にして,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_3 \cdot \nabla \right) \left\{ \frac{f^2}{N^2} \frac{1}{(\Delta z)^2} (\Psi_3 - \Psi_1) \right\} \quad (\text{A.47})$$

となる. 結局, 2 層モデルにおける準地衡渦位方程式は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla \right) \left\{ \nabla^2 \Psi_1 + k_d^2 \frac{\Psi_3 - \Psi_1}{2} \right\} = 0, \quad (\text{A.48})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_3 \cdot \nabla \right) \left\{ \nabla^2 \Psi_3 + k_d^2 \frac{\Psi_1 - \Psi_3}{2} \right\} = 0 \quad (\text{A.49})$$

である. ここで,  $k_d^2 \equiv \frac{2f^2}{N^2(\Delta z)^2}$  とした.

## A.5 支配方程式系の変形

鉛直シアを伴う  $y$  方向に一様な東西平均流があるとする. 平均流からのズレの成分に関する発展方程式を導く. このとき, 流れ関数は

$$\Psi_1 = -Uy + \psi_1(x, y, t), \quad (\text{A.50})$$

$$\Psi_3 = Uy + \psi_3(x, y, t), \quad (\text{A.51})$$

と表現できる. ここで,  $U$  は定数. これらを (A.48) や (A.49) に代入する;

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \Psi_1 + k_d^2 \frac{\Psi_3 - \Psi_1}{2} \\ &= \nabla^2 \psi_1 + k_d^2 \left( Uy + \frac{\psi_3 - \psi_1}{2} \right) \\ &= \left( \nabla^2 \psi_1 + k_d^2 \frac{\psi_3 - \psi_1}{2} \right) + k_d^2 Uy \\ &= q'_1 + Q_1. \end{aligned}$$

最後の等式では,  $q'_1 = \nabla^2 \psi_1 + k_d^2 \frac{\psi_3 - \psi_1}{2}$ ,  $Q_1 = k_d^2 Uy$  とした. 同様に,

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \Psi_3 + k_d^2 \frac{\Psi_1 - \Psi_3}{2} \\ &= \left( \nabla^2 \psi_3 + k_d^2 \frac{\psi_1 - \psi_3}{2} \right) - k_d^2 Uy \\ &= q'_3 + Q_3. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} v_1 &= e_z \times \nabla \Psi_1 \\ &= e_z \times \nabla \psi_1 + U i \\ &= U i + v'_1, \\ v_3 &= e_z \times \nabla \Psi_3 \\ &= e_z \times \nabla \psi_3 - U i \\ &= -U i + v'_3. \end{aligned}$$

である. 以上より, (A.48) は

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla \right) \left\{ \nabla^2 \Psi_1 + k_d^2 \frac{\Psi_3 - \Psi_1}{2} \right\} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U i + v'_1) \cdot \nabla \right\} (q'_1 + Q_1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{\partial}{\partial t} + v'_1 \cdot \nabla \right) q'_1 + U \frac{\partial}{\partial x} q'_1 + v'_1 \frac{\partial}{\partial y} Q_1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{\partial}{\partial t} + v'_1 \cdot \nabla \right) q'_1 + U \frac{\partial}{\partial x} q'_1 + k_d^2 U v'_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

となる. 同様に, (A.49) は

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}'_3 \cdot \nabla \right) q'_3 - U \frac{\partial}{\partial x} q'_3 - k_d^2 U v'_3 = 0 \quad (\text{A.53})$$

となる. ここで, 順圧 (barotropic) モードの流線函数と傾圧 (baroclinic) モードの流線函数をそれぞれ以下のように定義する;

$$\psi = \frac{\psi_1 + \psi_3}{2}, \quad \tau = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}. \quad (\text{A.54})$$

これらを用いると,  $\boldsymbol{v}'_1 = \boldsymbol{v}_\psi + \boldsymbol{v}_\tau$ ,  $\boldsymbol{v}'_3 = \boldsymbol{v}_\psi - \boldsymbol{v}_\tau$ ,  $q'_1 = q_\psi + q_\tau$ ,  $q'_3 = q_\psi - q_\tau$  となる (下付き文字  $\psi$  は順圧モード, 下付き文字  $\tau$  は傾圧モードの物理量を表す). また,

$$\begin{aligned} q_\psi &= \frac{q'_1 + q'_3}{2} = \nabla^2 \left( \frac{\psi'_1 + \psi'_3}{2} \right) \equiv \nabla^2 \psi, \\ q_\tau &= \frac{q'_1 - q'_3}{2} = \nabla^2 \left( \frac{\psi'_1 - \psi'_3}{2} \right) + k_d^2 \frac{\psi'_3 - \psi'_1}{2} \equiv \nabla^2 \tau - k_d^2 \tau, \\ \boldsymbol{v}_\psi &= \boldsymbol{e}_z \times \nabla \psi, \quad \boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{e}_z \times \nabla \tau \end{aligned}$$

である. これらを代入すると, (A.52) は

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_\psi + \boldsymbol{v}_\tau) \cdot \nabla \right\} (q_\psi + q_\tau) + U \frac{\partial q'_1}{\partial x} + k_d^2 U v'_1 = 0 \quad (\text{A.55})$$

となり, (A.53) は

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_\psi - \boldsymbol{v}_\tau) \cdot \nabla \right\} (q_\psi - q_\tau) - U \frac{\partial q'_3}{\partial x} - k_d^2 U v'_3 = 0 \quad (\text{A.56})$$

となる. 順圧モードだけの式にするため,  $\{(A.55) + (A.56)\} \div 2$  を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_\psi}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_\psi \cdot \nabla) q_\psi + \underbrace{(\boldsymbol{v}_\tau \cdot \nabla) q_\tau}_{J(\tau, q_\tau) = J(\tau, \nabla^2 \tau) - k_d^2 J(\tau, \tau)} + U \frac{\partial}{\partial x} q_\tau + k_d^2 U v_\tau &= 0, \\ \Leftrightarrow \frac{\partial q_\psi}{\partial t} + J(\psi, q_\psi) + J(\tau, \nabla^2 \tau) + U \frac{\partial}{\partial x} q_\tau + k_d^2 U v_\tau &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

となる. また, 傾圧モードだけの式にするため,  $\{(A.55) - (A.56)\} \div 2$  を計算すると,

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial q_\tau}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_\psi \cdot \nabla) q_\tau + (\boldsymbol{v}_\tau \cdot \nabla) q_\psi}_{\frac{\partial q_\tau}{\partial t} + J(\psi, q_\tau) + J(\tau, q_\psi)} + U \frac{\partial}{\partial x} q_\psi + k_d^2 U v_\psi &= 0, \\ \Leftrightarrow \frac{\partial q_\tau}{\partial t} + J(\psi, q_\tau) + J(\tau, q_\psi) + U \frac{\partial}{\partial x} q_\psi + k_d^2 U v_\psi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

となる. (A.57) と (A.58) をそれぞれ  $\psi$  と  $\tau$  を用いて書くと,

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \psi) + J(\tau, \nabla^2 \tau) + U \frac{\partial \nabla^2 \tau}{\partial x} + k_d^2 U \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{\partial (\nabla^2 \tau - k_d^2 \tau)}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \tau - k_d^2 \tau) + J(\tau, \nabla^2 \psi) + U \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + k_d^2 U \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.60})$$

となる.

---

## 付録 B 波数空間における方程式系

---

### B.1 波数空間における方程式系の導出

順圧モードの支配方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \psi) + J(\tau, \nabla^2 \tau) + U \frac{\partial \nabla^2 \tau}{\partial x} \\ = -\kappa \nabla^2 \frac{\psi - \tau}{2} - \nu \nabla^8 (\nabla^2 \psi) - \frac{1}{2} \Delta \nu \nabla^8 \{ \nabla^2 \psi - (\nabla^2 - k_d^2) \tau \} \end{aligned} \quad (2.7a)$$

を波数空間における式に直すために, 順圧モードの流線函数と傾圧モードの流線函数をそれぞれ

$$\psi = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (B.1)$$

$$\tau = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\tau}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (B.2)$$

と Fourier 級数展開する. ここで,  $\mathbf{k} = (k, l)$ ,  $\mathbf{r} = (x, y)$  である. 以下,

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}, t) \equiv \hat{\psi}_{\mathbf{k}}, \quad \hat{\tau}(\mathbf{k}, t) \equiv \hat{\tau}_{\mathbf{k}}$$

と書く．これらを代入する；

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\
 U \frac{\partial \nabla^2 \tau}{\partial x} &= -U \sum_{\mathbf{k}} ik |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\
 \kappa \frac{\nabla^2(\psi - \tau)}{2} &= -\frac{\kappa}{2} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 (\hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\
 \nu \nabla^8(\nabla^2 \psi) &= -\nu \sum_{\mathbf{k}} (|\mathbf{k}|^2)^5 \hat{\psi}_{\mathbf{k}}, \\
 \frac{1}{2} \Delta \nu \nabla^8 \{ \nabla^2 \psi - (\nabla^2 - k_a^2) \tau \} &= -\frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - (|\mathbf{k}|^2 + k_a^2) \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \}, \\
 J(\psi, \nabla^2 \psi) &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \\
 &= \left( \sum_{\mathbf{k}} ik \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \left( \sum_{\mathbf{l}} -il |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}} \right) \\
 &\quad - \left( \sum_{\mathbf{k}} il \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \left( \sum_{\mathbf{l}} -im |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}} \right) \\
 &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (kn - ml) |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\cdot\mathbf{r}} \\
 &\quad + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (ml - nk) |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\cdot\mathbf{r}} \\
 &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (\mathbf{k} \times \mathbf{m})_z \{ |\mathbf{l}|^2 - |\mathbf{k}|^2 \} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\cdot\mathbf{r}}, \\
 J(\tau, \nabla^2 \tau) &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (\mathbf{k} \times \mathbf{m})_z \{ |\mathbf{l}|^2 - |\mathbf{k}|^2 \} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\cdot\mathbf{r}}.
 \end{aligned}$$

B.1 波数空間における方程式系の導出

ここで,  $\mathbf{l} = (m, n)$  とした. これらに  $e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}}$  (ただし,  $\mathbf{m} = (k_x, k_y)$ ) を掛け,  $[0, L_x] \times [0, L_y]$  の領域で積分すると,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ L_x L_y \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{m}} \right\} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ L_x L_y |\mathbf{m}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \right\}, \\
& \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}} U \frac{\partial \nabla^2 \tau}{\partial x} \\
&= -U L_x L_y \sum_{\mathbf{k}} ik |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{m}} \\
&= -U L_x L_y ik_x |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}}, \\
& \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}} \kappa \frac{\nabla^2 (\psi - \tau)}{2} \\
&= -\frac{\kappa}{2} L_x L_y \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 (\hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}}) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{m}} \\
&= -\frac{\kappa}{2} L_x L_y |\mathbf{m}|^2 (\hat{\psi}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{m}}), \\
& \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}} \nu \nabla^8 (\nabla^2 \psi) \\
&= -\nu L_x L_y \sum_{\mathbf{k}} (|\mathbf{k}|^2)^5 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{m}} \\
&= -\nu L_x L_y (|\mathbf{m}|^2)^5 \hat{\psi}_{\mathbf{m}}, \\
& \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{2} \Delta \nu \nabla^8 \{ \nabla^2 \psi - (\nabla^2 - k_d^2) \tau \} \\
&= -\frac{1}{2} \Delta \nu L_x L_y \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^8 \{ |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{m}} \\
&= -\frac{1}{2} \Delta \nu L_x L_y |\mathbf{m}|^8 \{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - (\mathbf{m}^2 - k_d^2) \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \}.
\end{aligned}$$

非線型項に関しては, 最後に,  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}, \mathbf{l} \rightarrow -\mathbf{l}$  という置き換えをすると,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}} J(\psi, \nabla^2 \psi) \\
&= \frac{1}{2} L_x L_y \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z \{ |\mathbf{l}|^2 - |\mathbf{k}|^2 \} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \delta_{(\mathbf{k}+\mathbf{l}), \mathbf{m}} \\
&= \frac{1}{2} L_x L_y \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z (|\mathbf{l}|^2 - |\mathbf{k}|^2) \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{l}}^* \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}, \mathbf{m}, 0}, \\
& \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}} J(\tau, \nabla^2 \tau) \\
&= \frac{1}{2} L_x L_y \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z (|\mathbf{l}|^2 - |\mathbf{k}|^2) \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{l}}^* \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}, \mathbf{m}, 0}
\end{aligned}$$

と書ける. 結局, (2.7a) の波数空間における表現は ( $m \rightarrow k, m \rightarrow l, k \rightarrow m$  と置き換えると),

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \\
 &= \sum_{l, m} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \hat{\psi}_{\mathbf{l}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{m}}^* - \hat{\tau}_{\mathbf{l}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{m}}^* \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \\
 & \quad - ik_x U |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 \{ \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \} \\
 & \quad - \nu |\mathbf{k}|^{10} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \} \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

となる.

同様に, 傾圧モードの支配方程式

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial (\nabla^2 \tau - k_d^2 \tau)}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \tau - k_d^2 \tau) + J(\tau, \nabla^2 \psi) + U \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + k_d^2 U \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{eq:clieq} \\
 & = -\kappa \nabla^2 \frac{\tau - \psi}{2} - \nu \nabla^8 (\nabla^2 \tau - k_d^2 \tau) - \frac{1}{2} \Delta \nu \nabla^8 \{ (\nabla^2 - k_d^2) \tau - \nabla^2 \psi \}
 \end{aligned}$$

を波数空間における式に直す: 時間変化項と線型項に関しては先程と同様なので, 非線型

項のみ計算過程を記す。まず, Fourier 級数展開すると,

$$\begin{aligned}
 J(\psi, \nabla^2 \tau - k_d^2 \tau) &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 \tau - k_d^2 \tau)}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (\nabla^2 \tau - k_d^2 \tau)}{\partial x} \\
 &= \left( \sum_{\mathbf{k}} ik \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right) \left( \sum_{\mathbf{l}} -in \{ |\mathbf{l}|^2 - k_d^2 \} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}} \right) \\
 &\quad - \left( \sum_{\mathbf{k}} il \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right) \left( \sum_{\mathbf{l}} -im \{ |\mathbf{l}|^2 - k_d^2 \} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}} \right) \\
 &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (kn - lm) \{ |\mathbf{l}|^2 + k_d^2 \} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}} \\
 &\quad + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (ml - nk) \{ |\mathbf{k}|^2 + k_d^2 \} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}} \\
 &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (kn - lm) \{ |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}} \\
 &\quad + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (kn - lm) k_d^2 \{ \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}} \\
 &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z \{ |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}} \\
 &\quad + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z k_d^2 \{ \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}} \\
 J(\tau, \nabla^2 \psi) &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (kn - lm) |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}} \\
 &\quad + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (ml - nk) |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}}, \\
 &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (kn - lm) \{ |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}}, \\
 &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \frac{1}{2} (\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z \{ |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}}
 \end{aligned}$$

となる。これらに  $e^{-i\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}$  を掛け,  $[0, L_x] \times [0, L_y]$  で積分し, 先ほどと同じ置き換えをす

ると,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}} J(\psi, \nabla^2 \tau - k_d^2 \tau) \\
 &= \frac{1}{2} L_x L_y \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z \{ |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}(-\mathbf{k}) \hat{\tau}(-\mathbf{l}) - |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}(-\mathbf{l}) \hat{\tau}(-\mathbf{k}) \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}, \mathbf{m}} \\
 & \quad + \frac{1}{2} L_x L_y \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z k_d^2 \{ \hat{\psi}(-\mathbf{k}) \hat{\tau}(-\mathbf{l}) - \hat{\psi}(-\mathbf{l}) \hat{\tau}(-\mathbf{k}) \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}, \mathbf{m}} \\
 &= \frac{1}{2} L_x L_y \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z \{ |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{l}}^* - |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}, \mathbf{m}, 0} \\
 & \quad + \frac{1}{2} L_x L_y \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z k_d^2 \{ \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{l}}^* - \hat{\psi}_{\mathbf{l}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}, \mathbf{m}, 0} \\
 & \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}} J(\tau, \nabla^2 \psi) \\
 &= \frac{1}{2} L_x L_y \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z \{ |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* - |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{l}}^* \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}, \mathbf{m}, 0}
 \end{aligned}$$

となる. よって, (2.7b) の波数空間における表現は ( $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}, \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{l}, \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{m}$  と置き換える  
と),

$$\begin{aligned}
 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \frac{\partial}{\partial t} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} &= \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{m}}^* - |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{m}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{l}}^* \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}, \mathbf{m}, 0} \\
 & \quad + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{m}}^* - |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{m}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{l}}^* \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}, \mathbf{m}, 0} \\
 & \quad + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 \{ \hat{\psi}_{\mathbf{l}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{m}}^* - \hat{\tau}_{\mathbf{l}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{m}}^* \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}, \mathbf{m}, 0} \quad (\text{B.4}) \\
 & \quad - ik_x U |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} + ik_x U k_d^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 \{ \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \} \\
 & \quad - \nu |\mathbf{k}|^8 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \\
 & \quad - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \}
 \end{aligned}$$

となる.

## B.2 波数空間におけるエネルギー方程式

(B.3) の両辺に  $\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^*$  を掛けると,

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \frac{\partial \hat{\psi}_{\mathbf{k}}}{\partial t} \\
 &= \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &\quad - ik_x U |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 \{ \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* (\hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}}) \} - \nu |\mathbf{k}|^{10} \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

となる. エネルギー方程式を導くために,  $\{(B.5) + (B.5)^*\} \div 2$  を計算すると,

$$\begin{aligned}
 (l.h.s.) &= \frac{1}{2} \left\{ |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \frac{\partial \hat{\psi}_{\mathbf{k}}}{\partial t} + |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \frac{\partial \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^*}{\partial t} \right\} \\
 &= |\mathbf{k}|^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2, \\
 (r.h.s.) &= \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} + \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &\quad - k_x U |\mathbf{k}|^2 \text{Im}[\hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^*] - \frac{1}{2} \kappa |\mathbf{k}|^2 \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \{ \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \}] - \nu |\mathbf{k}|^{10} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ |\mathbf{k}|^2 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 - (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}}] \}
 \end{aligned}$$

となる. ここでは,

$$\frac{f + f^*}{2} = \text{Re}(f), \quad \frac{f - f^*}{2} = \text{Im}(f) \tag{B.6}$$

を用いた. よって, 順圧モードのエネルギー方程式は,

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{k}|^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 &= \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \} \\
 &\quad + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \} \\
 &\quad - k_x U |\mathbf{k}|^2 \text{Im}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}}] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \kappa |\mathbf{k}|^2 \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \{ \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \}] - \nu |\mathbf{k}|^{10} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ |\mathbf{k}|^2 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 - (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}}] \}
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

となる.

次に, 傾圧モードのエネルギー方程式を導く: (B.4) の両辺に  $\hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*$  を掛けると,

$$\begin{aligned}
 & (|\mathbf{k}|^2 - k_d^2) \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \frac{\partial}{\partial t} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \\
 = & \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z \{ |m|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_l^* \hat{\psi}_m^* - |l|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_l^* \hat{\tau}_m^* \} \delta_{\mathbf{k}+l+m,0} \\
 & + \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z \{ |m|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_l^* \hat{\tau}_m^* - |l|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_l^* \hat{\psi}_m^* \} \delta_{\mathbf{k}+l+m,0} \\
 & + \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z k_d^2 \{ \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_l^* \hat{\tau}_m^* - \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_l^* \hat{\psi}_m^* \} \delta_{\mathbf{k}+l+m,0} \\
 & + ik_x U |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* + ik_x U k_d^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \\
 & - \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 \{ \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* - \nu |\mathbf{k}|^8 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \\
 & - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \}
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

となる. 先程と同様に  $\{ (B.8) + (B.8)^* \} \div 2$  を計算すると,

$$\begin{aligned}
 (l.h.s) &= (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2, \\
 (r.h.s) &= \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z \text{Re} \{ |m|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m - |l|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_l \hat{\tau}_m \} \delta_{\mathbf{k}+l+m,0} \\
 & + \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z \text{Re} \{ |m|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_l \hat{\tau}_m - |l|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m \} \delta_{\mathbf{k}+l+m,0} \\
 & + \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z k_d^2 \text{Re} \{ \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_l \hat{\tau}_m - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m \} \delta_{\mathbf{k}+l+m,0} \\
 & + k_x U |\mathbf{k}|^2 \text{Im} [\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] - k_x U k_d^2 \text{Im} [\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] \\
 & - \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 \text{Re} \{ \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* - \nu |\mathbf{k}|^8 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 & - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 - |\mathbf{k}|^2 \text{Re} [\hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{k}}] \}
 \end{aligned}$$

となる. よって, 傾圧モードのエネルギー方程式は

$$\begin{aligned}
 & (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 &= \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 \text{Re}[\{\hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + k_x U |\mathbf{k}|^2 \text{Im}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] - k_x U k_d^2 \text{Im}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] \\
 & \quad - \frac{\kappa}{2} |\mathbf{k}|^2 \text{Re}[\{\hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \hat{\psi}_{\mathbf{k}}\} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*] - \nu |\mathbf{k}|^8 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 & \quad - \frac{1}{2} \Delta \nu |\mathbf{k}|^8 \{ (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 - |\mathbf{k}|^2 \text{Re}[\hat{\tau}_{\mathbf{k}}^* \hat{\psi}_{\mathbf{k}}] \}
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

### B.3 エネルギー詳細保存

平均流や摩擦, 粘性がないとき,

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{k}|^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 &= \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0}
 \end{aligned} \tag{B.10a}$$

$$\begin{aligned}
 & (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \\
 &= \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \frac{1}{2} (\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 \text{Re}[\{\hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0}
 \end{aligned} \tag{B.10b}$$

の両式を足して  $\mathbf{k}$  について和を取ると保存する. これらを

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{\psi}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \{T_{\text{I}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})\} \tag{B.11a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{\tau}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \{T_{\text{I}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})\} \tag{B.11b}$$

と書くことにする.

このとき, 以下のようなエネルギー詳細保存則が成立する.

$$1. \quad T_I^\psi(k, l, m) + T_I^\psi(l, m, k) + T_I^\psi(m, k, l) = 0$$

【証明】

$$\begin{aligned} & T_I^\psi(k, l, m) + T_I^\psi(l, m, k) + T_I^\psi(m, k, l) \\ &= \frac{1}{2}(l \times m)_z \operatorname{Re}[\{|m|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m - |l|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m\}] \delta_{k+l+m,0} \\ & \quad + \frac{1}{2}(m \times k)_z \operatorname{Re}[\{|k|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m - |m|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m\}] \delta_{k+l+m,0} \\ & \quad + \frac{1}{2}(k \times l)_z \operatorname{Re}[\{|l|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m - |k|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m\}] \delta_{k+l+m,0} \end{aligned}$$

ここで,  $k = -l - m$  より

$$\begin{aligned} (m \times k)_z &= \{m \times (-l - m)\}_z = -(m \times l)_z = (l \times m)_z \\ (k \times l)_z &= \{(-l - m) \times l\}_z = -(m \times l)_z = (l \times m)_z \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} & T_I^\psi(k, l, m) + T_I^\psi(l, m, k) + T_I^\psi(m, k, l) \\ &= \frac{1}{2}(l \times m)_z \operatorname{Re}[\{|m|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m - |l|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m\}] \delta_{k+l+m,0} \\ & \quad + \frac{1}{2}(l \times m)_z \operatorname{Re}[\{|k|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m - |m|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m\}] \delta_{k+l+m,0} \\ & \quad + \frac{1}{2}(l \times m)_z \operatorname{Re}[\{|l|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m - |k|^2 \hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m\}] \delta_{k+l+m,0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. □

$$2. \quad T_I^\tau(k, l, m) + T_I^\tau(l, m, k) + T_I^\tau(m, k, l) = 0$$

【証明】

$$\begin{aligned} & T_I^\tau(k, l, m) + T_I^\tau(l, m, k) + T_I^\tau(m, k, l) \\ &= \frac{1}{2}(l \times m)_z \operatorname{Re}[\{|m|^2 \hat{\tau}_k \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m - |l|^2 \hat{\tau}_k \hat{\psi}_l \hat{\tau}_m\}] \delta_{k+l+m,0} \\ & \quad + \frac{1}{2}(m \times k)_z \operatorname{Re}[\{|k|^2 \hat{\tau}_l \hat{\tau}_m \hat{\psi}_k - |m|^2 \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m \hat{\tau}_k\}] \delta_{k+l+m,0} \\ & \quad + \frac{1}{2}(k \times l)_z \operatorname{Re}[\{|l|^2 \hat{\tau}_m \hat{\tau}_k \hat{\psi}_l - |k|^2 \hat{\tau}_m \hat{\psi}_k \hat{\tau}_l\}] \delta_{k+l+m,0} \\ &= \frac{1}{2}(l \times m)_z \operatorname{Re}[\{|m|^2 \hat{\tau}_k \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m - |l|^2 \hat{\tau}_k \hat{\psi}_l \hat{\tau}_m\} \\ & \quad + \{|k|^2 \hat{\tau}_l \hat{\tau}_m \hat{\psi}_k - |m|^2 \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m \hat{\tau}_k\} \\ & \quad + \{|l|^2 \hat{\tau}_m \hat{\tau}_k \hat{\psi}_l - |k|^2 \hat{\tau}_m \hat{\psi}_k \hat{\tau}_l\}] \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

$$3. \quad T_{III}^\tau(k, l, m) + T_{III}^\tau(l, m, k) + T_{III}^\tau(m, k, l) = 0$$

【証明】

$$\begin{aligned}
 & T_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 \text{Re}[\{\hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \times \mathbf{k})_z k_d^2 \text{Re}[\{\hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z k_d^2 \text{Re}[\{\hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 \text{Re}[\{\hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\} \\
 &\quad + \{\hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}}\} \\
 &\quad + \{\hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}}\}] \\
 &= 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

$$4. \quad T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) + T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0$$

【証明】

$$\begin{aligned}
 & T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\text{II}}^{\psi}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) + T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + T_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \times \mathbf{k})_z \text{Re}[\{|\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{m}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z \text{Re}[\{|\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \times \mathbf{k})_z \text{Re}[\{|\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z \text{Re}[\{|\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}\} \\
 &\quad + \{|\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{m}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}\} \\
 &\quad + \{|\mathbf{l}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}}\} \\
 &\quad + \{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}}\} \\
 &\quad + \{|\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}}\} \\
 &\quad + \{|\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}}\}] \\
 &= 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

#### B.4 エンストロフィー詳細保存

(B.3) の両辺に  $|\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^*$  を掛けた式とその複素共役を足して 2 で割ると, 順圧モードのエンストロフィー方程式が導かれ, (B.4) の両辺に  $(|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \hat{\tau}_{\mathbf{k}}^*$  を掛けた式とその複素共役

を足して 2 で割ると, 傾圧モードのエンストロフィー方程式が導かれる:

$$\begin{aligned}
 & |k|^4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\psi}_k|^2 \\
 = & \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z |k|^2 (|m|^2 - |l|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m] \delta_{k+l+m,0} \} \\
 & + \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z |k|^2 (|m|^2 - |l|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_k \hat{\tau}_l \hat{\tau}_m] \delta_{k+l+m,0} \} \\
 & - ik_x U |k|^4 \text{Im}\{\hat{\psi}_k^* \hat{\tau}_k\} \\
 & - \frac{1}{2} \kappa |k|^4 \text{Re}[\hat{\psi}_k^* \{\hat{\psi}_k - \hat{\tau}_k\}] - \nu |k|^{12} |\hat{\psi}_k|^2 \\
 & - \frac{1}{2} \Delta \nu |k|^{10} \{ |k|^2 |\hat{\psi}_k|^2 - (|k|^2 + k_d^2) \text{Re}[\hat{\psi}_k^* \hat{\tau}_k] \},
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
 & (|k|^2 + k_d^2)^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\tau}_k|^2 \\
 = & \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z (|k|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ |m|^2 \hat{\tau}_k \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m - |l|^2 \hat{\tau}_k \hat{\psi}_l \hat{\tau}_m \}] \delta_{k+l+m,0} \\
 & + \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z (|k|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ |m|^2 \hat{\tau}_k \hat{\psi}_l \hat{\tau}_m - |l|^2 \hat{\tau}_k \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m \}] \delta_{k+l+m,0} \\
 & + \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z k_d^2 (|k|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ \hat{\tau}_k \hat{\psi}_l \hat{\tau}_m - \hat{\tau}_k \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m \}] \delta_{k+l+m,0} \\
 & + ik_x U |k|^2 (|k|^2 + k_d^2) \text{Im}[\hat{\psi}_k \hat{\tau}_k^*] + ik_x U k_d^2 (|k|^2 + k_d^2) \text{Im}[\hat{\psi}_k \hat{\tau}_k^*] \\
 & - \frac{\kappa}{2} |k|^2 (|k|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ \hat{\tau}_k - \hat{\psi}_k \} \hat{\tau}_k^*] - \nu |k|^8 (|k|^2 + k_d^2)^2 |\hat{\tau}_k|^2 \\
 & - \frac{1}{2} \Delta \nu |k|^8 (|k|^2 + k_d^2) \{ (|k|^2 + k_d^2) |\hat{\tau}_k|^2 - |k|^2 \text{Re}[\hat{\tau}_k^* \hat{\psi}_k] \}.
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

エネルギーのときと同様に, 平均流や摩擦, 粘性が無い場合,

$$\begin{aligned}
 & |k|^4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\psi}_k|^2 \\
 = & \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z |k|^2 (|m|^2 - |l|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_k \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m] \delta_{k+l+m,0} \} \\
 & + \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z |k|^2 (|m|^2 - |l|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_k \hat{\tau}_l \hat{\tau}_m] \delta_{k+l+m,0} \},
 \end{aligned} \tag{B.14a}$$

$$\begin{aligned}
 & (|k|^2 + k_d^2)^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\tau}_k|^2 \\
 = & \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z (|k|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ |m|^2 \hat{\tau}_k \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m - |l|^2 \hat{\tau}_k \hat{\psi}_l \hat{\tau}_m \}] \delta_{k+l+m,0} \\
 & + \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z (|k|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ |m|^2 \hat{\tau}_k \hat{\psi}_l \hat{\tau}_m - |l|^2 \hat{\tau}_k \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m \}] \delta_{k+l+m,0} \\
 & + \sum_{l,m} \frac{1}{2} (l \times m)_z k_d^2 (|k|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ \hat{\tau}_k \hat{\psi}_l \hat{\tau}_m - \hat{\tau}_k \hat{\tau}_l \hat{\psi}_m \}] \delta_{k+l+m,0},
 \end{aligned} \tag{B.14b}$$

の両式を足して  $\mathbf{k}$  について足すと保存する. これらを

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Q}_\psi(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \{C_I^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{II}^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})\}, \quad (\text{B.15a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Q}_\tau(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \{C_I^\tau(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{II}^\tau(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{III}^\tau(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})\} \quad (\text{B.15b})$$

と書く. ここで,

$$\begin{aligned} C_I^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{\text{Re}[\hat{\psi}_\mathbf{k} \hat{\psi}_\mathbf{l} \hat{\psi}_\mathbf{m}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}\}, \\ C_{II}^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{\text{Re}[\hat{\psi}_\mathbf{k} \hat{\tau}_\mathbf{l} \hat{\tau}_\mathbf{m}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}\}, \\ C_I^\tau(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{k}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_\mathbf{k} \hat{\tau}_\mathbf{l} \hat{\psi}_\mathbf{m} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_\mathbf{k} \hat{\psi}_\mathbf{l} \hat{\tau}_\mathbf{m}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}, \\ C_{II}^\tau(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{k}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{|\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_\mathbf{k} \hat{\psi}_\mathbf{l} \hat{\tau}_\mathbf{m} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_\mathbf{k} \hat{\tau}_\mathbf{l} \hat{\psi}_\mathbf{m}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}, \\ C_{III}^\tau(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 (|\mathbf{k}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{\hat{\tau}_\mathbf{k} \hat{\psi}_\mathbf{l} \hat{\tau}_\mathbf{m} - \hat{\tau}_\mathbf{k} \hat{\tau}_\mathbf{l} \hat{\psi}_\mathbf{m}\}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0} \end{aligned}$$

である.

このとき, 次のエンストロフィー詳細保存則が成立する:

$$1. \quad \boxed{C_I^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_I^\psi(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + C_I^\psi(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0}$$

【証明】

$$\begin{aligned} (l.h.s) &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{\text{Re}[\hat{\psi}_\mathbf{k} \hat{\psi}_\mathbf{l} \hat{\psi}_\mathbf{m}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \times \mathbf{k})_z |\mathbf{l}|^2 (|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{m}|^2) \{\text{Re}[\hat{\psi}_\mathbf{l} \hat{\psi}_\mathbf{m} \hat{\psi}_\mathbf{k}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z |\mathbf{m}|^2 (|\mathbf{l}|^2 - |\mathbf{k}|^2) \{\text{Re}[\hat{\psi}_\mathbf{m} \hat{\psi}_\mathbf{k} \hat{\psi}_\mathbf{l}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}\} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \{\text{Re}[|\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \hat{\psi}_\mathbf{k} \hat{\psi}_\mathbf{l} \hat{\psi}_\mathbf{m} \\ &\quad + |\mathbf{l}|^2 (|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{m}|^2) \hat{\psi}_\mathbf{l} \hat{\psi}_\mathbf{m} \hat{\psi}_\mathbf{k} \\ &\quad + |\mathbf{m}|^2 (|\mathbf{l}|^2 - |\mathbf{k}|^2) \hat{\psi}_\mathbf{m} \hat{\psi}_\mathbf{k} \hat{\psi}_\mathbf{l}]\} \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

$$2. \quad \boxed{C_{II}^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{II}^\psi(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + C_{II}^\psi(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) + C_I^\tau(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_I^\tau(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + C_I^\tau(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0}$$

【証明】

$$\begin{aligned}
 & (l.h.s.) \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z |\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}}] \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \times \mathbf{k})_z |\mathbf{l}|^2 (|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{m}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}}] \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z |\mathbf{m}|^2 (|\mathbf{l}|^2 - |\mathbf{k}|^2) \{ \text{Re}[\hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}}] \} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \times \mathbf{k})_z (|\mathbf{l}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{ |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z (|\mathbf{m}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{ |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z \{ \text{Re}[|\mathbf{k}|^2 (|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{l}|^2) \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \\
 & \quad + |\mathbf{l}|^2 (|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{m}|^2) \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \\
 & \quad + |\mathbf{m}|^2 (|\mathbf{l}|^2 - |\mathbf{k}|^2) \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \\
 & \quad + |\mathbf{k}|^2 \{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \} \\
 & \quad + |\mathbf{l}|^2 \{ |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \} \\
 & \quad + |\mathbf{m}|^2 \{ |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \} \\
 & \quad + k_d^2 \{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \\
 & \quad + |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \\
 & \quad + |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \} \} \\
 &= 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

$$3. \quad \boxed{C_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + C_{\text{II}}^{\tau}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) + C_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + C_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}) + C_{\text{III}}^{\tau}(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0}$$

【証明】

$$\begin{aligned}
 & (l.h.s.) \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \times \mathbf{k})_z (|\mathbf{l}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{ |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{m}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z (|\mathbf{m}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{ |\mathbf{l}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - |\mathbf{k}|^2 \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z k_d^2 (|\mathbf{k}|^2 + k_d^2) \text{Re}[\{ \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} - \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \times \mathbf{k})_z k_d^2 (|\mathbf{l}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{ \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} - \hat{\tau}_{\mathbf{l}} \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\mathbf{k} \times \mathbf{l})_z k_d^2 (|\mathbf{m}|^2 - k_d^2) \text{Re}[\{ \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\tau}_{\mathbf{l}} - \hat{\tau}_{\mathbf{m}} \hat{\tau}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \}] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m},0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

---

## 付録 C 線型安定性解析

---

傾圧場中の線型摂動の発展について考察するために、支配方程式 (2.7a), (2.7b) の非線型項と強制・散逸の項を除いた方程式系

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \nabla^2 \tau}{\partial x} = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial (\nabla^2 - k_d^2) \tau}{\partial t} + U \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + Uk_d^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.2})$$

を用いる。この方程式系の波型の解

$$\psi = \hat{\psi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \tau = \hat{\tau} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

を仮定し, (C.1) と (C.2) にそれぞれ代入すると,

$$i\{\omega(k_x^2 + k_y^2)\hat{\psi} - Uk_x(k_x^2 + k_y^2)\hat{\tau}\} = 0, \quad (\text{C.3})$$

$$i\{-Uk_x(k_x^2 + k_y^2 - k_d^2)\hat{\psi} + \omega(k_x^2 + k_y^2 + k_d^2)\hat{\tau}\} = 0 \quad (\text{C.4})$$

となる。これを行列で表示すると,

$$i \underbrace{\begin{pmatrix} \omega(k_x^2 + k_y^2) & -Uk_x(k_x^2 + k_y^2) \\ -Uk_x(k_x^2 + k_y^2 - k_d^2) & \omega(k_x^2 + k_y^2 + k_d^2) \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\tau} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.5})$$

となる。方程式の解が自明な解とならないためには,  $M$  の逆行列が存在しない, つまり,  $\det M = 0$  である必要があるため,

$$\begin{aligned} \det M &= \omega^2(k_x^2 + k_y^2)(k_x^2 + k_y^2 + k_d^2) - U^2 k_x^2 (k_x^2 + k_y^2)(k_x^2 + k_y^2 - k_d^2) = 0, \\ \Leftrightarrow \omega^2 &= k_x^2 U^2 \frac{k_x^2 + k_y^2 - k_d^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_d^2} \end{aligned}$$

でなくてはならない。つまり, 成長率は

$$\omega = k_x U \sqrt{\frac{k_d^2 - (k_x^2 + k_y^2)}{k_x^2 + k_y^2 + k_d^2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} U \sqrt{\frac{k_d^2 - k^2}{k_d^2 + k^2}} \quad (\text{C.6})$$

となる。2つ目の等号は,  $x$  方向と  $y$  方向の切断波数が等しいとき,  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{2}k_x$  であることを用いた。この成長率は, エネルギースペクトルのピークが波数  $k$  にあるときの成長率で, 最速成長率ではない。

最速成長率は,  $\text{Im}(\omega)$  が存在し,  $k_y = 0$  のとき  $\partial\omega/\partial k_x = 0$  なる  $k_x$  のときの  $\text{Im}(\omega)$  が最速成長率である. 以下,  $k_x \rightarrow k$  と置き換えると,  $\omega^2 = k^2 U^2 \frac{k^2 - k_d^2}{k^2 + k_d^2}$  より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega^2}{\partial k} &= 2\omega \frac{\partial\omega}{\partial k}, \\ \frac{\partial}{\partial k} &= \frac{\partial k^2}{\partial k} \frac{\partial}{\partial k^2} = 2k \frac{\partial}{\partial k^2}, \\ \frac{\partial\omega^2}{\partial k^2} &= \frac{1}{2k} \frac{\partial\omega^2}{\partial k} = \frac{\omega}{k} \frac{\partial\omega}{\partial k}, \\ \frac{\partial\omega^2}{\partial k^2} &= \frac{\{U^2(k^2 - k_d^2) + k^2 U^2\} \{k^2 + k_d^2\} - k^2 U^2 (k^2 - k_d^2)}{k^2 + k_d^2}\end{aligned}$$

の計算から,  $\partial\omega^2/\partial k^2 = 0$  ならば,

$$\begin{aligned}k^2 &= \frac{-2k_d^2 \pm \sqrt{4k_d^4 + 4k_d^4}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} k_d^2 \\ &= (-1 \pm \sqrt{2}) k_d^2\end{aligned}$$

となる.  $k^2 > 0$  より,  $k^2 = (\sqrt{2} - 1)k_d^2$ , つまり,  $k = 0.64k_d$  となる. これより,

$$\begin{aligned}\omega^2 &= (\sqrt{2} - 1)k_d^2 U^2 \frac{(\sqrt{2} - 1 - 1)k_d^2}{(\sqrt{2} - 1 + 1)k_d^2} \\ &= -\frac{(\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} k_d^2 U^2 \\ &= -(\sqrt{2} - 1)^2 U^2 k_d^2\end{aligned}$$

なので, 最速成長率は

$$\text{Im}(\omega) = (\sqrt{2} - 1) U k_d \quad (\text{C.7})$$

である.

実際に, 第 5 章で述べた初期のエネルギー成長率を計算する. 流線函数  $\psi$  は  $\psi \propto \exp(\text{Im}(\omega)t)$  より, エネルギー  $E$  は  $E \propto \exp(2\text{Im}(\omega)t)$  であるから, エネルギーの成長率  $\alpha$  は  $\alpha = 2\text{Im}(\omega)$  となる. エネルギースペクトルのピークが波数  $\sqrt{2}$  にあるときの成長率  $\omega_{k=\sqrt{2}}$  は (C.7) に  $U = 2.5 \times 10^{-2}$ ,  $k = \sqrt{2}$  を代入すると,

$$\begin{aligned}\omega_{k=\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} 2.5 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{10^2 - (\sqrt{2})^2}{10^2 + (\sqrt{2})^2}} \\ &\approx 0.0245\end{aligned}$$

となるので, エネルギーの成長率は,

$$\alpha_{k=\sqrt{2}} = 2\omega = 0.049$$

---

となる。また、最速成長率は、(C.7) に  $k_d = 10$ ,  $U = 2.5 \times 10^{-2}$  を代入して、

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\omega) &= (\sqrt{2} - 1) \times 2.5 \times 10^{-2} \times 10 \\ &\approx 0.41 \times 2.5 \times 10^{-2} \times 10 \\ &= 0.1025\end{aligned}$$

となるので、エネルギーの最速成長率  $\alpha_{\max}$  は  $\alpha_{\max} = 2 \operatorname{Im}(\omega) = 0.205$  となる。



---

## 付録 D 次元解析によるエネルギー散逸波数と エンストロフィー散逸波数の導出

---

時間と水平方向の長さの典型的なスケールをそれぞれ  $T, L$  とすると, 粘性によるエネルギー散逸率  $\varepsilon$  とエンストロフィー散逸率  $\eta$  はそれぞれ

$$\varepsilon \sim \frac{L^2}{T^3}, \eta \sim \frac{1}{T^3}$$

とスケールされる. また, 粘性係数は渦度方程式  $\partial q / \partial t = \dots - \nu(\nabla^2)^4 q$  より

$$\nu \sim \frac{L^8}{T}$$

とスケールされる. ここで,  $\varepsilon$  と  $\nu$  を用いて  $L$  を表すと,

$$\frac{\nu}{\varepsilon^{1/3}} = L^{8-2} = L^6 \Leftrightarrow L = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/22}$$

となる. エネルギー散逸波数  $k_{\text{diss}}^{\varepsilon}$  の次元は,  $k_{\text{diss}}^{\varepsilon} \sim 1/L$  であるから,

$$k_{\text{diss}}^{\varepsilon} \sim \left( \frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{1/22} \quad (\text{D.1})$$

となる. 同様に,  $\eta$  と  $\nu$  で  $L$  を表すと,

$$\frac{\nu}{\eta^{1/3}} = L^8 \Leftrightarrow L = \left( \frac{\nu}{\eta^{1/3}} \right)^{1/8}$$

となる. よって, エンストロフィー散逸波数  $k_{\text{diss}}^{\eta}$  は,

$$k_{\text{diss}}^{\eta} \sim \left( \frac{\eta^{1/3}}{\nu} \right)^{1/8} = \left( \frac{\eta}{\nu^3} \right)^{1/24} \quad (\text{D.2})$$

となる.



## 参考文献

- [1] Burgess, B. H., A. R. Erler, and T. G. Shepherd, 2013: The troposphere-to-stratosphere transition in kinetic energy spectra and nonlinear spectral fluxes as seen in ECMWF analyses. *J. Atmos. Sci.*, **70**, 669-687.
- [2] Boer, G. J., T. G. Shepherd, 1983: Large-scale two-dimensional turbulence in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 164-184.
- [3] Fang, X. and Y-H. Kuo, 2015: A new generic method for quantifying the scale predictability of the fractal atmosphere: Applications to model verification. *J. Atmos. Sci.*, **72**, 1667-1688.
- [4] Gkioulekas, E., 2014: Energy and potential enstrophy flux constraints in quasi-geostrophic models, *Physica D*, **284**, 27-41.
- [5] Gkioulekas, E. and K. K. Tung, 2007: A new proof on net upscale energy cascade in 2D and QG turbulence. *J. Fluid Mech.*, **576**, 173-189.
- [6] Hamilton, K., Y. O. Takahashi, and W. Ohfuchi, 2008: Mesoscale spectrum of atmospheric motions investigated in a very fine resolution global general circulation model. *J. Geophys. Res.*, **113**, D18110, doi:10.1029/2008JD009785.
- [7] Koshyk, J. N. and K. Hamilton, 2001: The horizontal kinetic energy spectrum and spectral budget simulated by a high-resolution tropospherestratospheremesosphere GCM. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 329-348.
- [8] Kraichnan, R., 1967: Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **10**, 1417-1423.
- [9] Larichev, V. D. and I. M. Held, 1995: Eddy amplitudes and fluxes in a homogeneous model of fully developed baroclinic instability. *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2285-2297.
- [10] Lilly, D. K., 1983: Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **40**, 749-761.
- [11] Nastrom, G. D. and K. S. Gage, 1985: A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 950-960.
- [12] Terasaki, K., H. L. Tanaka, and N. Zagar, 2011: Energy spectra of Rossby and gravity waves. *SOLA*, **7**, 25-28.
- [13] Tung, K. K. and W. W. Orlando, 2003: The  $k^{-3}$  and  $k^{-5/3}$  Energy spectrum of atmospheric turbulence. quasi-geostrophic two-level model simulation. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 824-835.

- [14] Vallis, G. K., 2006: *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*, Cambridge University Press.