球面調和函数変換 (SJPACK,w_module_sjpack)

竹広真一

平成 21 年 9 月 5 日

この文書は, ISPACK/SJPACK とそのラッパー w_module_sjpack を用いる上で必要となる球面調和関数変換の基本的な定式化を行う.

1 球面調和函数変換

東西切断波数 M 全波数切断 N の球面調和函数逆変換は次のように表される.

$$g(\lambda,\mu) = \sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=0}^{N} s_n^m P_n^m(\mu)\exp(im\lambda) \tag{1}$$

ここで λ は経度, $\mu = sin\varphi$ は sin 緯度である. $P_n^m(\mu)$ はルジャンドル陪函数であり, ISPACK では 2 に正規化されたものを用いている.

$$P_n^m(\mu) = \sqrt{(2n+1)\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)}}\frac{1}{2^n n!}(1-\mu^2)^{|m|/2}\frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}}(\mu^2-1)^n, \quad \int_{-1}^{1}\{P_n^m(\mu)\}^2 d\mu = 2. \tag{2}$$

$g(\lambda,\mu)$ が実数であることから s_n^m は

$$s_n^{-m} = \{s_n^m\}^* \tag{3}$$

の関係を満たしている[1].

[1] $\sum_{m=-n}^{n} s_n^m e^{im\lambda}$ を展開して $\cos(m\lambda)$, $\sin(m\lambda)$ の項を取りだすと

$$s_n^m e^{im\lambda} + s_n^{-m}e^{-im\lambda} = Re[s_n^m]\cos(m\lambda) + iRe[s_n^m]\sin(m\lambda) + iIm[s_n^m]\cos(m\lambda) - Im[s_n^m]\sin(m\lambda)$$

2 ルジャンドル陪函数

補間の際必要となるルジャンドル陪函数の性質を記しておく. 2 で正規化されているため通常のルジャンドル陪函数と性質が変わることに注意されたい. 通常のルジャンドル陪函数を $\tilde{P}_n^m$, 2 で正規化されたルジャンドル陪函数を P_n^m と表すと

$$\tilde{P}_n^m(\mu) = (-i)^m \sqrt{\frac{1}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}} P_n^m(\mu) \tag{4}$$

である[2]. 通常のルジャンドル函数の性質として,

$$\tilde{P}_m^m(\mu) = (-1)^m (2m-1)!!(1-\mu^2)^{m/2}, \quad \tilde{P}_{m+1}^m(\mu) = \mu(2m+1)\tilde{P}_m^m. \tag{5}$$

三項漸化式

$$\tilde{P}_{n+1}^m(\mu) = \frac{2n+1}{n-m+1}\mu\tilde{P}_n^m(\mu) - \frac{n+m}{n-m+1}\tilde{P}_{n-1}^m(\mu). \tag{6}$$

低次のルジャンドル陪函数

$$\tilde{P}_1^0(\mu) = \mu, \quad \tilde{P}_1^1(\mu) = -\sqrt{1-\mu^2}, \tag{7}$$

$$\tilde{P}_2^0(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2-1), \quad \tilde{P}_2^1(\mu) = -3\mu\sqrt{1-\mu^2}, \quad \tilde{P}_2^2(\mu) = 3(1-\mu^2). \tag{8}$$

積分

$$\int_{-1}^1 \{\tilde{P}_n^m(\mu)\}^2 d\mu = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{9}$$

2 で正規化されたルジャンドル陪函数に書き換えると, m, m+1 次のルジャンドル陪函数は[3],

$$P_m^m(\mu) = \frac{\sqrt{(2m+1)!}}{2^m m!}(1-\mu^2)^{m/2}. \tag{10}$$

$$P_{m+1}^m(\mu) = \mu\sqrt{2m+3}P_m^m(\mu). \tag{11}$$

$$\begin{aligned} & +Re[s_n^{-m}]\cos(m\lambda) - iRe[s_n^{-m}]\sin(m\lambda) + iIm[s_n^{-m}]\cos(m\lambda) + Im[s_n^{-m}]\sin(m\lambda) \\ = \; & (Re[s_n^m] + Re[s_n^{-m}])\cos(m\lambda) + (-Im[s_n^m] + Im[s_n^{-m}])\sin(m\lambda) \\ & +i(Im[s_n^m] + Im[s_n^{-m}])\cos(m\lambda) + i(Re[s_n^m] - Re[s_n^{-m}])\sin(m\lambda). \end{aligned}$$

虚数部が 0 になる条件から $Re[s_n^m] = Re[s_n^{-m}], Im[s_n^m] = -Im[s_n^{-m}]$, すなわち $s_n^{-m} = \{s_n^m\}^*$ である.

[2] ISPACK で用いているルジャンドル陪函数は符号の定義も違っていることに注意されたい

[3]

$$\begin{aligned} \tilde{P}_m^m(\mu) &= (-1)^m\sqrt{\frac{(2m)!}{2m+1}}P_m^m(\mu) = (-1)^m(2m-1)!!(1-\mu^2)^{m/2}, \\ P_m^m(\mu) &= \sqrt{\frac{2m+1}{(2m)!}}(2m-1)!!(1-\mu^2)^{m/2} = \sqrt{\frac{2m+1}{(2m)!}}\frac{(2m)!}{2^m m!}(1-\mu^2)^{m/2} \\ &= \frac{\sqrt{(2m+1)(2m)!}}{2^m m!}(1-\mu^2)^{m/2}, \end{aligned}$$

三項漸化式は[4]

$$P_{n+1}^m(\mu) = \sqrt{\frac{(2n+3)(2n+1)}{(n-m+1)(n+m+1)}}\mu P_n^m(\mu) - \sqrt{\frac{(2n+3)(n+m)(n-m)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m+1)}}P_{n-1}^m(\mu). \tag{12}$$

低次のルジャンドル陪函数は

$$P_1^0(\mu) = \sqrt{3}\mu, \quad P_1^1(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\mu^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1-\mu^2}, \tag{13}$$

$$P_2^0(\mu) = \frac{\sqrt{5}}{2}(3\mu^2-1), \quad P_2^1(\mu) = \sqrt{\frac{5}{6}}3\mu\sqrt{1-\mu^2}, \quad = \sqrt{\frac{30}{2}}\mu\sqrt{1-\mu^2}, \tag{14}$$

$$P_2^2(\mu) = \sqrt{\frac{5}{24}}3(1-\mu^2) = \frac{\sqrt{120}}{24}3(1-\mu^2) = \frac{\sqrt{30}}{4}(1-\mu^2). \tag{15}$$

積分

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^m(\mu)\}^2 d\mu = 2. \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{(2m+1)!}}{2^m m!}(1-\mu^2)^{m/2}. \\
\tilde{P}_{m+1}^m(\mu) &= \sqrt{\frac{(2m+1)!}{2m+3}}P_{m+1}^m(\mu) = \mu(2m+1)\tilde{P}_m^m = \mu(2m+1)\sqrt{\frac{(2m)!}{2m+1}}P_m^m(\mu), \\
P_{m+1}^m(\mu) &= \mu(2m+1)\sqrt{\frac{(2m)!}{2m+1}\frac{2m+3}{(2m+1)!}}P_m^m(\mu) = \mu(2m+1)\sqrt{\frac{2m+3}{(2m+1)^2}}P_m^m(\mu) \\
&= \mu\sqrt{2m+3}P_m^m(\mu).
\end{aligned}$$

[4]

$$\sqrt{\frac{1}{2n+3}\frac{(n+m+1)!}{(n-m+1)!}}P_{n+1}^m(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}}\frac{2n+1}{n-m+1}\mu P_n^m(\mu)$$
$$-\sqrt{\frac{1}{2n-1}\frac{(n+m-1)!}{(n-m-1)!}}\frac{n+m}{n-m+1}P_{n-1}^m(\mu),$$
$$P_{n+1}^m(\mu) = \sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}\frac{(n-m+1)!}{(n+m+1)!}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}}\frac{2n+1}{n-m+1}\mu P_n^m(\mu)$$
$$-\sqrt{\frac{2n+3}{2n-1}\frac{(n-m+1)!}{(n+m+1)!}\frac{(n+m-1)!}{(n-m-1)!}}\frac{n+m}{n-m+1}P_{n-1}^m(\mu),$$
$$= \sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}\frac{n-m+1}{n+m+1}}\frac{2n+1}{n-m+1}\mu P_n^m(\mu) - \sqrt{\frac{2n+3}{2n-1}\frac{(n-m+1)(n-m)}{(n+m+1)(n+m)}}\frac{n+m}{n-m+1}P_{n-1}^m(\mu),$$
$$= \sqrt{\frac{(2n+3)(2n+1)}{(n-m+1)(n+m+1)}}\mu P_n^m(\mu) - \sqrt{\frac{(2n+3)(n+m)(n-m)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m+1)}}P_{n-1}^m(\mu).$$

3 補間の計算

今, 関数 $g(\lambda,\mu)$ の球面調和関数変換 s_n^m が与えられたとき任意の点 (λ,μ) における関数の値を Clenshow's Recurrence Formula [5] を用いて計算する.

[5] Clenshow's Recurrence Formula:
関数 $f(x)$ がとある関数系 $F_k(x)$ で

$$f(x) = \sum_0^N c_k F_k(x)$$

と表されているとする. さらに関数系が次の漸化式

$$F_{n+1}(x) = \alpha(n,x)F_n(x) + \beta(n,x)F_{n-1}(x)$$

を満たしているとする. このとき漸化式

$$y_{N+2} = y_{N+1} = 0, \quad y_k = \alpha(k,x)y_{k+1} + \beta(k+1,x)y_{k+2} + c_k$$

で定義される量 $y_k, (k = N, N-1, \ldots, m)$ を用いると $f(x)$ を求めるための関数系の和は

$$f(x) = \beta(m+1,x)F_m(x)y_{m+2} + F_{m+1}(x)y_{m+1} + F_m(x)c_m$$

と計算することができる.

☆「証明」
y_k に関する漸化式を c_k について解き, $f(x)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_0^N c_k F_k(x) \\
&= y_N F_N(x) \\
&\quad +[y_{N-1} - \alpha(N-1,x)y_N]F_{N-1}(x) \\
&\quad +[y_{N-2} - \alpha(N-2,x)y_{N-1} - \beta(N-1,x)y_N]F_{N-2}(x) \\
&\quad +[y_{N-3} - \alpha(N-3,x)y_{N-2} - \beta(N-2,x)y_{N-1}]F_{N-3}(x) \\
&\quad \ldots \\
&\quad +[y_{m+2} - \alpha(m+2,x)y_{m+3} - \beta(m+3,x)y_{m+4}]F_{m+2}(x) \\
&\quad +[y_{m+1} - \alpha(m+1,x)y_{m+2} - \beta(m+2,x)y_{m+3}]F_{m+1}(x) \\
&\quad +[c_m + \beta(m+1,x)y_{m+2} - \beta(m+1,x)y_{m+2}]F_m(x)
\end{aligned}$$

最後の項だけ c_0 のまま残し, $\beta(1,x)y_2$ をわざと足し引きしている. 各 y_k について整理すると

$$\begin{aligned}
f(x) &= y_N[F_N - \alpha(N-1,x)F_{N-1} - \beta(N-1,x)F_{N-2}] \\
&\quad +y_{N-1}[F_{N-1} - \alpha(N-2,x)F_{N-2} - \beta(N-2,x)F_{N-3}] \\
&\quad \ldots \\
&\quad +y_{m+2}[F_{m+2} - \alpha(m+1,x)F_{m+1} - \beta(m+1,x)F_m] \\
&\quad +y_{m+1}F_{m+1} + c_m F_m + \beta(m+1,x)y_{m+2}F_m
\end{aligned}$$

$F_k(x)$ の漸化式より $k = N, N-1, \ldots, 2$ まではキャンセルし, 残りの項は最後の行だけになる. したがって

$$f(x) = \beta(m+1,x)y_{m+2}F_m + y_{m+1}F_{m+1} + c_m F_m$$

三角波数切断の場合 $M=N$ を考えて,

$$
\begin{aligned}
g(\lambda,\mu) &= \sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=0}^{M} s_n^m P_n^m(\mu)\exp(im\lambda)\\
&= \sum_{n=0}^{M} s_n^0 P_n^0(\mu) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=0}^{M}(s_n^m P_n^m(\mu)\exp(im\lambda) + s_n^{-m}P_n^m(\mu)\exp(-im\lambda))\\
&= \sum_{n=0}^{M} s_n^0 P_n^0(\mu) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=|m|}^{M}(Re[s_n^m]P_n^m(\mu)\cos(m\lambda) - Im[s_n^m]P_n^m(\mu)\sin(m\lambda))\\
&\quad +(Re[s_n^{-m}]P_n^m(\mu)\cos(m\lambda) + Im[s_n^{-m}]P_n^m(\mu)\sin(m\lambda))\\
&\quad +i(Im[s_n^m]P_n^m(\mu)\cos(m\lambda) + Re[s_n^m]P_n^m(\mu)\sin(m\lambda))\\
&\quad +i(Im[s_n^{-m}]P_n^m(\mu)\cos(m\lambda) - Re[s_n^{-m}]P_n^m(\mu)\sin(m\lambda))\\
&= \sum_{n=0}^{M} s_n^0 P_n^0(\mu) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=|m|}^{M}(Re[s_n^m]P_n^m(\mu)\cos(m\lambda) - Im[s_n^m]P_n^m(\mu)\sin(m\lambda))\\
&\quad +(Re[s_n^m]P_n^m(\mu)\cos(m\lambda) - Im[s_n^m]P_n^m(\mu)\sin(m\lambda))\\
&\quad +i(Im[s_n^m]P_n^m(\mu)\cos(m\lambda) + Re[s_n^m]P_n^m(\mu)\sin(m\lambda))\\
&\quad +i(-Im[s_n^m]P_n^m(\mu)\cos(m\lambda) - Re[s_n^m]P_n^m(\mu)\sin(m\lambda))\\
&= \sum_{n=0}^{M} s_n^0 P_n^0(\mu) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=|m|}^{M}(2Re[s_n^m]P_n^m(\mu)\cos(m\lambda) - 2Im[s_n^m]P_n^m(\mu)\sin(m\lambda))
\end{aligned}
\tag{17}
$$

ただしスペクトル係数の関係式 $(s_n^- m)^* = s_n^m$ より $Re[s_n^{-m}] = Re[s_n^m], Im[s_n^{-m}] = -Im[s_n^m]$ を用いた. n についての和は Clenshow's Recurrence Formula で計算できる. 漸化式から

$$
\alpha(n,m,x) = \sqrt{\frac{(2n+3)(2n+1)}{(n-m+1)(n+m+1)}}x, \quad \beta(n,m) = -\sqrt{\frac{(2n+3)(n+m)(n-m)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m+1)}}
$$

とおいて, $f_m(\mu) = \sum_{n=m}^{M} a_n^m P_n^m(\mu)$ は

$$
\begin{aligned}
&y_{K+2} = y_{K+1} = 0,\\
&y_k = \alpha(k,m,\mu)y_{k+1} + \beta(k+1,m)y_{k+2} + a_k^m, \quad (k = K, K-1, \ldots, m+1) \qquad (18)\\
&f_m(\mu) = \beta(m+1,m)y_{m+2}P_m^m(\mu) + P_{m+1}^m(\mu)y_{m+1} + a_m^m P_m^m(\mu)\\
&= \beta(m+1,m)y_{m+2}P_m^m(\mu) + \mu\sqrt{2m+3}P_m^m(\mu)y_{m+1} + a_m^m P_m^m(\mu)\\
&= \left[a_m^m + \beta(m+1,m)y_{m+2} + \mu\sqrt{2m+3}y_{m+1}\right]P_m^m(\mu).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ただし $P_m^m(\mu) = \dfrac{\sqrt{(2m+1)!}}{2^m m!}(1-\mu^2)^{m/2}$ と計算することができる. $\sum_{n=m}^{M} b_n^m P_n^m(\mu)$ の和も同様に計算できる. $\sum_{n=0}^{M} a_n^0 P_n^0(\mu)$ の場合は $f_0(\mu) = \sum_{n=0}^{M} a_n^0 P_n^0(\mu)$ は

$$
y_{K+2} = y_{K+1} = 0,
$$

$$y_k = \alpha(k,0,\mu)y_{k+1} + \beta(k+1,0)y_{k+2} + a_k^0, \quad (k = K, K-1, \ldots, 1), \qquad (20)$$
$$f_0(\mu) = \beta(1,0)y_2 P_m^m(\mu) + P_1^0(\mu)y_1 + a_0^0 P_0^0(\mu) = \beta(1,0)y_2 + \sqrt{3}\mu y_1 + a_0^0 \qquad (21)$$

4　エネルギー・エンストロフィースペクトルの計算

今, 流線関数 $\psi(\lambda,\varphi)$ の球面調和函数展開係数 s_n^m が与えられたとき全エネルギー E 次のように計算される.

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2\right]\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{2\pi}\left[\psi\cos\varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} d\lambda - \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\cos\varphi d\varphi d\lambda\right. \\
&\quad \left. + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\psi}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)\right]_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi - \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\psi}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\cos\varphi d\varphi d\lambda\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\psi\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right]\cos\varphi d\varphi d\lambda\right. \\
&\quad \left. - \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\cos\varphi d\varphi d\lambda\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi\left[\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\psi}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right]\cos\varphi d\varphi d\lambda\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi\nabla^2\psi\cos\varphi d\varphi d\lambda. \qquad (22)
\end{aligned}$$

ここで, 球面調和函数展開係数を用いると

$$\psi = \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} s_n^m P_n^m(\sin\varphi)\exp(im\lambda) \qquad (23)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
E &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi\nabla^2\psi\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} s_n^m P_n^m(\sin\varphi)\exp(im\lambda)\right] \\
&\quad \left[\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=-n'}^{n'} n'(n'+1)s_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\sin\varphi)\exp(im'\lambda)\right]\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=-n'}^{n'}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& n'(n'+1)s_{n'}^{m'}s_n^m P_n^m(\sin\varphi)P_{n'}^{m'}(\sin\varphi)\exp(im'\lambda)\exp(im\lambda)\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
= & \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=-n'}^{n'} \\
& n'(n'+1)s_{n'}^{m'}s_n^m P_n^m(\sin\varphi)P_{n'}^{m'}(\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi \delta_{m,-m'}2\pi \\
= & \pi\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{M} n'(n'+1)s_{n'}^{-m}s_n^m\int_{-\pi/2}^{\pi/2}P_n^m(\sin\varphi)P_{n'}^{-m}(\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi \\
= & \pi\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{M} n'(n'+1)s_{n'}^{-m}s_n^m 2\delta_{n,n'} \\
= & 2\pi\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n(n+1)s_n^{-m}s_n^m \\
= & 2\pi\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n(n+1)(s_n^m)^* s_n^m \\
= & 2\pi\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n(n+1)|s_n^m|^2 \qquad (24) \\
= & 4\pi\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n(n+1)(Re[s_n^m]^2+Im[s_n^m]^2) \qquad (25) \\
= & 4\pi\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n(n+1)|s_n^m|^2. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

途中, 元の関数が実数であることからでてくる $s_n^{-m}=(s_n^m)^*$ を用いた. これより全エネルギーを (n,m) 各成分にわけることができて, $\frac{1}{2}n(n+1)|s_n^m|^2$ をエネルギースペクトルの (n,m) 成分という. また m について和をとった各成分 $\frac{1}{2}\sum_{m=-n}^{n}n(n+1)|s_n^m|^2$ をエネルギースペクトルの n 成分と呼ぶ.

同じような計算を全エンストロフィーにも行うことができる.

$$
\begin{aligned}
Q = & \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\nabla^2\psi)^2\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
= & \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n(n+1)s_n^m P_n^m(\sin\varphi)\exp(im\lambda)\right] \\
& \left[\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=-n'}^{n'} n'(n'+1)s_{n'}^{m'}P_{n'}^{m'}(\sin\varphi)\exp(im'\lambda)\right]\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
= & \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=-n'}^{n'} \\
& n(n+1)n'(n'+1)s_{n'}^{m'}s_n^m P_n^m(\sin\varphi)P_{n'}^{m'}(\sin\varphi)\exp(im'\lambda)\exp(im\lambda)\cos\varphi d\varphi d\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=-n'}^{n'} \\
&\quad n(n+1)n'(n'+1)s_{n'}^{m'}s_n^m P_n^m(\sin\varphi)P_{n'}^{m'}(\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi\delta_{m,-m'}2\pi \\
&= \pi\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{M} n(n+1)n'(n'+1)s_{n'}^{-m}s_n^m\int_{-\pi/2}^{\pi/2}P_n^m(\sin\varphi)P_{n'}^{-m}(\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi \\
&= \pi\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{M} n(n+1)n'(n'+1)s_{n'}^{-m}s_n^m 2\delta_{n,n'} \\
&= 2\pi\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n^2(n+1)^2 s_n^{-m}s_n^m \\
&= 2\pi\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n^2(n+1)^2 (s_n^m)^* s_n^m \\
&= 2\pi\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n^2(n+1)^2 |s_n^m|^2 \qquad (27) \\
&= 4\pi\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n^2(n+1)^2 (Re[s_n^m]^2 + Im[s_n^m]^2) \qquad (28) \\
&= 4\pi\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n^2(n+1)^2 |s_n^m|^2. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

これより全エンストロフィーを (n,m) 各成分にわけることができて，$\frac{1}{2}n^2(n+1)^2|s_n^m|^2$ をエンストロフィースペクトルの (n,m) 成分と呼ぶ. また，$\frac{1}{2}\sum_{m=-n}^{n} n^2(n+1)^2|s_n^m|^2$ エンストロフィースペクトルの n 成分と呼ぶ.