

4.3 ポテンシャル渦度

理想気体の状態方程式 (1.17) を^{*1}用いると、温位の定義 (2.44) は^{*2}等 θ 面に対して、圧力と密度の間の単一な関係で表現することができる。すなわち、

$$\rho = p^{C_v/C_p} (R\theta)^{-1} (p_s)^{R/C_p}$$

である。したがって、等エントロピー面上で、密度は圧力のみ関数となり、循環定理 (4.3) における^{*3}ソレノイド項はゼロとなる。

$$\oint \frac{dp}{\rho} \propto \oint dp^{(1-C_v/C_p)} = 0.$$

したがって、断熱した流れに対して、等 θ 面上での流体パーセルの閉じた鎖に対する計算された循環は、順圧流体におけるものと同じ形に帰着される。すなわち、ケルビンの循環定理を満たす。それは

$$\frac{D}{Dt} (C + 2\Omega \delta A \sin \phi) = 0 \quad (4.10)$$

で表現される。ここで、 C は等エントロピー面上での面積 δA を包む閉曲線である。もし、等エントロピー面が近似的に水平であり、(4.8) から^{*4} $C \approx \zeta \delta A$ であることを思い出すと、大気の無限小パーセルに対して、(4.10) は

$$\delta A (\zeta_\theta + f) = \text{Const} \quad (4.11)$$

ということを表している。ここで、 ζ_θ は等エントロピー面上で評価される相対渦度の鉛直成分を表し、 $f = 2\Omega \sin \phi$ はコリオリパラメータを表す。

(4.11) のパーセルは θ_0 と $\theta_0 + \delta\theta$ の等温位面の間で制限されている。これは、図 4.7 で示されるように、 $-\delta p$ の圧力間隔で分割されている。パーセルの質量 $\delta M = (-\delta p/g)\delta A$ は運動とともに保存する。ゆえに、

$$\delta A = -\frac{\delta M g}{\delta p} = \left(-\frac{\delta\theta}{\delta p}\right) \left(\frac{\delta M g}{\delta\theta}\right) = \text{Const} \times g \left(-\frac{\delta\theta}{\delta p}\right)$$

^{*1} (再掲)

$$p\alpha = RT, \text{ あるいは, } p = \rho RT \quad (1.17)$$

^{*2} (再掲)

$$\theta = T(p_s/p)^{R/c_p} \quad (2.44)$$

^{*3} (再掲)

$$\frac{DC_a}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint \mathbf{U}_a \cdot d\mathbf{l} = -\oint \rho^{-1} dp \quad (4.3)$$

^{*4} (再掲)

$$\zeta \equiv \lim_{A \rightarrow 0} \left(\oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \right) A^{-1} \quad (4.8)$$

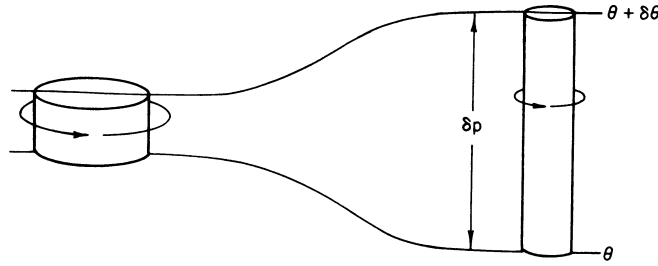


図 4.7: ポテンシャル渦度を保存しながら、断熱的に移動する大気の円筒柱。

となるので、 δM , $\delta\theta$ のいずれも一定となる。 δA を消去するため、(4.11) に代入し、 $\delta p \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$P \equiv (\zeta + f) \left(-g \frac{\partial\theta}{\partial p} \right) = \text{Const} \quad (4.12)$$

を得る。 P [単位: $\text{K kg}^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$] はエルテルのポテンシャル渦度の等エントロピー座標系での形である^{*5}。それは、その値が北半球で普通正となるように負号つきで定義される。

(4.12) によると、ポテンシャル渦度は断熱で摩擦のない流れにおいて運動とともに保存される。用語ポテンシャル渦度は、のちに示すように、いくつかの別の数学的表現と関連して用いられる。しかし基本的に、ポテンシャル渦度はある意味で、つねに渦の有効的な深さに対する絶対渦度の比の尺度となっている。例えば、(4.12) において、有効的な深さは圧力の単位 ($-\partial\theta/\partial p$) で測られる等温位面の間の距離にちょうど等しい。

一様な非圧縮流体において、ポテンシャル渦度の保存はより簡単な形式をとる。この場合、密度が一定であるので、水平領域は流体パーセルの深さ h に反比例しなければならない。すなわち、

$$\delta A = M(\rho h)^{-1} = \text{Const}/h$$

となる。ここで、 h はパーセルの深さである。(4.11) において δA を消去するために、これを代入すると、

$$(\zeta + f)/h = \eta/h = \text{Const} \quad (4.13)$$

が得られる。ここで、 ζ は一定の高度で評価される。

もし、深さ h が一定であるなら、(4.13) は絶対渦度が運動とともに保存されることを述べている。運動にしたがう絶対渦度の保存は、簡単な例で示されるように、流れについて強い強制となる。ある点 (x_0, y_0) での流れが東西方向であり、相対渦度がゼロ、すなわち、 $\eta(x_0, y_0) = f_0$ であると仮定する。すると、もし絶対渦度が保存されているなら、 (x_0, y_0) を通過するパーセルの流跡線に沿った任意の点での運動は $\zeta + f = f_0$ を満たさ

^{*5} (原文脚注) ドイツの気象学者 Hans Ertel にちなんで名づけられた。エルテルのポテンシャル渦度のさらに一般的な表式はたとえば Gill (1982) で議論されている。ポテンシャル渦度はしばしば、PVU という単位で表される。1 PVU = $10^{-6} \text{ K kg}^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 。

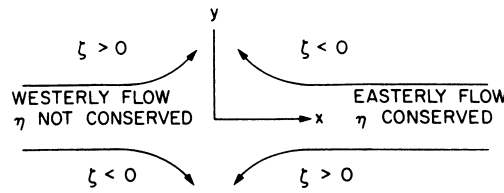


図 4.8: 曲げられる流れの流跡線に対する絶対渦度の保存。

なければならない。なぜなら、 f は北に向かうとともに増加するので、下流に向かうとともに北に曲がる流跡線は $\zeta = f_0 - f < 0$ でなければならない。一方、南に曲がる流跡線は $\zeta = f_0 - f > 0$ でなければならない。しかし、図 4.8 に示されるように、もし流れが西からのものであれば、下流に向かって北に曲がる流れは $\zeta > 0$ を意味し、南に曲がる流れは $\zeta < 0$ を意味する。ゆえに、西からの平均流は絶対渦度が運動とともに保存しているとすると、純粹に東西方向のまま保たなければならない。東からの流れも図 4.8 に示されるように西からの流れと反対となる。北と南に曲がる流れはそれぞれ負の相対渦度と正の相対渦度に関連している。したがって、東からの流れは北あるいは南に曲げられうるが、それでも絶対渦度は保存される。

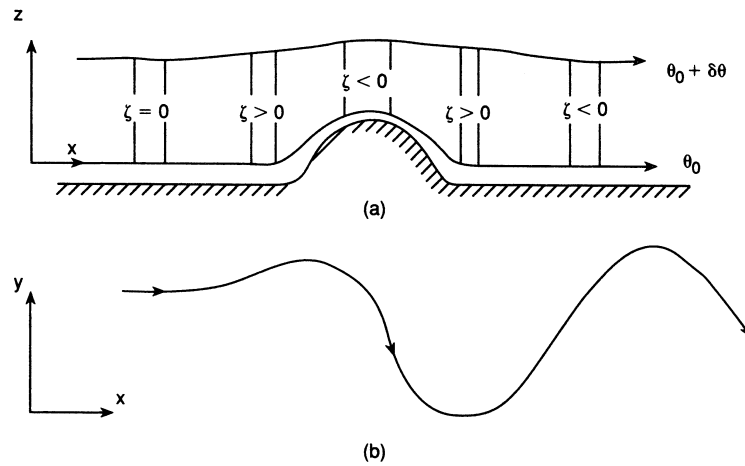


図 4.9: 地形による障害物を越える西からの流れの系統的な図: (a) x の関数となっている流体柱の深さ, (b) (x, y) 平面におけるパーセルの流跡線。

流体の深さが運動とともに変化するとき、ポテンシャル渦度は保存される。しかし、再び (4.13) は東西方向の流れが異なった振り舞いを示すということを表している。図 4.9 は無限に長い地形の障害物にぶつかる西からの流れについての状況を示している。図 4.9a において流れの鉛直断面を示す。山の上流での流れは $\zeta = 0$ となるような一様な東西流とする。もし、流れが断熱であれば、 θ_0 と $\theta_0 + \delta\theta$ の等温位面の間にはさまれた深さ h の大気各柱は、その柱が山を越えるときにそれらの等値面の間に挟まれたままとなる。この

ため、地面に近い温位面 θ_0 は近似的に等高線と一致しなければならない。地面より上数キロメートルの温位面 $\theta_0 + \delta\theta$ も鉛直方向に変位させられる。しかし、地形の起伏と流れの相互作用によって生成される圧力に由来して、より上層での鉛直変位は水平に広げられ、起伏の上流と下流に広がり、地面近くでの鉛直変位よりもその振幅は小さくなる（図 4.9, 4.10 参照）。

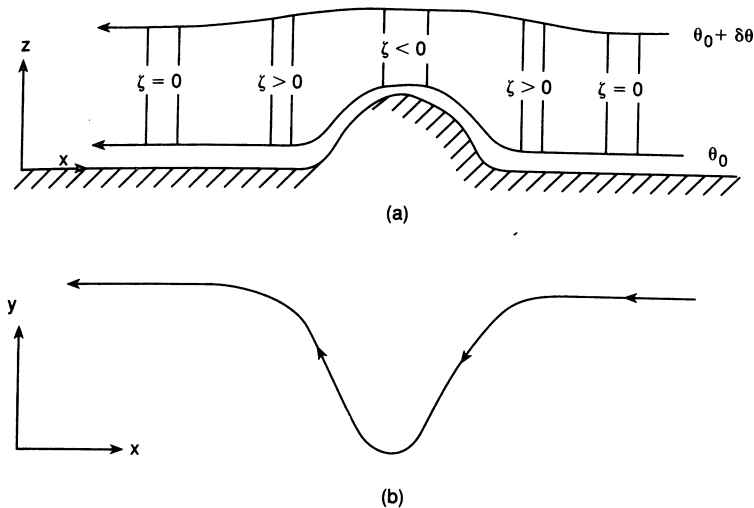


図 4.10: 図 4.9 と同様でただし、流れは東から。

上層の等エントロピー面の鉛直変位の結果として、地形の起伏の上流における大気のコラムは鉛直に伸ばされる。(大きな水平スケールの運動に対しては、上流の引き伸ばしは非常に小さい。) この引き伸ばしは h を増加させ、それによって (4.13) から ζ はポテンシャル渦度を保存するために正とならなければならない。したがって、ある大気柱が山の起伏に近づくに連れて、その柱は低気圧性の回転をもつようになる。この低気圧性の回転は北向きへの移動を引き起こすので、 f も増加する。それは、ポテンシャル渦度の保存に対して要求される ζ の変化に帰着する。柱が起伏を越え始めるにつれて、その鉛直方向への引き伸ばしは減少し、相対渦度は負とならなければならない。したがって、大気柱は図 4.9b の (x, y) 平面的分布で示すように、高気圧性の渦を獲得し、南に移動する。大気柱が起伏を越えて、初めの深さに戻ると、大気柱のもとの緯度より南となるので、 f はより小さくなり、相対渦度が正とならなければならない。ゆえに、流跡線は低気圧性循環とならなければならない、その柱は北向きに変位させられるであろう。パーセルが自身のはじめの緯度に戻ると、いまだに北向きの速度成分があり、そのパーセルの速度の向きが再び逆になるまで高気圧性循環を獲得しながら、徐々に北に移動し続ける。すると、水平面で波状の流跡線に沿ってポテンシャル渦度を保存しながら、そのパーセルは下流に移動するであろう。ゆえに、コリオリパラメータの緯度方向の依存性が、大規模な尾根を越える定常な東西からの流れの間に力学的な差をもたらしている。西風の場合、起伏は遠方の下流に広がる流線において波状の擾乱を生成する。しかし、東風の場合、流線の擾乱は起伏から離れるに連れて減衰する。

山の起伏が子午面方向に無限の長さであると仮定した上述のような状況は非常に理想化されている。実際は、静的安定度が鉛直方向の運動を抑制する傾向にあるので、静的安定な環境における大規模な流れは地形の起伏によってブロックされ、起伏を越えるよりその回りを回り込む流れとする。しかし、流体柱が起伏を越えようと回り込もうと、ポテンシャル渦度の保存という制限は未だに満たされなければならない。

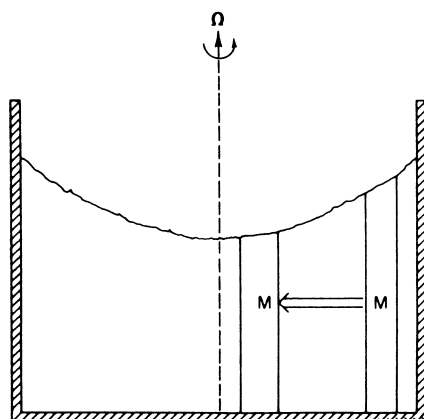


図 4.11: 回転している円筒管における深さの半径方向への依存性。

ロスビーのポテンシャル渦度保存則 (4.13) は順圧流体において、深さの変化が力学的にはコリオリパラメータの変化と同様であるということを示している。これは、水で満たされた回転する円筒管で容易に実演可能である。剛体回転に対して、動径方向の圧力傾度と遠心力の間のバランスによって決められる自由表面の形は放物線状である。したがって、図 4.11 で示すように、もし流体柱が急速に外向きに移動すると、柱は鉛直に引き伸ばされなければならない。(4.13) によると、相対渦度は比 $(\zeta + f)/h$ を一定に保つために増加しなければならない。もし、回転球面上での流体柱が深さ変化せずに赤道に動かされると、先と同じ結果が適用される。この場合、 ζ が f の減少と相殺するように増加しなければならない。ゆえに、順圧流体において、緯度の増加に伴う深さの減少は、緯度方向へのコリオリ力の増加と同じ効果を相対渦度に与える。