4.6 傾圧（エルテル）のポテンシャル渦度方程式

- 4.3 では循環定理と質量保存則を用いて, エルテルのポテンシャル渦度 $P \equiv (\zeta_\theta + f)(-g\partial\theta/\partial p)$ が断熱的な流れにおける運動とともに保存されることを示した.
- もし非断熱加熱や摩擦によるトルク（後述）が存在すると, P は保存されない.
- しかし, そのような運動での P の変化率を支配する方程式は, 等エントロピー座標系での形式における運動方程式から容易に導出できる.

4.6.1 等エントロピー座標系運動方程式

系の設定

- **安定成層** $\Rightarrow$ 温位 θ が高度とともに単調に増加する関数. $\Rightarrow$ θ は鉛直座標として使用可能.
- この座標系において, 鉛直の「速度」とは, $\dot{\theta} \equiv D\theta/Dt$.
- したがって, 断熱運動は等エントロピー座標系では 2 次元となる.

運動方程式の導出

断面積 δA と鉛直方向に $\delta\theta$ をもつ等エントロピー座標系における無限小体積は

$$\delta M = \rho\delta A\delta z = \delta A\left(-\frac{\delta p}{g}\right) = \frac{\delta A}{g}\left(-\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)\delta\theta = \sigma\delta A\delta\theta \tag{4.29}$$

という質量をもつ. ここで, $(x,\ y,\ \theta)$ 空間での「密度」（すなわち図 4.7 のように, 「体積」要素 $\delta A\delta\theta$ でかけたとき, 質量要素 δM となる物理量）は

$$\sigma \equiv -g^{-1}\partial p/\partial\theta \tag{4.30}$$

で定義される. 等エントロピー座標における水平運動方程式は圧力座標形式 (4.19) を[*1]変形することで[*2]

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_\theta\left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2} + \Psi\right) + (\zeta_\theta + f)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial\theta} + \boldsymbol{F}_r. \tag{4.31}$$

ここで,

[*1] （再掲）

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}_p\left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2} + \Phi\right) - (\zeta + f)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} - \omega\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial p} \tag{4.19}$$

[*2] 導出は付録参照.

- $\boldsymbol{\nabla}_\theta$ は等エントロピー面での勾配.
- $\zeta_\theta \equiv \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta\times\boldsymbol{V}$ は等エントロピー座標系での相対渦度.
- $\Psi \equiv c_p T + \Phi$ はモンゴメリー流線関数.
- 非断熱鉛直移流に沿った摩擦項 $\boldsymbol{F}_r$ を導入.

連続の式の導出

3.1.2 における圧力座標で用いたのと同様のやり方[*3]で (4.29) から

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}_\theta\cdot(\sigma\boldsymbol{V}) = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma\dot{\theta}\right). \tag{4.32}$$

Ψ と σ は静力学方程式により, それは等エントロピー座標系において,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \Pi(p)\equiv c_p\left(\frac{p}{p_s}\right)^{R/c_p} = c_p\frac{T}{\theta} \tag{4.33}$$

と関係付けられる[*4]. ここで, Π は**エクスナー関数**と呼ばれる. (4.30) - (4.33) 式は $\dot{\theta}, \boldsymbol{F}_r$ が既知であるとすると, $\boldsymbol{V}$, σ, Ψ, p の予報変数に対して閉じた方程式となる.

4.6.2 ポテンシャル渦度方程式

$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta\times$ (4.31) をとると, 等エントロピー座標系での渦度方程式[*5]：

$$\frac{\tilde{D}}{Dt}(\zeta_\theta+f)+(\zeta_\theta+f)\boldsymbol{\nabla}_\theta\cdot\boldsymbol{V} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta\times\left(\boldsymbol{F}_r-\dot{\theta}\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\theta}\right). \tag{4.34}$$

ここで,

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta$$

は等エントロピー面上での水平運動に伴う全微分.

また, $\sigma^{-2}\partial\sigma/\partial t = -\partial\sigma^{-1}/\partial t$ から, (4.32) は

$$\frac{\tilde{D}}{\partial t}\left(\sigma^{-1}\right)-\left(\sigma^{-1}\right)\boldsymbol{\nabla}_\theta\cdot\boldsymbol{V} = \sigma^{-2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma\dot{\theta}\right). \tag{4.35}$$

(4.34) $\times\,\sigma^{-1}$ + (4.35) $\times\,(\zeta_\theta+f)$ を行うと, 保存則

$$\frac{\tilde{D}P}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta P = \frac{P}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma\dot{\theta}\right)+\sigma^{-1}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta\times\left(\boldsymbol{F}_r-\dot{\theta}\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\theta}\right) \tag{4.36}$$

[*3] 導出は付録参照.
[*4] 導出は付録参照.
[*5] 導出は付録参照.

が得られる．ここで, P はエルテルのポテンシャル渦度

$$P \equiv \frac{(\zeta_\theta + f)}{\sigma}.$$

- もし, (4.36) の右辺における非断熱加熱と摩擦の項が既知であれば, 等エントロピー面での**水平**運動に伴う P の時間発展を決定できる.
- 非断熱加熱と摩擦が小さいとき, **ポテンシャル渦度は等エントロピー面での運動について近似的に保存**する.

偏西風ジェットや前線のような力学場において鋭い勾配をもった擾乱はエルテルのポテンシャル渦度が異常な値をとる.

対流圏上部でそのような異常な値はほぼ断熱な条件のもとで急速に移流される.
$\Rightarrow$ ポテンシャル渦度の異常なパターンは等エントロピー面上で保存されるとみてよい.

この重要な保存性は, ポテンシャル渦度のアノマリーが擾乱を識別し, トレースするのに便利であることを表す.

4.6.3 等エントロピー面渦度での積分拘束

等エントロピー面での渦度方程式 (4.34) は

$$\frac{\partial \zeta_\theta}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}_\theta \cdot [(\zeta_\theta + f)\,\boldsymbol{V}] + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\nabla}_\theta \times \left(\boldsymbol{F}_r - \dot{\theta} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} \right). \tag{4.37}$$

ベクトル解析の公式より,

$$\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_\theta \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}_\theta \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{k})$$

なので, (4.37) は

$$\frac{\partial \zeta_\theta}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}_\theta \cdot \left[(\zeta_\theta + f)\,\boldsymbol{V} - \left(\boldsymbol{F}_r - \dot{\theta} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} \right) \times \boldsymbol{k} \right] \tag{4.38}$$

とできる．式 (4.38) は

- **等エントロピー面での渦度が右辺の括弧内の水平フラックスベクトルの収束発散によってのみ変化しうる**.
- 渦度は等エントロピー面を横切る鉛直方向の輸送で変化することはできない.
- 等エントロピー面上の面積にわたって (4.38) を積分し, 発散定理（付録 C.2）を適用すると, 地表面と交わらない等エントロピー面に対して, ζ_θ の全球平均が正確にゼロとなる（導出は付録参照）.
- そのような等エントロピー面上での渦度は生成も消滅もせず, 単に等エントロピー面に沿った水平フラックスによって凝集散逸されるだけである.

付録

(4.31) 式導出

圧力座標系における水平運動方程式は (3.2) 式より

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{\nabla}_p\Phi \tag{3.2}$$

である．圧力座標系においてラグランジュ微分は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}_p + \frac{Dp}{Dt}\frac{\partial}{\partial p}$$

であるが, これを温位座標系で書き換えると,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta + \frac{D\theta}{Dt}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

となる．ここで, 圧力座標系から温位座標系への変換で現れる変換係数の項はすべて $\dfrac{D\theta}{Dt}$ にまとめた形となる．また, (1.28) の水平ベクトル形式：

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta = \boldsymbol{\nabla}_p + (\boldsymbol{\nabla}_\theta p)\frac{\partial}{\partial p}$$

を用いると, (3.2) は

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\left\{\boldsymbol{\nabla}_\theta - (\boldsymbol{\nabla}_\theta p)\frac{\partial}{\partial p}\right\}\Phi \tag{ap4.31.1}$$

となる．ここで, 温位の定義から,

$$p = p_0\left(\frac{T}{\theta}\right)^{c_p/R}$$

となる．ここで, p_0 は基準圧力である．よって, 等温位面上での圧力勾配は

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta p = \boldsymbol{\nabla}_\theta\left\{p_0\left(\frac{T}{\theta}\right)^{c_p/R}\right\} = \frac{c_p}{R}p_0\left(\frac{T}{\theta}\right)^{c_p/R}\frac{1}{T}\boldsymbol{\nabla}_\theta T = \frac{c_p}{R}\frac{p}{T}\boldsymbol{\nabla}_\theta T = c_p\rho\boldsymbol{\nabla}_\theta T$$

となる．最終式への変形は理想気体の状態方程式を用いた．また, ジオポテンシャルの圧力微分は静力学平衡から,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$$

である．これらの関係を用いると, (ap4.31.1) は

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{\nabla}_\theta(\Phi + c_pT) \tag{ap4.31.2}$$

となる．ここで, ラグランジュ微分をオイラー形式に書き換え, モンゴメリーポテンシャルを用いると,

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}_\theta\left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2} + \Psi\right) - (\zeta_\theta + f)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} - \dot{\theta}\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\theta} \tag{ap4.31.3}$$

となる. ただし, 移流項は (4.18) を[*6]用いて書き換えた. また, ζ_θ は等温位面での渦度である. これを整理し, 外力として摩擦を加えると,

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}_\theta\left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}+\Psi\right)+(\zeta_\theta+f)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}=-\dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial\theta}+\boldsymbol{F}_r \tag{4.31}$$

が得られる.

(4.32) 式導出

まず, 3.1.2 での手法と同様の議論で連続の式を導出する. ここでの流体要素の質量は, (4.29) より, $\delta M=\sigma\delta x\delta y\delta\theta$ となる. したがって,

$$\frac{1}{\delta M}\frac{D}{Dt}(\delta M)=\frac{1}{\sigma\delta x\delta y\delta\theta}\frac{D}{Dt}\left(\sigma\delta x\delta y\delta\theta\right)=0$$

となる.

微分し, 連鎖率を用い, 微分演算子の順序を変えると,

$$\frac{1}{\delta x}\delta\left(\frac{Dx}{Dt}\right)+\frac{1}{\delta y}\delta\left(\frac{Dy}{Dt}\right)+\frac{1}{\delta\theta}\delta\left(\frac{D\theta}{Dt}\right)+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{D\sigma}{Dt}\right)=0$$

となるので, つまり

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta\dot{\theta}}{\delta\theta}+\frac{1}{\sigma}\frac{D\sigma}{Dt}=0$$

である. ここで, $\delta x,\ \delta y,\ \delta\theta\to 0$ の極限をとり, $\delta x,\ \delta y$ を θ 面で評価すると,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)_\theta+\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sigma}\frac{D\sigma}{Dt}=0$$

となる. これをオイラー系で書き換えると,

$$\sigma\boldsymbol{\nabla}_\theta\cdot\boldsymbol{V}+\sigma\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta\sigma+\dot{\theta}\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}=0$$

となる. よって, これを整理すると

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}_\theta\cdot(\sigma\boldsymbol{V})=-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma\dot{\theta}\right) \tag{4.32}$$

が得られる.

別の導出として, 圧力座標系の連続の式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \tag{3.5}$$

[*6] (再掲)

$$(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}\right)+\zeta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} \tag{4.18}$$

から直接導出する方法を行う．上式は等圧面における水平微分演算子ベクトルを用いると,

$$\boldsymbol{\nabla}_p \cdot \boldsymbol{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{ap4.32.1}$$

となる．まず, ω を θ 座標系で表現する．その定義から,

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}_\theta p + \dot{\theta}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

となる．これは圧力速度 ω を温位座標系で表現した式である．この両辺を p で微分すると,

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}_\theta p + \dot{\theta}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right]$$

となる．微分の関係から, $\dfrac{\partial}{\partial p} = \dfrac{\partial \theta}{\partial p}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$ が成り立つので, 上式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\partial \theta}{\partial p}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}_\theta p + \dot{\theta}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right] \tag{ap4.32.2}$$

となる．実際に右辺を θ で微分すると,

$$\frac{\partial \theta}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\partial \theta}{\partial p}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta}\right) \cdot (\boldsymbol{\nabla}_\theta p) + \boldsymbol{V} \cdot \left\{\boldsymbol{\nabla}_\theta \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\dot{\theta}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)\right] \tag{ap4.32.3}$$

となる．ここで, (4.30) の σ を導入すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial \theta} &= -\frac{1}{g\sigma}\left[-g\frac{\partial \sigma}{\partial t} - g\sigma\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial p}\right) \cdot (\boldsymbol{\nabla}_\theta p) - g\,\boldsymbol{V} \cdot \{\boldsymbol{\nabla}_\theta \sigma\} - g\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\dot{\theta}\sigma\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial p}\right) \cdot (\boldsymbol{\nabla}_\theta p) + \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{V} \cdot \{\boldsymbol{\nabla}_\theta \sigma\} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\dot{\theta}\sigma\right)\end{aligned} \tag{ap4.32.4}$$

となる．ここで, 右辺の大括弧内第 2 項は, $\dfrac{\partial}{\partial \theta} = \dfrac{\partial p}{\partial \theta}\dfrac{\partial}{\partial p}$ という変換を用いたのち, σ で書き換えた．ところで, (1.28) から, 水平微分演算子に対する鉛直座標系の関係が,

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta = \boldsymbol{\nabla}_p + (\boldsymbol{\nabla}_\theta p)\frac{\partial}{\partial p}$$

であることがわかっているので, 圧力座標系での水平発散は, 温位座標系では

$$\boldsymbol{\nabla}_p \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla}_\theta \cdot \boldsymbol{V} - (\boldsymbol{\nabla}_\theta p) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial p}\right) \tag{ap4.32.5}$$

と書き換えられる．(ap4.32.4), (ap4.32.5) を用いて, (ap4.32.1) を書き換えると,

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta \cdot \boldsymbol{V} - (\boldsymbol{\nabla}_\theta p) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial p}\right) + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial p}\right) \cdot (\boldsymbol{\nabla}_\theta p) + \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{V} \cdot \{\boldsymbol{\nabla}_\theta \sigma\} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\dot{\theta}\sigma\right) = 0$$

となるので, これを整理すると,

$$\sigma\boldsymbol{\nabla}_\theta \cdot \boldsymbol{V} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \{\boldsymbol{\nabla}_\theta \sigma\} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\dot{\theta}\sigma\right) = 0 \tag{ap4.32.6}$$

となるので, 温位座標系における連続の式

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_\theta \cdot (\sigma \boldsymbol{V}) = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sigma\dot{\theta}\right) \tag{4.32}$$

が得られる．

(4.33) 式導出

モンゴメリーポテンシャルの温位微分を計算する.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(c_p T + \Phi) = c_p \left[\left(\frac{p}{p_s}\right)^{R/c_p} + \theta \left(\frac{p}{p_s}\right)^{R/c_p} \frac{1}{p}\frac{R}{c_p}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g\frac{\partial z}{\partial \theta} \right] = (\dagger 1)$$

となる. ここで, 温位の定義式を用いて T を書き換え, ジオポテンシャルの定義を用いた. これをさらに計算すると,

$$(\dagger 1) = \Pi(p) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \Pi(p)$$

となる. ここで, $\dfrac{\partial}{\partial \theta} = \dfrac{\partial p}{\partial \theta}\dfrac{\partial}{\partial p}$ という関係式を用い, また静力学方程式を用いた. 以上で, モンゴメリーポテンシャルの温位微分がエクスナー関数に等しいことが示された.

(4.33) 式導出

θ 座標系での渦度方程式を導出する. θ 系での運動方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_\theta \left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2} + \Psi \right) + (\zeta_\theta + f)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} = -\dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} + \boldsymbol{F}_r \qquad (4.31)$$

である. この式の両辺の鉛直渦度をとる（$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta\times$ を作用させる）と,

$$\frac{\partial \zeta_\theta}{\partial t} + \underbrace{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta \times [(\zeta_\theta + f)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}]}_{\dagger 1} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta \times \left[-\dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} + \boldsymbol{F}_r \right] \qquad \text{(ap4.33.1)}$$

となる. ここで, $\zeta_\theta \equiv \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta\times\boldsymbol{V}$ とした. また, 運動方程式左辺第 2 項は回転をとることで恒等的にゼロとなる. 左辺第 2 項はベクトル解析の公式：

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta \times (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}_\theta\cdot\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}_\theta\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta)\boldsymbol{B}$$

を用いると,

$$\begin{aligned}(\dagger 1) &= \boldsymbol{k}\cdot[(\zeta_\theta + f)\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\nabla}_\theta\cdot\boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta)(\zeta_\theta+f)\boldsymbol{k} - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\nabla}_\theta\cdot(\zeta_\theta+f)\boldsymbol{k}) - ((\zeta_\theta+f)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta)\boldsymbol{V}] \\ &= (\zeta_\theta+f)(\boldsymbol{\nabla}_\theta\cdot\boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta)(\zeta_\theta+f)\end{aligned}$$

となる. ここで, 等温位面での水平微分演算子ベクトルと鉛直方向の基底ベクトルの内積はゼロであり, 速度ベクトルと鉛直方向の基底ベクトルの内積もゼロであるという関係を用いた. 以上より,

$$\frac{\tilde{D}}{Dt}(\zeta_\theta + f) + (\zeta_\theta+f)\boldsymbol{\nabla}_\theta\cdot\boldsymbol{V} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\theta\times\left(\boldsymbol{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta}\right) \qquad (4.34)$$

が得られる.

等エントロピー面上での全球平均

$$\frac{\partial \zeta_\theta}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}_\theta \cdot \left[(\zeta_\theta + f)\boldsymbol{V} - \left(\boldsymbol{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} \right) \times \boldsymbol{k} \right] \tag{4.38}$$

を地表面と交わらない等エントロピー面上で積分すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \zeta_\theta dS = -\iint_S \boldsymbol{\nabla}_\theta \cdot \left[(\zeta_\theta + f)\boldsymbol{V} - \left(\boldsymbol{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} \right) \times \boldsymbol{k} \right] dS$$

となる. ここで, S は等エントロピー面の面積, dS は面積要素である. 次に, 計算の便宜上, 右辺についてこの面積を北半球 S_n と南半球 S_s に分割する. つまり,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \zeta_\theta dS = & -\left[\iint_{S_n} \boldsymbol{\nabla}_\theta \cdot \left[(\zeta_\theta + f)\boldsymbol{V} - \left(\boldsymbol{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} \right) \times \boldsymbol{k} \right] dS \right. \\ & \left. + \iint_{S_s} \boldsymbol{\nabla}_\theta \cdot \left[(\zeta_\theta + f)\boldsymbol{V} - \left(\boldsymbol{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} \right) \times \boldsymbol{k} \right] dS \right]\end{aligned}$$

とする. 右辺について発散定理を適用すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \zeta_\theta dS = & -\left[\oint_{C_n} \left[(\zeta_\theta + f)\boldsymbol{V} - \left(\boldsymbol{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} \right) \times \boldsymbol{k} \right] \cdot \boldsymbol{n}_n dl \right. \\ & \left. + \oint_{C_s} \left[(\zeta_\theta + f)\boldsymbol{V} - \left(\boldsymbol{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} \right) \times \boldsymbol{k} \right] \cdot \boldsymbol{n}_s dl \right]\end{aligned}$$

となる. ここで, C_n, C_s は面積 S_n, S_s を囲む曲線の長さであり, dl はその曲線上に存在する線要素, $\boldsymbol{n}_n$, $\boldsymbol{n}_s$ は曲線に垂直な単位ベクトルである. ここで, これらの単位ベクトルは任意の曲線の位置で互いに正反対の向きを向いている[*7]ので, これらの線積分の和は正確にゼロとなる. よって,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \zeta_\theta dS = 0$$

が成り立つ. これはつまり, 渦度の全球平均の時間変化がゼロとなることを示している.

次に, 圧力座標系における渦度方程式から, 等圧面上での渦度の全球平均の時間変化がゼロとなることを示す. (4.19) について等圧面での鉛直渦度をとると,

$$\frac{\partial \zeta_p}{\partial t} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \left\{ -(\zeta + f)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} - \omega\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial p} \right\}$$

となる. さらに, (4.37) の下の式から,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta_p}{\partial t} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \left\{ -(\zeta + f)(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{k} - \left(\omega\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial p} \right) \times \boldsymbol{k} \right\} \\ &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \left\{ -(\zeta + f)\boldsymbol{V} - \left(\omega\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial p} \right) \times \boldsymbol{k} \right\}\end{aligned}$$

であることがわかる. あとは, 先と同じ面積分を行うと, 右辺がゼロとなるので, よって等圧面における渦度の全球平均の時間変化はゼロとなることがわかる.

[*7] 2 次元での発散定理において, 曲線のベクトルは面積分の領域境界の法線外向きを向いている. よって, 南半球を領域にもつ面での法線は北向きに, 北半球では南向きに法線が向いている. また, これら 2 つの面は任意の地点で接しており, その接する境界がそれぞれの境界曲線 C_n, C_s となっている. つまり, イメージとしては, ある曲線上に沿った線積分を行うが, その積分を行う法線方向が真逆を向いている 2 つの線積分を行うというイメージである. よって, これらは互いに相殺されゼロとなる.