1 Kurihara et al. (1990) によるフィルタリング処理

ここでは, Kurihara et al. (1990) で提案されている局所スムージング作用素を利用した, 任意波動成分のフィルター作用素の数学的根拠を証明する. 以下は, Kurihara et al. (1990) で構築されたフィルター作用素の根拠として挙げられている Shuman (1957) に基づいている.

離散化された任意の 1 次元データ z_i を考える. ここで, i は格子番号である. このとき, i を中心にした隣接 3 格子での最も簡単なスムージング要素は

$$\overline{z}_i \equiv \mu z_i + \frac{1}{2}(1-\mu)(z_{i-1} + z_{i+1}) \tag{1}$$

である. ここで, $\overline{z}_i$ はスムージングされた物理量を表す. μ はスムージングの際の重みであり, $\mu = 1/3$ ならば, 隣接 3 点での単純平均操作に等しくなる. 上式は

$$\overline{z}_i = z_i + \frac{1}{2}\nu(z_{i-1} + z_{i+1} - 2z_i) \tag{2}$$

と書き換えられる. ここで, $\nu = 1-\mu$ である. ν は相変わらずスムージングでの重みを表す. 今, z_i は独立変数 x_i が張る空間において定義されており,

$$z_i = C + A\cos\left(k(x_i - \overline{x})\right)$$

と表記できるとする. ここで, $k\overline{x}$ は任意の一定位相を表す. k は波数であり, 波長 L との間に $k = 2\pi/L$ という関係をもつ. このとき, 三角関数の合成から

$$\begin{aligned} z_{i\pm1} &= C + A\cos k(x_{i\pm1} - \overline{x}) \\ &= C + A\cos k(x_i \pm \Delta x - \overline{x}) \\ &= C + A\left[\cos k(x_i - \overline{x})\cos k\Delta x \mp \sin k(x_i - \overline{x})\sin k\Delta x\right] \end{aligned}$$

となる (複号同順). ここで, Δx は空間 x_i の格子点距離である. なお, ここでは x_i は等間隔に配置されているとする. 上式を (2) に代入すると,

$$\begin{aligned} \overline{z}_i &= C + A\cos k(x_i - \overline{x}) + \nu\left[A\cos k(x_i - \overline{x})\cos k\Delta x - A\cos k(x_i - \overline{x})\right] \\ &= C + \left[1 - \nu(1 - \cos k\Delta x)\right]A\cos k(x_i - \overline{x}) \end{aligned} \tag{3}$$

と整理される. したがって, このスムージングは, ν の値によって z_i のもつ波数も位相も変化させないスムージングとなっていることがわかる. 一方, その振幅については, $[1 - \nu(1 - \cos k\Delta x)]$ 倍変化させることがわかる. 今, ν は使用者によって任意に決めることができる. もし, (3) 式の右辺第 2 項の係数がゼロとなる:

$$1 - \nu(1 - \cos k\Delta x) = 0$$

ように ν を設定すれば, (3) 式によって波数 k の振幅がゼロとなり, その波数成分を完全に除去することができる. これは, スムージング作用素 (1) が重みの選び方で, 特定波数の

成分を数学的に完全にフィルターアウトすることができることを意味している (すなわち, フィルター作用素として機能することを意味している).

これまでの議論では, z_i が 1 つの波数成分のみをもっているときを考えたが, 任意の波の重ね合わせでも同じ議論が可能である. 物理量 z が空間 x についてフーリエ級数で表現されるとする:

$$z_i = \sum_n \hat{z}_n \cos k_n (x_i - \overline{x}).$$

このとき, スムージング作用素 (2) は上と同様の三角関数合成により,

$$\begin{aligned}
\overline{z}_i &= \sum_n \left[\hat{z}_n \cos k_n (x_i - \overline{x}) + \frac{1}{2}\nu \left(\hat{z}_n \cos k_n (x_i - \Delta x - \overline{x}) + \hat{z}_n \cos k_n (x_i + \Delta x - \overline{x}) - 2\hat{z}_n \cos k_n (x_i - \overline{x}) \right) \right] \\
&= \sum_n \left[\hat{z}_n \cos k_n (x_i - \overline{x}) + \nu \left(\hat{z}_n \cos k_n (x_i - \overline{x}) \cos k_n \Delta x - \hat{z}_n \cos k_n (x_i - \overline{x}) \right) \right] \\
&= \sum_n \left[1 - \nu \left(1 - \cos k_n \Delta x \right) \right] \hat{z}_n \cos k_n (x_i - \overline{x}) \qquad (4)
\end{aligned}$$

が得られる. ここでも, ν は使用者が任意に決定できるため, ある特定の 1 つの波数 k_c について

$$1 - \nu \left(1 - \cos k_n \Delta x \right) = 0$$

すなわち,

$$\nu = \left(1 - \cos k_c \Delta x \right)^{-1} \qquad (5)$$

となるように ν を指定すれば, スムージングによって z に含まれる波数 k_c のモードは完全にフィルターアウトすることができる. このとき, ν は k のみに依存するので, k_c 以外の波数成分は振幅がゼロにならずに z に残ることになる. 異なる複数の波をフィルターするには, スムージング作用素 (2) を重み ν を変えて複数回行えばよい. 異なる M 個の波数成分を除去するスムージングを

$$\overline{z}_i^M \equiv \overline{z}_i^{M-1} + \frac{1}{2}\nu \left(\overline{z}_{i-1}^{M-1} + \overline{z}_{i+1}^{M-1} - 2\overline{z}_i^{M-1} \right) \qquad (6)$$

として定義する. l 回目のスムージング係数は

$$\nu_l = \left(1 - \cos k_{m(l)} \Delta x \right)$$

となる. ここで, $k_{m(l)}$ は l 回目でフィルターアウトされる波数を意味する. スムージング作用素 (2) が波数と位相を変化させず, 振幅のみを変化させる:

$$\overline{z}_i^M = \sum_n \overline{\hat{z}}_n^M \cos k_n (x_i - \overline{x})$$

であることに注意すれば, (6) を (4) のようにフーリエ級数で表現することを考えると,

$$\overline{z}_i^M = \sum_n \overline{\hat{z}}_n^M \cos k_n (x_i - \overline{x}) = \sum_n \left[1 - \nu_M \left(1 - \cos k_n \Delta x \right) \right] \overline{\hat{z}}_n^{M-1} \cos k_n (x_i - \overline{x})$$

という漸化式が成り立つ．上式はフーリエの各モード n で独立に成り立つことに注意すると，n 番目のモードで

$$\overline{\hat{z}}_n^M = [1 - \nu_M (1 - \cos k_n \Delta x)]\, \overline{\hat{z}}_n^{M-1}$$

が成り立つ．よって，ただちに $\overline{\hat{z}}_n^M$ に対して，

$$\overline{\hat{z}}_n^M = \hat{z}_n \prod_{l=1}^{M} [1 - \nu_l (1 - \cos k_n \Delta x)] \tag{7}$$

という関係が得られる．この式は，M 個の波数のフィルタリングによって，フィルタアウトされなかった成分がとる，フィルター後の振幅を表している．つまり，フィルタアウトされなかった成分はこの M 回のフィルタ作用によって，振幅がもとの

$$\prod_{l=1}^{M} [1 - \nu_l (1 - \cos k_n \Delta x)]$$

倍になるということを意味する．!!!!! 以降，Shuman の 図 1 の説明と 2 次元版の導出．

なお，Kurihara et al. (1990) では，ν を

$$\nu = (1 - \cos 2\pi/m)^{-1}, \quad m = 2, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 2, 8, 9, 2 \tag{8}$$

という順番で 11 回フィルタ操作を行うと，$2\Delta x$ から 9Δ までの波長をもつ波が完全にフィルタアウトされると述べている．これは，(5) 式と $k = 2\pi/L$ という関係を考えると，

$$\nu = (1 - \cos k_c \Delta x)^{-1} = (1 - \cos 2\pi \Delta x / m\Delta x)^{-1}$$

となることから，波長 $L = m\Delta x$ の波が (8) 式でフィルタアウトされることになるとわかる．このとき，フィルタアウトされない成分の振幅が (8) の操作でどの程度変化するかを見積もる．フィルタアウトされない任意の波数を $k_r = 2\pi/R\Delta x$ とすると，(7) 式から上の 11 回のスムージング操作によって，その振幅は

$$\overline{\hat{z}}_r^{11} = \hat{z}_r \prod_{l=1}^{11} [1 - \nu_l (1 - \cos 2\pi/R)] \tag{9}$$

となる．たとえば，$R = 15,\ 20, 30$ の場合 [*1] の振幅はそれぞれ，

$$R = 15\ :\ 0.179, \quad R = 20\ :\ 0.400, \quad R = 30\ :\ 0.675$$

となり，それぞれオリジナルの振幅の 82 %, 60 %, 32 % まで減少することがわかる．

[*1] Kurihara et al. (1990) に具体的に明記されている波長である．

参考文献

Kurihara, Y., M. A. Bender, R. E. Tuleya, and R. J. Ross, 1990: Prediction experiments of hurricane Gloria (1985) using a multiply nested movable mesh model. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 2185–2198, doi:10.1175/1520-0493(1990)118⟨2185:PEOHGU⟩2.0.CO;2.

Shuman, F. G., 1957: Numerical methods in weather prediction: II. Smoothing and filtering. *Mon. Wea. Rev.*, **85**, 357–361, doi:10.1175/1520-0493(1957)085⟨0357:NMIWPI⟩2.0.CO;2.