

9.2.2 semigeostrophic 理論

前節で議論された前線強化の力学を解析するため、ブシネスク流体を考える。この近似は結果に大きな影響を与えることなく運動方程式を簡単化できる。また、

$$\Phi(x, y, z, t) = (p - p_0)/\rho_0, \quad \Theta = \theta - \theta_0$$

をそれぞれ、密度で規格化した圧力変位、温位変位とする。ここで、 $p_0(z)$ 、 $\theta_0(z)$ はそれぞれ高度に依存する標準大気の圧力と温位である。

上の定義を用いると、水平運動方程式、熱力学エネルギー方程式、静力学近似、連続の式は

$$\frac{Du}{Dt} - fv + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (9.2)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad (9.3)$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} + w \frac{d\theta_0}{dz} = 0, \quad (9.4)$$

$$b \equiv \frac{g\Theta}{\theta_{00}} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (9.6)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

となる^{*1}。ここで、 b は浮力、 θ_{00} は温位の一定基準値である。前小節の議論から、前線に平行な変動の水平スケールは前線に直交するスケールよりもはるかに大きい。このスケールの違いは第一近似に対して、前線を2次元構造（前線に平行な方向には一様場と仮定して直交方向と鉛直方向の2次元）としてモデル化可能であるということを示唆している。そこで、前線が定常となるような座標系を考え、前線と直交する方向が y 軸に平行となるようにとる。このとき、

L_x, L_y : 前線に沿った向きと前線に直交する向きの前線の長さスケール、

U, V : 前線に沿った向きと直交する向きの速度スケール

とすると、 $L_x \gg L_y, U \gg V$ となる（図9.4参照）。

$$U \sim 10 \text{ m s}^{-1}, V \sim 1 \text{ m s}^{-1}, L_x \sim 1000 \text{ km}, L_y \sim 100 \text{ km}$$

^{*1}ブシネスク近似では、気圧傾度項における密度は一定値であるため、

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla_H p = \nabla_H \Phi$$

で置き換えられる。ここで、 ∇_H は等高度座標における水平微分演算子である。また、 $\theta = \theta(x, y, z, t) + \theta_0(z)$ と分割されることに注意。

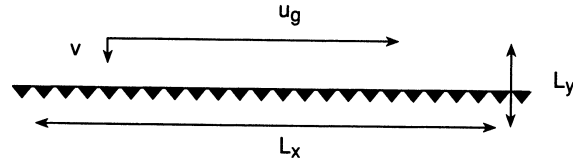


図 9.4: x 軸に平行な前線に相対的な速度と長さスケール.

とすると, x と y 方向について異なったスケールを用いることができる. まず時間のスケールを前線に直交する方向の移流時間スケールと仮定 ($D/Dt \sim V/L_y$) し, ロスビー数を $Ro \equiv V/fL_y \ll 1$ と定義して, 運動方程式の x, y 成分における慣性項とコリオリ項の比の大きさを比べる. すると,

$$\frac{|Du/Dt|}{|fv|} \sim \frac{UV/L_y}{fV} \sim Ro \left(\frac{U}{V} \right) \sim 1,$$

$$\frac{|Dv/Dt|}{|fu|} \sim \frac{V^2/L_y}{fU} \sim Ro \left(\frac{V}{U} \right) \sim 10^{-2}$$

となる. この結果から運動方程式の各項の相対的な大きさを比較すると,

$$\underbrace{\frac{Du}{Dt}}_{O(1)} - \underbrace{fv}_{O(1)} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}_{O(1)} = 0, \quad (9.2')$$

$$\underbrace{\frac{Dv}{Dt}}_{O(10^{-2})} + \underbrace{fu}_{O(1)} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}_{O(1)} = 0. \quad (9.3')$$

(9.3') u はオーダー 1% の差で $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ と地衡風バランスの状態である.

(9.2') v は地衡風バランスが成り立っていない.

ゆえに, 地衡風成分を

$$fu_g = -\partial \Phi / \partial y, \quad fv_g = \partial \Phi / \partial x$$

と定義し, 水平速度場を地衡風と非地衡風に分離すると,

$$u = u_g, \quad v = v_g + v_a$$

となる. ここで, v_g, v_a は同程度の大きさである.

したがって, 水平運動方程式 (9.2), (9.3), 熱エネルギー方程式 (9.4), 連続の式 (9.6) は

$$\frac{Du_g}{Dt} - fv_a = 0, \quad (9.7)$$

$$f u_g = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$\frac{D b}{D t} + w N^2 = 0, \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9.9)$$

と表現できる. ここで, (9.7) は (9.2) について $u = u_g$ であり, コリオリ項と気圧傾度項がバランスしていることに注意. また (9.9) は (9.6) の水平風速のうち, 地衡風成分が非発散であることに注意する. (9.8) は (9.5) を用いると得られる. ここで, N は浮力振動数:

$$N^2 \equiv \frac{g}{\theta_{00}} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}$$

である. u_g は地衡風バランスしているので, 温度風の関係式:

$$f \frac{\partial u_g}{\partial z} = - \frac{\partial b}{\partial y} \quad (9.10)$$

が成り立つ. ここで, (9.7) と (9.8) は準地衡風の考え方とは異なっていることに注意する^{*2}. 東西方向の運動はいまだに地衡風近似が有効であり, 前線に平行な物理量は地衡風で移流される. しかし, 前線に直交する運動量と温度の移流は地衡風だけではなく非地衡風循環 (v_a, w) にも由来する. すなわち,

$$\frac{D}{D t} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}}_{\left(\frac{D_g}{D t}\right)} + \left(v_a \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

である. ここで, 赤が地衡風移流に由来し ((6.8) 参照), 青が非地衡風移流に由来する. (9.7) において, 地衡風の値で運動量を置き換えることを地衡風運動量近似と呼び, その結果得られる予報方程式系を **semigeostrophic** 方程式系と呼ぶ^{*3}.

9.2.3 前線に直交する循環

方程式 (9.7) から (9.10) は閉じた方程式系であり, u_g と b の分布を用いて v_a, w を求めることができる. 大きなスケールでの地衡流は図 9.3 で示されているように, 変形を通して南北温度勾配を強化するように作用していると仮定する. この南北温度勾配の変化に対応した東西風の変化は非地衡風循環 (二次循環) によるものである. この二次循環の構造は 6.4.2 で議論されたオメガ方程式と同様の方程式を導出することで計算できる.

^{*2}付録に準地衡風システムと semi-geostrophic システムの違いをまとめてある.

^{*3} (原文脚注) この名称は何人かの研究者によって地衡風座標と呼ばれる座標系に変換した形で表記された方程式系の形で用いられる (例えば, Hoskins 1975) .

(9.8) を y で, (9.7) を z でそれぞれ微分し, 連鎖律を用いると,

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right) = Q_2 - \frac{\partial v_a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \left(N^2 + \frac{\partial b}{\partial z} \right) \quad (9.11)$$

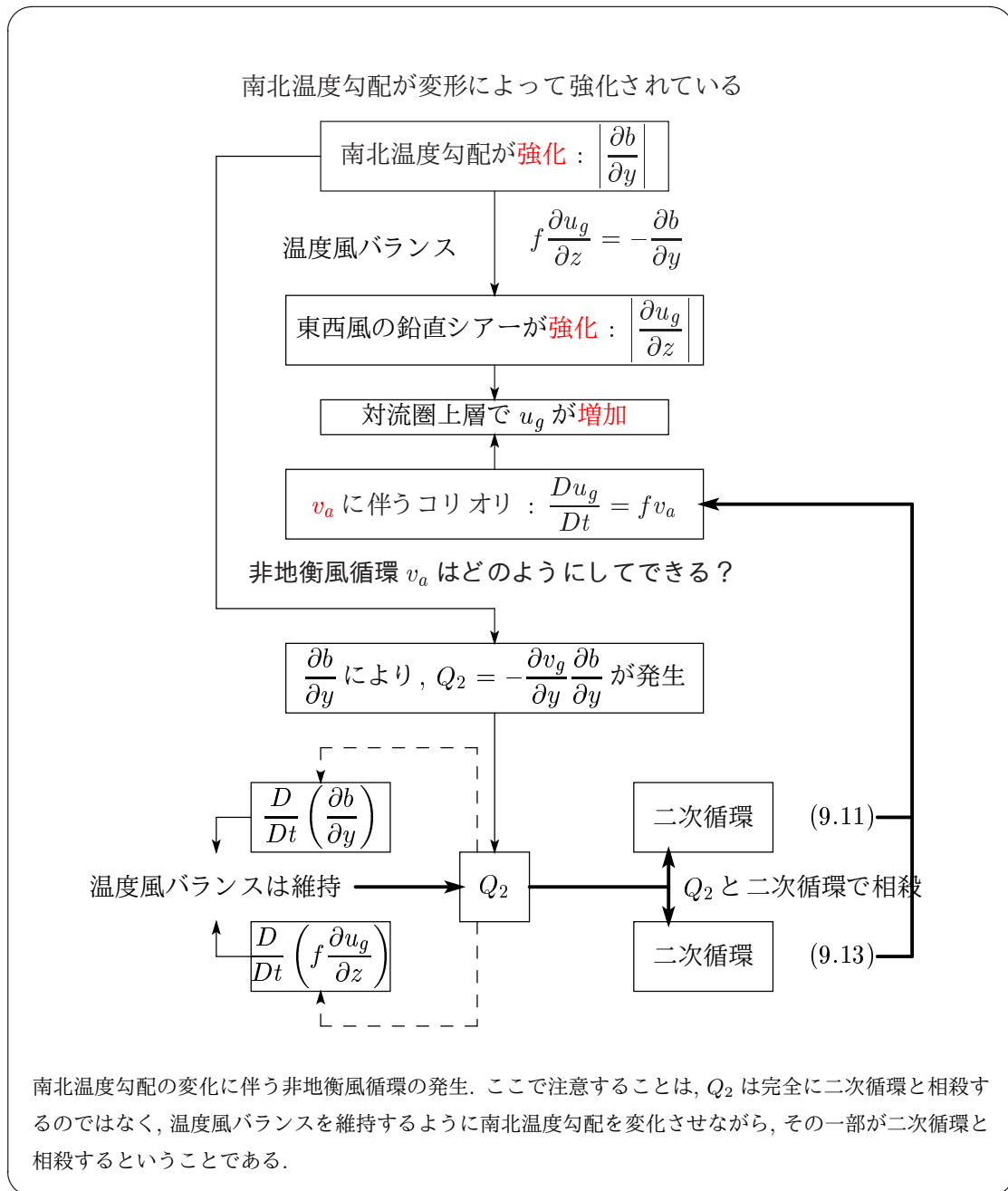
$$\frac{D}{Dt} \left(f \frac{\partial u_g}{\partial z} \right) = Q_2 + \frac{\partial v_a}{\partial z} f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial y} \quad (9.13)$$

という結果が得られる. ここで,

$$Q_2 = -\frac{\partial u_g}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} \quad (9.12)$$

は正に, 6.4.2 で議論した \mathbf{Q} ベクトルの y 成分である. ただし, ここではブシネス形式で表現されている.

(Q_2 によって与えられる) 地衡風強制は, 大きさが等しく符号が逆となる温度風の温度勾配と鉛直シアーを変化させることで温度風バランスを崩す傾向にある. ゆえにシステムは温度風バランスを維持するために, Q_2 と前線を直交する 2 次循環とを相殺させる. 系統的にまとめると下のようになる.



2次循環は y, z 面内で2次元的な(前線を)横切る循環となるので, その循環は

$$v_a = -\partial\psi_M/\partial z, \quad w = \partial\psi_M/\partial y \tag{9.14}$$

となるように定義される子午面流線関数 ψ_M を用いて表現することができる. これは, 連続の式 (9.9) を完全に満たす. (9.11) と (9.13) を足し, 温度風バランスの式 (9.10) を用いて時間微分を消去し, (9.14) を用いて流線関数で表現すると, ソーヤー・エリアッセン方程式

$$N_s^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y^2} + F^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} + 2S^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y \partial z} = 2Q_2 \tag{9.15}$$

が得られる。ここで、

$$N_s^2 \equiv N^2 + \frac{\partial b}{\partial z}, \quad F^2 \equiv f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) = f \frac{\partial M}{\partial y}, \quad S^2 \equiv -\frac{\partial b}{\partial y} \quad (9.16)$$

であり、

$$M \equiv fy - u_g$$

は絶対運動量である。

式 (9.15) は (9.7) と (9.8) での非地衡風移流を無視した準地衡風版：

$$N^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y^2} + f^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} = 2Q_2 \quad (9.17)$$

と比較できる。準地衡風版の場合、左辺の微分演算子の係数は標準大気の静的安定度 N と惑星渦度 f にのみ依存する。一方、semigeostrophic な場合においてそれらは標準大気の分布からの温位の変位 N_s, S と絶対渦度 F 項に依存する。

$N^2 f^2 > 0$ となるような (9.17) という形の式は、楕円型境界値問題と呼ばれる^{*4}。これは Q_2 と境界条件で一意に決められる解 ψ_M をもつ。図 9.1b の $\partial v_g / \partial y$ と $\partial b / \partial y$ のどちらともが負となるような状況について、強制項 Q_2 は前線帯で負となる。その場合の流線関数は前線の暖気側で上昇流があり、寒気側で下降流を伴う y 軸について対称な循環を示す。semigeostrophic な場合、(9.15) はまた、 $N_s^2 F^2 - S^4 > 0$ とすると、楕円型境界値問題である。この条件はエルテルのポテンシャル渦度が北半球で正^{*5}であり、南半球で負でなければならないということを要求している（問 9.1 参照^{*6}）。これは未飽和な温帯の場合にほぼ等しい。

(9.16) の係数が空間変化することと微分のクロスタームが存在することによって、図 9.5 で示されるように 2 次循環の歪みが発生する^{*7}。前線帯は高度とともに寒気側に傾斜しており、前線の暖気側で大きな絶対渦度の領域において地表面付近で前線を横切る流れの強化と高度に伴う循環の傾斜が存在する。

前線強化に対する時間スケールでの非地衡風循環の影響は、準地衡風と semigeostrophic の前線強化に含まれるプロセスを比較することでイメージすることができる。semigeostrophic な移流は、準地衡風な場合と比べて前線強化の時間スケールを大きく減少させるという正のフィードバックが存在する。温度のコントラストが増加するに連れて、 Q_2 は増加し、2 次循環もまた増加しなければならないので、 $|\partial T / \partial y|$ の増幅率は準地衡風な場合と同様に一定のまま保たれるというよりむしろ $|\partial T / \partial y|$ で増加する。このフィードバックにより、摩擦の効果がないと、semigeostrophic なモデルは半日未満で地表面の温度傾度が無限大になってしまう。このフィードバックメカニズムを系統的に示したのが次の図である。

^{*4} 方程式の形が楕円の方程式に類似しているため。

^{*5} 問 9.1 より、エルテルのポテンシャル渦度 P は $P \propto F^2 N_s^2 - S^4$ という関係があるので、(9.15) が楕円型境界値問題であるためには、北半球において $P > 0$ でなければならない。

^{*6} 付録に解答を載せてある。

^{*7} 微分のクロスタームが存在することによる 2 次循環の歪みは付録参照。

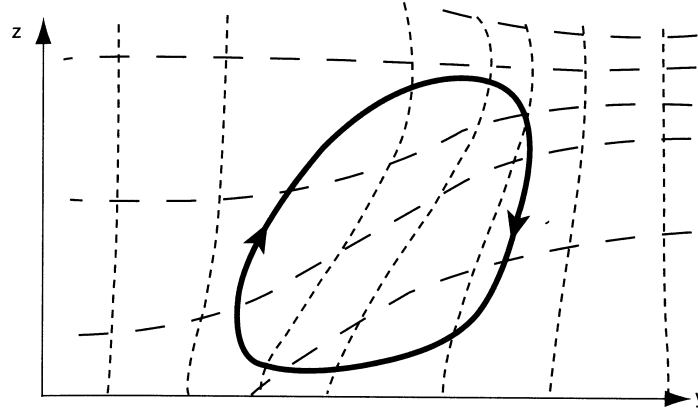
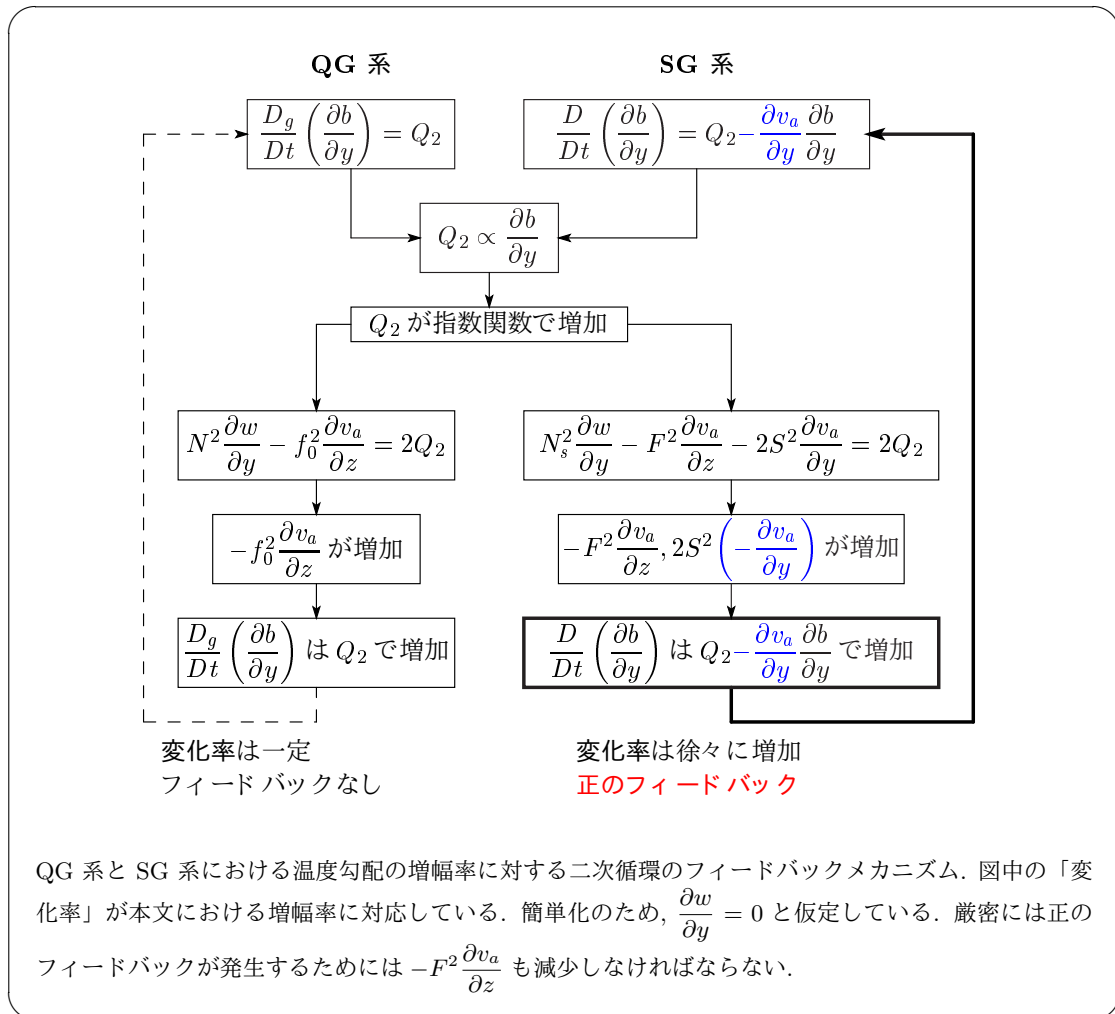


図 9.5: 温位場（長破線）と 2 次元前線強化における非地衡風循環（太い曲線矢印）の関係と、絶対運動量場（短破線）。寒気は右手にあり，暖気は左手にある。ここで，寒気側に向かう循環の傾きと強化される絶対運動量の勾配と前線帯における温位場に注意せよ。



以上をまとめると、以下のとおりである。

- QG 系では、前線帯における急激な温度傾度を説明できない。
- SG 系に拡張し、非地衡風成分を取り入れることで説明を試みる。
- QG にも非地衡風は入っているが、SG との違いは非地衡風の非対称性：
 1. 前線に平行な向きには、完全に地衡風バランスしている（地衡風運動量近似）。
 2. 前線に直交する向きには、地衡風循環と同じ大きさの非地衡風循環が存在する。
- Q_2 という温度の子午面勾配強制によって子午面二次循環が強制される。
- Q_2 によって強制される二次循環はソーヤーエリアッセン方程式 (9.15) によって求めることができる。
- SG 系では、前線での温度勾配変化は従来の QG 系における Q_2 強制に加えて、 Q_2 の二次循環強制によって二次循環が温度勾配をさらに増加させる（正のフィードバック）。

9.3 対称傾圧不安定

観測から、メソスケールの雲や降水帯は一般に総観スケールのシステムに付随して発生することがわかっている。そのようなメソスケールの雲や降水帯の特徴は一般に、前線とおなじように強い傾圧性を伴い、風の鉛直シアを横切るスケールよりシアに沿った長さの方が大きなスケールをもつ。そのようなシステムに対するエネルギーソースは対称不安定（もしくは斜向対流）として知られる傾圧不安定の 2 次元での形が考えられる。

典型的な大気における鉛直方向のパーセル変位と水平方向のパーセル変位に対する各性質をまとめた表が 9.1 である。では、パーセルが鉛直のみ、もしくは水平のみではなく、斜め方向に沿って変位した場合はどうなるであろうか。それは、通常の静的、慣性安定に対する条件がそれぞれ別々に満たされていたとしても、パーセルの変位に対して特定の条件のもとでは不安定になりうる。そのような不安定は平均水平風に鉛直シアが存在するときのみ発生し、擾乱が平均流方向に一様となる場合での、傾圧不安定の特殊な形とみなされる。また、下で示すように、対称不安定は等エントロピー座標系における慣性不安定とみなされる。

対称不安定の条件を導出する上で考える系は前節と同じで、

表 9.1: 鉛直変位と水平変位に対する性質のまとめ.

静力学不安定 (2.7.3)	不安定の名前	慣性不安定 (7.5.1)
鉛直	運動の方向	水平
浮力	復元力	慣性力
$N_s^2 > 0$	安定条件	$F^2 > 0$

- ブシネスク流体
- 流れが平均風に平行な座標 x に独立
- 子午面方向について温度風バランス

2.7.3, 7.5.1 にしたがって、静的安定度を温位 $\theta = \theta_0 + \Theta$ の構造で、また慣性安定度を東西方向の絶対運動量 $M \equiv fy - u_g$ の構造で示す.

傾圧流に対して、等温位面は水平方向に広がっており、絶対運動量の等値面は子午面内では鉛直方向に伸びている。しかし、東向きの平均流が高度とともに増加している傾圧流なら、温位と絶対運動量の等値面の両方とも極向き、上向きに傾斜している^{*8}。中緯度対流圏における鉛直、水平方向の復元力の相対的な強度は $N_s^2/(f\partial M/\partial y)$ という比で与えられる^{*9}。典型的な対流圏においてこの比は $\sim 10^4$ 程度^{*10}である。ゆえに、平均流に直交する面（南北・高度面）内におけるパーセルの運動は M 面より θ 面に似た分布をする^{*11}。ゆえに、パーセルの変位を解析するためには、等エントロピー座標系を用いた方が便利である^{*12}。等 θ 面で y 微分をとると、7.5.1 節の議論が未だに適用可能である。つまり、高度座標を z ではなく温位 θ で取り直すのである。すると、そのような運動の安定性は θ, M 面の相対的な傾斜に依存する。通常、 M 面は θ 面より傾きが大きく（図 9.5 参照）、パーセルの

^{*8} 傾圧場、傾圧場についての絶対角運動量と温位の子午面鉛直構造は付録参照。

^{*9} 鉛直・水平の安定性に関する方程式は鉛直方向の変位を δz 、水平方向の変位を δy とし、

$$\frac{D^2}{Dt^2}(\delta z) = -N_s^2 \delta z \equiv F_v \delta z, \quad (2.52)$$

$$\frac{D^2 \delta y}{Dt^2} = -f \frac{\partial M}{\partial y} \delta y \equiv F_h \delta y \quad (7.53)$$

で与えられる。このとき、 F_v, F_h は平衡位置から単位距離変位したときのそれぞれの方向への復元力である。この値が大きいほどパーセルに働く復元力が大きく、変位量も小さくなる。よって、これらの復元力（変位に対する抵抗力）の比

$$\frac{F_v}{F_h} = N_s^2 \Big/ f \frac{\partial M}{\partial y}$$

がそれぞれの方向への変位のしにくさの指標として用いられるのは妥当であると考えられる。この値が大きいほど鉛直方向への変位が制限されることになる。

^{*10} $N_s^2 \sim O(10^{-2})$, $f \frac{\partial M}{\partial y} \approx f^2 \sim O(10^{-8})$ とすると、この比は 10^6 程度の大きさとなる。

^{*11} 復元力の強度が鉛直方向に相対的に強く、等温位面を横切る運動が制限されるため。

^{*12} 傾圧流では高度面と等エントロピー面が一致することに注意。

変位は安定である^{*13}。しかし、 θ 面が M 面より大きく傾くとき、

$$f(\partial M/\partial y)_\theta < 0 \quad (9.19)$$

となるので、流れは θ 面に沿った変位に対して不安定となる。この状況は、非常に強い水平方向の温度勾配と鉛直方向の安定性が弱い領域で起こりうる。(9.19)の条件は (M の微分が傾斜している θ 面に沿って評価されることを除いて) 慣性不安定に対する (7.54)の安定性基準^{*14}に似ている。

(9.19)に $-g(\partial\theta/\partial p)$ をかけると、対称不安定に対する尺度を、(4.12)のエルテルのポテンシャル渦度の分布を用いて簡単に

$$f\bar{P} < 0 \quad (9.20)$$

で表現できる。ここで、 \bar{P} は基本状態の地衡風のポテンシャル渦度である。ゆえに、北半球において初期状態のポテンシャル渦度は至る所で正であるとすると、対称不安定は断熱運動によっては発達できない。なぜなら、ポテンシャル渦度はそのような運動に対して不変であり、正(初めの状態)を常に保ったままであるからである。

(9.19)が対称不安定な条件であることを確かめるために、図9.6の点1, 2における流体の管を交換するのに必要な平均運動エネルギーの変化を考える。(これらの管はそれぞれ $y_1, y_2 = y_1 + \delta y$ に位置しており、 x 軸に沿って無限に広がっていると仮定することで、2次元の問題となる^{*15}。) 2つの管は同じ温位の面上に存在しているので、有効位置エネルギーの値は同じである。ゆえに、交換前後の東西流の運動エネルギーの差 $\delta(KE)$ が負ならば、平均流の運動エネルギーを用いてパーセル間の自然な交換が可能となる。そうでなければ、何らかの外部のエネルギーソースによって運動エネルギーを供給してもらわなければ、交換に必要な子午面、鉛直方向の運動を行えない。

管の運動は x 軸に平行で、地衡風バランスしているので、2つの管についての絶対運動量は

$$\begin{aligned} M_1 &= f y_1 - u_1 = f y_1 - u_g(y_1, z), \\ M_2 &= f y_2 - u_2 = f y_1 + f \delta y - u_g(y_1 + \delta y, z + \delta z) \end{aligned} \quad (9.21)$$

となる。絶対運動量は管において保存されるので、交換の後の東西風の擾乱成分は

$$M'_1 = f y_1 + f \delta y - u'_1 = M_1, \quad M'_2 = f y_1 - u'_2 = M_2 \quad (9.22)$$

^{*13}対称不安定に対する運動量とエントロピーの分布は付録にまとめてある。

^{*14}再掲:

$$f \frac{\partial M}{\partial y} = f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \begin{cases} > 0 & \text{安定} \\ = 0 & \text{中立} \\ < 0 & \text{不安定} \end{cases} \quad (7.54)$$

^{*15}この、 x 軸に沿って無限に広がっているという仮定が、本節の最初に行った「擾乱は平均流に沿った方向に一樣」という仮定である。 x 軸方向に一樣に伸びているので、厳密な意味ではこの不安定はパーセル不安定ではない。

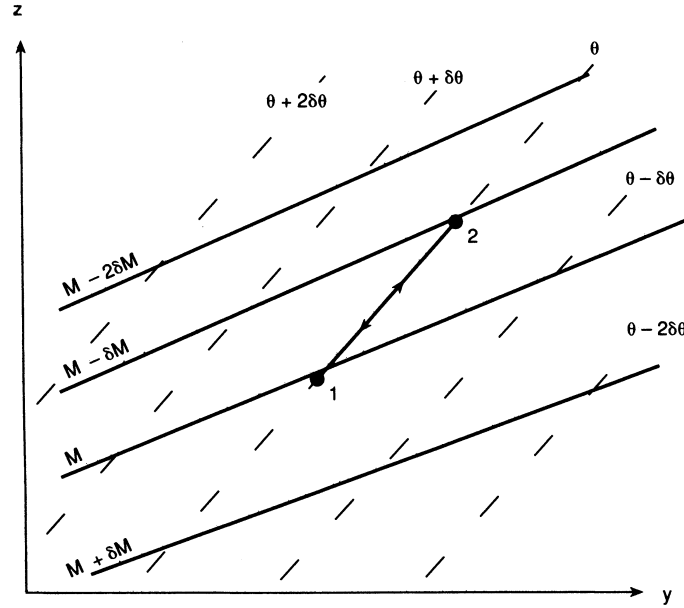


図 9.6: 対称不安定な基本場に対する絶対運動量と温位の等値線を示す断面. 点 1, 2 の間の等エントロピー線に沿った運動は不安定である. なぜなら, M はその線に沿って緯度とともに減少するからである. 詳しくは本文参照.

で与えられる. (9.21), (9.22) の間で M_1, M_2 を消去し, 東西風の擾乱成分について解くと,

$$u'_1 = f\delta y + u_1, \quad u'_2 = -f\delta y + u_2$$

が得られる. 最終状態と初期状態の間における東西風の運動エネルギーの差は

$$\begin{aligned} \delta(KE) &= \frac{1}{2} (u'^2_1 + u'^2_2) - \frac{1}{2} (u^2_1 + u^2_2) \\ &= f\delta y(u_1 - u_2 + f\delta y) = f\delta y(M_2 - M_1) \end{aligned} \quad (9.23)$$

で与えられる. ゆえに,

$$f\delta y(M_2 - M_1) < 0$$

となるなら, $\delta(KE)$ は負となり, 強制のない子午面運動が発生しうる. この 2 つの管は同じ θ 面上に存在しているので, $(\delta y)^2 > 0$ から上式を $(\delta y)^2$ で除し,

$$\frac{1}{\delta y} f(M_2 - M_1) = f \frac{\delta M}{\delta y} = f \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_\theta < 0$$

と考えると条件 (9.19) と等価である.

対称不安定に対する条件が満たされうる可能性を見積もるために, 平均流のリチャードソン数を用いて安定性を表現する. まず,

$$\delta M = \frac{\partial M}{\partial y} \delta y + \frac{\partial M}{\partial z} \delta z$$

であることに注意する. M 面の傾斜は水平方向への M の等値面の高度変化であるので, 上式において $\delta M = 0$ となる時の水平方向の高度変化 $\frac{\delta z}{\delta y}$ を計算すれば, M 面の傾きを計算できる. 上式について, $\delta M = 0$ としたときの高度変化は

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_M = \left(-\frac{\partial M}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right) \quad (9.24)$$

となる. 同様に, 等温位面の傾斜は

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_\theta = \left(-\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = \left(f \frac{\partial u_g}{\partial z}\right) / \left(\frac{g}{\theta_{00}} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \quad (9.25)$$

となる. ここで, 温度風の関係を用いて, 東西風の鉛直シアーを用いた. (9.25) に対する (9.24) の比は

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_M / \left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_\theta = f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y}\right) \left(\frac{g}{\theta_{00}} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) / \left[f^2 \left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2\right] = \frac{F^2 N_s^2}{S^4}$$

となる. ここで, 最終項は (9.16) で定義したものをを用いた.

対称不安定は M 面の傾斜が θ 面の傾斜を越えて傾いていなければならないので, 不安定に対する必要条件は

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_M / \left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_\theta = f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y}\right) \text{Ri} / f^2 = \frac{F^2 N_s^2}{S^4} < 1 \quad (9.26)$$

となる^{*16}. ここで, Ri は平均流のリチャードソン数であり,

$$\text{Ri} \equiv \left(\frac{g}{\theta_{00}} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) / \left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2$$

で定義される. ゆえに, 平均流の相対渦度がゼロ ($\partial u_g / \partial y = 0$) となると, 不安定条件を満たすには, $\text{Ri} < 1$ でなければならない.

条件 (9.26) は, $F^2 N_s^2 - S^4 < 0$ とできる. これはソーヤーエリアッセン方程式 (9.20) と関係づけられている. 問 9.1 から,

$$F^2 N_s^2 - S^4 = (\rho f g / \theta_{00}) \bar{P} \quad (9.27)$$

となる. 大きなスケールのポテンシャル渦度 \bar{P} は通常北半球で正, 南半球で負となるので, (9.27) は通常, 両半球において正である. ゆえに, 対称不安定に対する条件が満たされることはまれである. しかし, もし大気が飽和しているなら, 静的安定性条件は温位ではなく, 相当温位の減率に関係し, 対称不安定について中立な条件が容易に起こりうる (9.5 参照)^{*17}.

^{*16}この式から対称中立であるときは, M 面と θ 面が一致することもわかる.

^{*17}この中立状態は熱帯低気圧の成熟期に近似的に実現される (Emanuel, 1986).

最後に、対称安定となる条件 $F^2 N_s^2 - S^4 > 0$ は、ソーヤー・エリアッセン方程式 (9.15) が楕円型境界値問題であるための条件と一致していることに注意しておく。ゆえに、流れが傾圧擾乱に対して対称安定であるとき、強制 Q_2 がゼロではないと、(9.15) で支配される強制された前線を横切る循環が存在するであろう。しかし、前線を横切る自由振動は強制がないときに起こりうる。これらは運動方程式の y 成分において水平加速度項を含むことを要求している。結果として得られる、前線を横切る循環に対する方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} \right) + N_s^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y^2} + F^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} + 2S^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y \partial z} = 0 \quad (9.28)$$

という式になる (付録 F 参照^{*18})。これは、(9.15) と比較されるべきである。 $F^2 N_s^2 - S^4 > 0$ の場合、(9.28) の解は安定な振動に対応する。一方、 $F^2 N_s^2 - S^4 < 0$ の場合、(9.28) の解は指数関数的に成長する、対称傾圧不安定に対応する^{*19}。

以上をまとめると次のようになる。

^{*18}本レジュメの付録参照。

^{*19}証明は付録参照。

- メソスケール現象の主なエネルギーソースは対称不安定である。
- 対称不安定は, 鉛直方向にも水平方向にも安定な場において, 斜め方向の変位に対してのみ不安定となる.
 - これは, 等エントロピー座標系でみると通常の慣性不安定と同じ.
- (9.19) から, M 面が θ 面より大きく傾いた場が対称不安定となる.
- (9.20) から, 北半球では対称安定な場が卓越していることがわかる.
- 不安定条件は (9.27) と表現することもできる.
- 非定常ソーヤーエリアッセン方程式 (9.28) を用いると, 対称不安定を以下のように解釈できる.

対称安定の場合

$F^2 N_s^2 - S^4 > 0$ であり, 非定常, 外的強制 Q_2 がない場合は二次循環が振幅一定の自由振動を行う. 定常, 外的強制 Q_2 がある場合はその強制に応じて二次循環が定常応答する.

対称不安定の場合

$F^2 N_s^2 - S^4 < 0$ であり, 外的強制 Q_2 なしで二次循環が指数関数的に増加する. この指数関数的な増加が対称不安定に対応する.

- これらの応答の違いは環境場が不安定 (自己励起型) か安定 (外的強制型) かということに対応している.

準地衡風システムと semi-geostrophic システムの比較

ここでは, 6 章で議論した準地衡風近似システム (以下「QG」) と 9 章で議論された semi-geostrophic システム (以下「SG」) の比較を行う. 6, 9 章において各システムは鉛直方向の定義やコリオリパラメータの扱いが異なっているので, どちらのシステムも以下の近似の元で比較を行う^{*20}.

- 鉛直座標系は幾何座標系 z , 鉛直速度は幾何速度 w .
- f 面ブシネスク流体.

QG	システム	SG
$\frac{D_g u_g}{Dt} = f_0 v_a$ (6.11)	運動方程式	$\frac{D u_g}{Dt} = f_0 v_a$ (9.7)
$\frac{D_g v_g}{Dt} = -f_0 u_a$ (6.11)	運動方程式	$\frac{\partial p}{\partial y} = -f_0 u_g$
$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ (6.12)	連続の式	$\frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ (9.9)
$\frac{D_g b}{Dt} + N^2 w = 0$ (6.13b)	熱力学関係式	$\frac{D b}{Dt} + N^2 w = 0$ (9.8)
$f_0 \frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{\partial b}{\partial y}$ (3.29)	温度風	$f_0 \frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{\partial b}{\partial y}$ (9.10)
$\frac{D_g}{Dt}$	ラグランジュ微分	$\frac{D_g}{Dt} + v_a \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$
$\frac{D_g}{Dt} \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right) = Q_2 - N^2 \frac{\partial w}{\partial y}$ (6.48)	温度場	$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right) = Q_2 - \frac{\partial w}{\partial y} N^2 - \frac{\partial v_a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial z}$ (9.11)
$\frac{D_g}{Dt} \left(f_0 \frac{\partial u_g}{\partial z} \right) = Q_2 + f_0^2 \frac{\partial v_a}{\partial z}$ (6.47)	速度場	$\frac{D}{Dt} \left(f_0 \frac{\partial u_g}{\partial z} \right) = Q_2 + f_0^2 \frac{\partial v_a}{\partial z} - f_0 \frac{\partial v_a}{\partial z} \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial y}$ (9.13)
$-\frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial y} \cdot \nabla b$ (6.45a)	Q_2 ベクトル	$-\frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial y} \cdot \nabla b$ (9.12)
$v_a = -\frac{\partial \psi_M}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi_M}{\partial y}$	流線関数	$v_a = -\frac{\partial \psi_M}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi_M}{\partial y}$ (9.14)
$N^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y^2} + f_0^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} = 2Q_2$ (9.17)	SE 方程式	$N^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y^2} + f_0^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y^2} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} + 2S^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y \partial z} = 2Q_2$ (9.15)

^{*20}規格化温位 b は空間変化しない定数で規格化されているので, 温度が変数となっている方程式は自動的に b に書き換えることが可能となる.

問 9.1 解答

エルテルのポテンシャル渦度は θ 座標で評価されたとき, (4.12) より

$$P \equiv (\zeta_\theta + f) \left(-g \frac{\partial \theta}{\partial p} \right) \quad (4.12)$$

である. 今, 地衡風による相対渦度は u_g によるもののみと考えると,

$$\zeta_\theta = - \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_\theta$$

となる. よって, このときのエルテルのポテンシャル渦度は

$$P = \left\{ f - \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_\theta \right\} \left(-g \frac{\partial \theta}{\partial p} \right) \quad (\text{ex9.1.1})$$

である. ところで, 鉛直座標の変換式 (1.27) を用いると, θ 系で評価される相対渦度は

$$\left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_z = \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_\theta + \frac{\partial u_g}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_z$$

という変換式から z 系での相対渦度に直すことができる. よって, (ex9.1.1) は

$$P = \left\{ f - \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_z + \frac{\partial u_g}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_z \right\} \left(-g \frac{\partial \theta}{\partial p} \right) \quad (\text{ex9.1.2})$$

となる. 静力学平衡の関係から,

$$-g \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\theta_{00}}{g\rho} N_s^2$$

となるので^{*21}, (ex9.1.2) は

$$P = \left\{ f - \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_z \right\} \frac{\theta_{00}}{g\rho} N_s^2 + \left\{ \frac{\partial u_g}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_z \right\} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$

さらに, 右辺第 2 項についてさらに変形すると,

$$P = \left\{ f - \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_z \right\} \frac{\theta_{00}}{g\rho} N_s^2 - \frac{1}{f\rho} \frac{\partial b}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_z \quad (\text{ex9.1.3})$$

となる. ここで, 右辺第 2 項は

$$\frac{\partial u_g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{1}{f} \frac{\partial b}{\partial y}$$

という関係を用いた. 最終式への変形は温度風バランス (9.10) を用いた. (9.16) から F, S の定義を用いると, (ex9.1.3) は

$$P = \frac{\theta_{00}}{fg\rho} F^2 N_s^2 - \frac{\theta_{00}}{fg\rho} S^4 = \frac{\theta_{00}}{fg\rho} [F^2 N_s^2 - S^4] \quad (\text{ex9.1.4})$$

となる.

^{*21}(9.16) の定義から,

$$N_s^2 = N^2 + \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{g}{\theta_{00}} \frac{\partial}{\partial z} [\theta_0 + \theta] = \frac{g}{\theta_{00}} \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

であることに注意.

微分のクロスタームによる流線関数の変化

ここではまず、点状の強制 δ が存在するとき、クロスタームのない楕円型方程式で表現される流線関数の応答が楕円状に分布することを示す。簡単のため、

$$a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \delta(x, y) \quad (\text{ap9.15.1})$$

という方程式を考える。ここで、 a, c は空間について定数であり、 δ はデルタ関数である。つまり、ソースは座標原点にのみ存在している。このとき、ポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \delta(x, y)$$

の解は 2 次元のグリーン関数 G に一致し、

$$\psi(x, y) = G(x, y), \quad G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r}|, \quad \mathbf{r} \equiv (x, y) \quad (\text{ap9.15.2})$$

となる。このとき、(ap9.15.1) について、

$$x = aX, \quad y = cY$$

という変数変換を行うと、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = \delta(aX, cY) \quad (\text{ap9.15.3})$$

となる。すると、この方程式の形式解は (ap9.15.2) から

$$\psi(X, Y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (\text{ap9.15.4})$$

座標を元に戻すと、得られる応答 $\psi(x, y)$ は

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{c}\right)^2} \quad (\text{ap9.15.5})$$

となる。よって、強制に対して応答は x 方向に $1/a$ 倍、 y 方向に $1/c$ 倍伸びることがわかる (図 1)。以上より、楕円型微分方程式の応答は強制の分布を各項の (1/係数) 倍だけ伸ばした分布をするということがわかる。

次に、クロスタームのある、より一般的な楕円型微分方程式

$$a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \delta(x, y) \quad (\text{ap9.15.6})$$

を考える。楕円型微分方程式は

$$(\partial/\partial x, \partial/\partial y) A \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} \psi = \delta(x, y), \quad A \equiv \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ b^2 & c^2 \end{pmatrix} \quad (\text{ap9.15.7})$$

と表現することができる. 2 次の正方行列は固有値が重根を持たない限り必ず対角化できる^{*22}. つまり,

$$A \equiv \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

という行列の対角成分が A の固有値である場合,

$$A = R^{-1}AR$$

という関係が成り立つ. ここで, R は A, A から一意に決まる回転行列である. これは

$$RAR^{-1} = A \quad (\text{ap9.15.8})$$

と等価である. この関係を用いると, (ap9.15.7) は

$$(\partial/\partial x, \partial/\partial y) RAR^{-1} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} \psi = \delta(x, y) \quad (\text{ap9.15.9})$$

となる. このとき,

$$(\partial/\partial X, \partial/\partial Y) \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y) R, \quad \begin{pmatrix} \partial/\partial X \\ \partial/\partial Y \end{pmatrix} \equiv R^{-1} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}$$

と定義すると^{*23}, (ap9.15.9) は

$$(\partial/\partial X, \partial/\partial Y) A \begin{pmatrix} \partial/\partial X \\ \partial/\partial Y \end{pmatrix} \psi = \delta(x, y) \quad (\text{ap9.15.10})$$

となる. 上式は

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = \delta(x, y), \quad \begin{cases} x = R_{11}X + R_{12}Y, \\ y = R_{21}X + R_{22}Y \end{cases} \quad (\text{ap9.15.11})$$

に等しい. よって, (ap9.15.11) の解は (X, Y) 座標で見たとき, の分布が X 方向に $1/\lambda$ 倍伸び, Y 方向に $1/\mu$ 倍伸びた分布をする. この (X, Y) 座標は (x, y) に回転行列 R が作用している座標であるので, 元の座標で見ると, ψ の分布は傾いて見えることになる. 概念図をまとめると, 図1のようになる. これにより, 楕円型偏微分方程式のクロスタームは強制に対する応答の分布を傾ける効果があることが示される.

図2は典型的な傾圧場において, ソーヤーエリアッセン方程式を元に流線関数を計算した結果である. このとき, 応答は図の中央に円形に配置されている. 等値線が微分のクロスタームを考慮した場合, カラーが無視した場合の流線関数である. 上で議論したように, クロスタームを無視した場合は, x, y 軸に長軸, 短軸が一致した楕円形 (各方向に伸びている) で応答する. 対して, クロスタームを考慮した場合は, 同じように楕円に伸長しているが, それに加えて少し右上に傾いている.

^{*22}この行列が重根をもつのは,

$$(a^2 - c^2)^2 + 4b^4 = 0$$

を満たすときのみであるので, ここでは各係数はこの条件を満たさないことを仮定しておく.

^{*23} R は回転行列なので, 実対称行列である. よって, 実際にはこの2つの式のどちらか1つを定義すれば, もう片方は自動的に決まる.

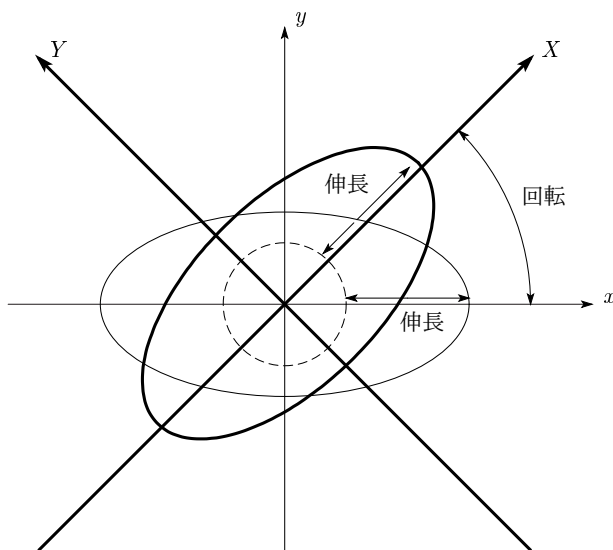


図 1: クロスタームのある楕円型微分方程式において, 円形の強制 (破線) が存在したときのクロスタームなしの応答 (細実線) とクロスタームありの応答 (太実線) .

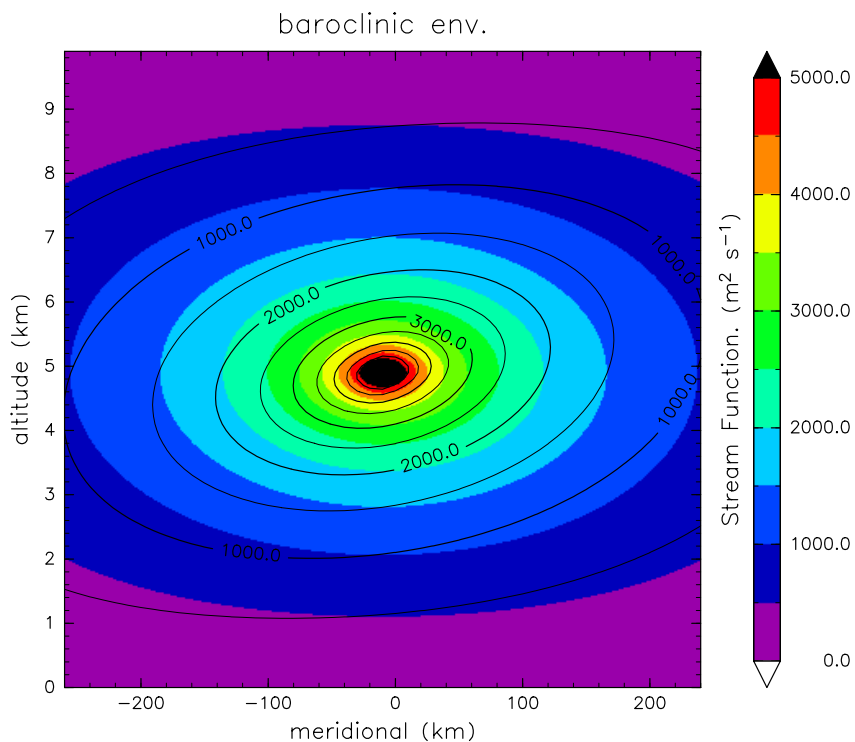


図 2: 典型的な傾圧場において, クロスタームを考慮した場合 (等値線) と考慮しない場合 (カラー) の流線関数の分布.

順圧場と傾圧場における絶対運動量と温位の分布

図3は順圧場と傾圧場における絶対運動量（等値線）と温位（カラー）の分布。順圧場では、温位面と運動量面が完全に直交しており、これらの物理量は独立な関係となっている。一方、傾圧場では温位場も運動量場も傾斜している。温位場と運動量場の等値面が一致する場合、対称中立な場であり、この条件を満たせば力学場と熱力学場が従属関係となる。

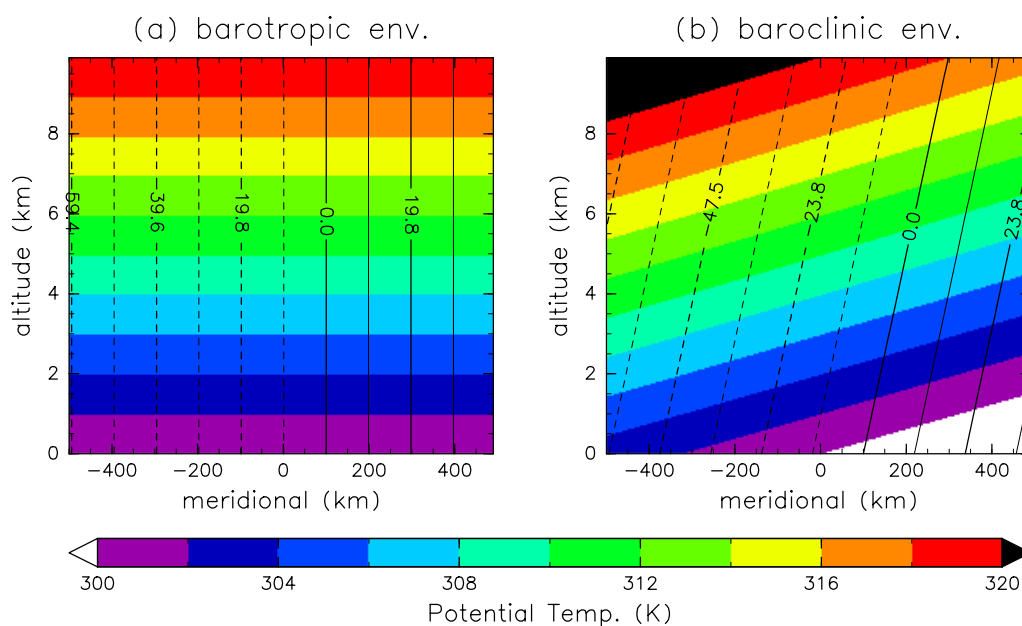


図3: 順圧場（左）と傾圧場（右）における絶対運動量（等値線）場と温位（カラー）場の違い。

対称不安定な場の概要

図4は対称安定な場と対称不安定な場における絶対運動量（等値線）と温位（カラー）場の分布。鉛直軸を幾何高度座標でとると、どちらの場合においても鉛直方向、水平方向に安定である（静力学安定、慣性安定の条件を満たしている）。しかし、鉛直軸を温位座標でとると、対称不安定な場は温位面に対して慣性不安定な条件を満たしている。これが、本文で記述されている「対称不安定は温位場における慣性不安定とみなされる」という部分に対応している。本文に記述されているように、実際パーセルは慣性安定度より静的安定度の方が相対的に大きいため、温位面に沿った運動を行う。

付録 F 対称的な傾圧振動

傾圧帯における強制子午面循環に対するソーヤーエリアッセン方程式 (9.15) を用いて、対称性のある自由子午面振動に対する方程式を得ることができる^{*24}。ここで導かれる方

^{*24}厳密には、(9.15) は用いていない。

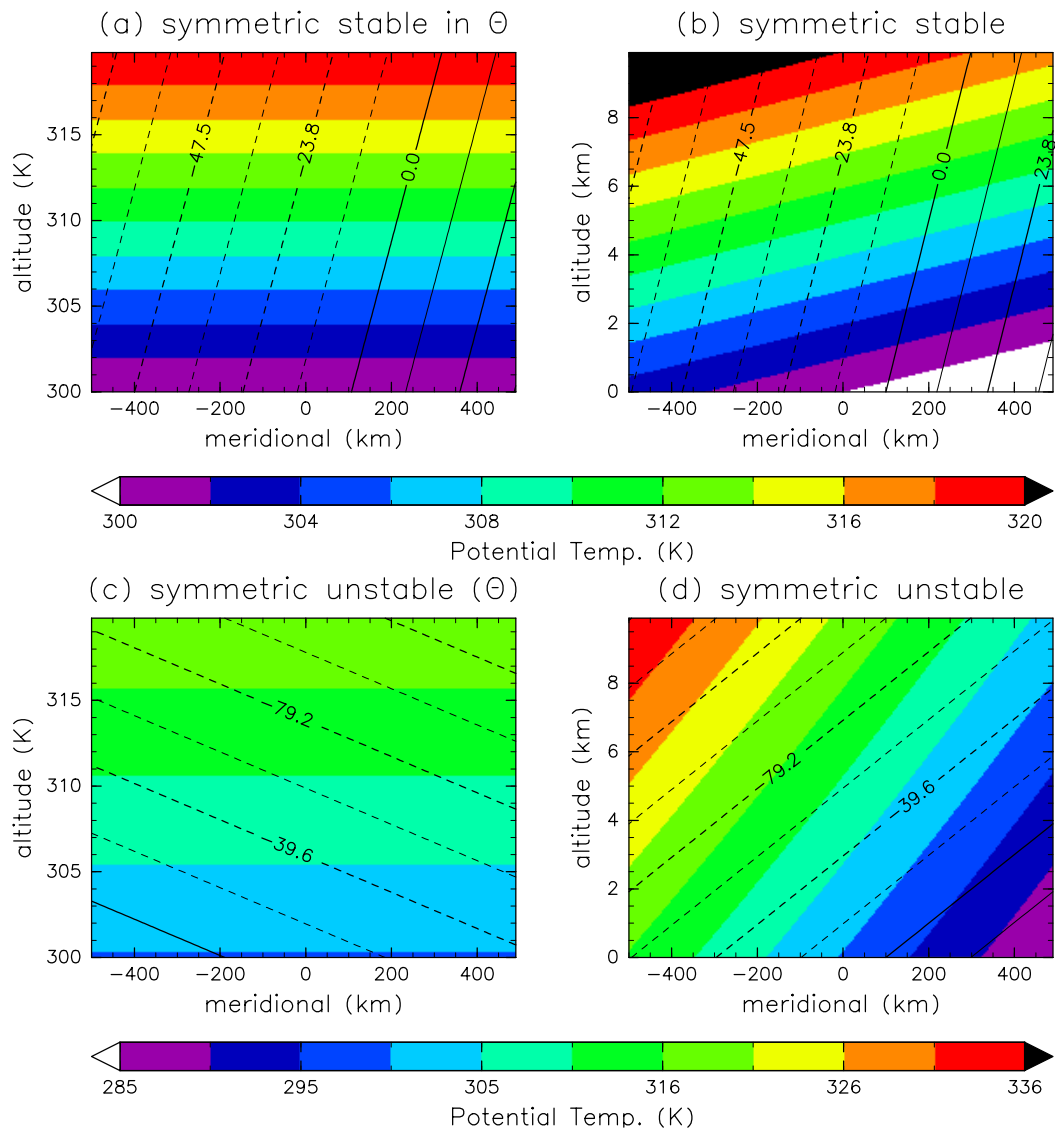


図 4: 対称安定（上）と不安定（下）における絶対運動量（等値線）場と温位（カラー）場の違い. 左は鉛直軸を幾何座標系で定義したもの, 右は温位座標系で定義したものである.

程式を用いると, 不安定な対称振動の成長率あるいは, 安定な対称振動の振動数に対する表式が得られる.

流れの場が東西方向に対称とすると,

$$u_g = u_g(y, z), \quad b = (y, z).$$

非地衡風的な（子午面の）流れは

$$v_a = -\partial\psi/\partial z, \quad w_a = \partial\psi/\partial y$$

となるような流線関数 $\psi(y, z)$ で与えられる。すると, (9.12) から $Q_2 = 0$ なので, 任意の子午面循環は（強制を受けることなく）自発的に, 厳密な地衡風バランスからのずれが発生しなければならない。これは, 単に (9.10) が y 方向の運動方程式に加速度項を追加することで表現することができる^{*25},

$$\frac{Dv_a}{Dt} + fu_g + \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad (\text{F.1})$$

となる。両辺 z で微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dv_a}{Dt} \right) + f \frac{\partial u_g}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0.$$

この関係を用いると, (9.11), (9.13) を足し合わせて得られる子午面循環の方程式は

$$-\frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{Dv_a}{Dt} \right\} \right] + N_s^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y^2} + F^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} + 2S^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y \partial z} = 0 \quad (9.15')$$

となる。ここで, 今考えている系では強制 Q_2 がゼロとなることに注意。さらに, 子午面循環の構造が x 方向に一様であることと, 子午面循環の 2 次以上の項が微小であることを用いると, 子午面循環のラグランジュ微分は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_a \frac{\partial}{\partial y} + w_a \frac{\partial}{\partial z} \approx \frac{\partial}{\partial t}$$

と近似できる。すると, 求めたい式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + N_s^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + F^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2S^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} = 0 \quad (\text{F.3})$$

が得られる。

(9.28) における解の振る舞い

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} \right) + N_s^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y^2} + F^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} + 2S^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y \partial z} = 0 \quad (9.28)$$

における解の振る舞いを考察する。時間変化のみに着目するため, 流線関数は簡単に

$$\psi_M = A(t)e^{i(l y + m z)}$$

とする。ここで, l, m は水平, 鉛直方向の波数であり, $A(t)$ は時間にのみ依存する振幅である。これを (9.28) に代入すると,

$$m^2 \frac{d^2}{dt^2} A(t) = - [N_s^2 l^2 + F^2 m^2 + 2S^2 l m] A(t) \quad (\text{ap9.28.1})$$

^{*25}ここでは, 強制 Q_2 がゼロなので, 運動は完全な地衡風バランスをしておらず, 非地衡風循環が時間変化することで子午面循環が存在すると考えている。

となる。このとき、時間とともに $A(t)$ が指数関数的に変化すればその解は不安定、逆に振動するだけなら安定ということになる。上式はいずれも実数であることに注意。一般解は

$$A(t) = e^{at} \quad (\text{ap9.28.2})$$

となり、

$$a^2 \equiv -[N_s^2 l^2 + F^2 m^2 + 2S^2 lm] \quad (\text{ap9.28.3})$$

である。よって、このときの解の振る舞いは

$$\begin{cases} a^2 > 0 & \text{不安定,} \\ a^2 < 0 & \text{安定} \end{cases}$$

となる。このとき、 a^2 は

$$a^2 = -\frac{1}{N_s^2} \left[N_s^4 \left\{ l + \frac{S^2}{N_s^2} m \right\}^2 + \underbrace{\{N_s^2 F^2 - S^4\}}_{(\dagger 1)} m^2 \right] \quad (\text{ap9.28.4})$$

とできる。四角括弧内の物理量はすべて実数であるので、 $(\dagger 1)$ を除いてすべて正值をとる。よって、 $(\dagger 1)$ について、

$$a^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_s^2 F^2 - S^4 > 0 \quad (\text{ap9.28.5})$$

$$a^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad N_s^2 F^2 - S^4 < 0 \quad (\text{ap9.28.6})$$

が成り立つ^{*26}。以上より、

$$\begin{cases} F^2 N_s^2 - S^4 > 0 & \text{安定 (振動解)} \\ F^2 N_s^2 - S^4 < 0 & \text{不安定 (発散解)} \end{cases}$$

であることが示される。

^{*26}ここで注意すべきことは、(ap9.28.6) については逆が必ずしも成り立たないことである。なぜなら、厳密に a^2 の符号を決定するには、(ap9.28.4) 四角括弧内の第 1 項との和が負になっている必要があるからである。よって、ここでは (ap9.28.6) は不安定となる可能性のある条件を表しているということに注意する。また、一般的に N_s^2 は正負両方の値をもつので、四角括弧の外にかかっている係数の符号も吟味する必要があるが、対称不安定を仮定するなら、 $N_s^2 > 0$ かつ $F^2 > 0$ は少なくとも成り立っていないといけないため、ここでは N_s^2 は正值と考えてよい。