

# 第1章 海氷熱力学モデルの定式化

## 1.1 系の設定

多くの海氷熱力学モデル (Maykut and Untersteiner, 1971; Semtner Jr, 1976; Winton, 2000) は, 海氷を図 1.1.1 のような雪層と氷層から成る鉛直一次元のカラムとして考える. また, 海氷の上端では大気, 下端では海洋に接しており, そこで海氷

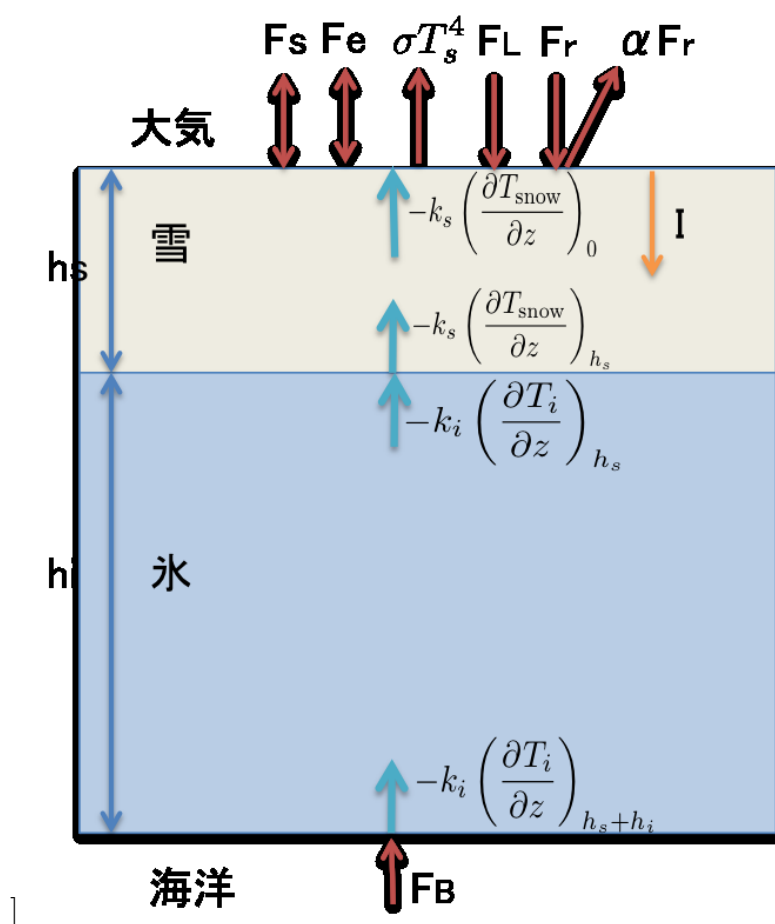


図 1.1.1: 系の設定

は大気や海洋と熱のやりとりをする.

雪層や氷層内の鉛直温度分布は, 各層において熱伝導方程式を解くによって決定される. この熱伝導方程式に課す境界条件は, 大気からの熱フラックスや海洋から熱フラックスである.

## 1.2 支配方程式系

以下に、一般的な海氷熱力学モデルにおける支配方程式系を示す。これらの方程式は、雪層・氷層の温度（それぞれを  $T_{\text{snow}} = T_{\text{snow}}(z, t)$ ,  $T_{\text{ice}} = T_{\text{ice}}(z, t)$  とおく）の鉛直分布や雪層・氷層の厚さ（それぞれを  $h_{\text{snow}} = h_{\text{snow}}(t)$ ,  $h_{\text{ice}} = h_{\text{ice}}(t)$ ）を決定する。なお、以下では、特に断らない限り温度の単位として摂氏 ( $^{\circ}\text{C}$ ) を用いる。

### 雪層に対する熱伝導方程式

$$\rho_{\text{snow}} c_{\text{snow}} \frac{\partial T_{\text{snow}}}{\partial t} = k_{\text{snow}} \frac{\partial^2 T_{\text{snow}}}{\partial z^2} + \kappa_s I(0) \exp[\kappa_{\text{snow}} z] \quad (1.2.1)$$

ここで、 $\rho_{\text{snow}}$  は雪の密度、 $c_{\text{snow}} = c_{\text{snow}}$  は雪の比熱、 $k_{\text{snow}}$  は雪の熱伝導係数、 $\kappa_{\text{snow}}$  は雪の透過係数、 $I(0)$  は雪層表面を貫く短波放射である。

### 雪層に対する質量保存則

$$\rho_{\text{snow}} \frac{dh_{\text{snow}}}{dt} = M_{\text{snow}} + F_{\text{snowfall}} \quad (1.2.2)$$

ここで、 $M_{\text{snow}}$ ,  $F_{\text{snowfall}}$  はそれぞれ、単位時間あたりの雪層の融解量と積雪量である。

### 氷層に対する熱伝導方程式

$$\rho_{\text{ice}} c_{\text{ice}} \frac{\partial T_{\text{ice}}}{\partial t} = k_{\text{ice}} \frac{\partial^2 T_{\text{ice}}}{\partial z^2} + \kappa_s I(-h_s) \exp[\kappa_{\text{ice}}(z + h_s)] \quad (1.2.3)$$

ここで、 $\rho_{\text{ice}}$  は海氷の密度、 $c_{\text{ice}} = c_{\text{ice}}$  は海氷の比熱、 $k_{\text{ice}}$  は海氷の熱伝導係数、 $\kappa_{\text{ice}}$  は海氷の透過係数である。また、 $I(-h_s)$  は氷層表面を貫く短波放射である。

## 氷層に対する質量保存則

$$\rho_{\text{ice}} \frac{dh_{\text{ice}}}{dt} = M_{\text{ice}} \quad (1.2.4)$$

ここで,  $M_{\text{ice}}$  は単位時間あたりの氷層の融解量である.

## 1.3 境界条件

海氷表面 ( $z = 0$ ) における境界条件 (表面熱収支)

雪層の存在する場合, 海氷表面において次の熱収支バランスを満たすとする.

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_s)F_r - I(0) + F_L - \sigma[T_{\text{snow}}(0) + 273.15]^4 + F_s + F_e + k_{\text{snow}} \left( \frac{\partial T_{\text{snow}}}{\partial z} \right)_{z=0} \\ = \begin{cases} 0 & (T_{\text{snow}} < 0 \text{ }^\circ\text{C}) \\ H_{\text{snow}} & (T_{\text{snow}} = 0 \text{ }^\circ\text{C}) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

ここで,  $F_r, F_L, F_s, F_e$  はそれぞれ海氷表面における入射短波放射フラックス, 入射長波放射フラックス, 顕熱フラックス, 潜熱フラックスである (これらのフラックスの符号は, 鉛直上向きを正にとる). また,  $\alpha_s$  は雪のアルベド,  $\sigma$  はステファン・ボルツマン定数である.  $H_{\text{snow}}$  は, 雪層表面の融解に伴う単位時間あたりの融解熱を表す.

一方, 雪層が存在せず氷層表面が大気にさらされている場合 ( $h_s = 0$  の場合) は, 海氷表面において次の熱収支バランスを満たすとする.

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_i)F_r - I(0) - \sigma[T_{\text{ice}}(0) + 273.15]^4 + F_s + F_e + k_{\text{snow}} \left( \frac{\partial T_{\text{ice}}}{\partial z} \right)_{z=0} \\ = \begin{cases} 0 & (T_{\text{ice}} < T_{f,\text{si}}) \\ H_{s,\text{ice}} & (T_{\text{ice}} = T_{f,\text{si}}) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

ここで,  $\alpha_i$  は雪のアルベド,  $T_{f,\text{si}}$  は海氷の氷点,  $H_{s,\text{ice}}$  は氷層表面の融解に伴う単位時間あたりの融解熱を表す.

### 雪層・氷層間の境界条件

雪層と氷層の間で、熱伝導フラックスは連続であることを課す。すなわち、

$$k_{\text{snow}} \left( \frac{\partial T_{\text{snow}}}{\partial z} \right)_{z=-h_s} = k_{\text{ice}} \left( \frac{\partial T_{\text{ice}}}{\partial z} \right)_{z=-h_s}. \quad (1.3.7)$$

### 海水下端の境界条件

海水下端 ( $z = -(h_s + h_i) \equiv z_b$ ) の氷の温度は、海水の氷点  $T_{f,\text{sw}}$  に固定する。すなわち、

$$T_{\text{ice}}(z_b) = T_{f,\text{sw}}. \quad (1.3.8)$$

### 氷層・海洋間の境界条件

海水下端では、

$$F_b + k_{\text{ice}} \left( \frac{\partial T_{\text{ice}}}{\partial z} \right)_{z=z_b} = H_{b,\text{ice}} \quad (1.3.9)$$

の熱収支バランスを満たすとする。ここで、 $F_b$  は海洋熱フラックス、 $H_{b,\text{ice}}$  は海水下端の海水生成・融解に伴う融解熱である。

## 1.4 海氷の比熱

海氷の比熱は、次の近似式 (Untersteiner, 1961; Ono, 1967) を用いて求める<sup>\*1</sup>。

$$c_{\text{ice}}(T, S) = c_o + \frac{L\mu S}{T^2}. \quad (1.4.10)$$

ここで、 $c_o$  は純粋な氷の比熱、 $S$  は塩分量 (単位はパーミル) である。また、 $\mu (= -T_{f,\text{ice}}/S)$  は経験的な定数である (詳細は付録 A を参照)。

<sup>\*1</sup>海氷の比熱の近似式の導出は、付録 A を参照されたい。

## 付録 A: 海氷の比熱の式の導出

ここでは、海氷熱力学モデルで用いられる海氷の比熱の近似式

$$c_{si} = c_o + \frac{L\mu S}{T^2} \quad (\text{A.1})$$

の導出を (Ono, 1967) に従って行う。ただし、 $L$  は  $0^\circ\text{C}$  における純氷の融解の潜熱、 $\mu$  は経験的な定数 (以下の導出を参照)、 $S$  は海氷の塩分量である。本文と同様に以下でも、温度の単位として摂氏を用いることに注意されたい。

今、海氷は純氷と濃縮された塩類溶液 (ブライン) から成るとし、気泡などの存在無視すれば、海氷  $1\text{ g}$  の温度を  $\Delta T$   $^\circ\text{C}$  上昇させるための熱量  $C_{si}\Delta T$  は、

$$C_{si}\Delta T = C_i m_i \Delta T + C_b m_b \Delta T - \lambda_T \frac{dm_i}{dT} \Delta T \quad (\text{A.2})$$

と書ける。ここで、 $m_i, m_b$  はそれぞれ海氷  $1\text{ g}$  中の純氷およびブラインの質量である。また、 $C_i$  は純氷の比熱、 $C_b$  はブラインの比熱である。 $\lambda_T$  は  $T$   $^\circ\text{C}$  における氷の融解の潜熱であり、

$$\lambda_T = \lambda_0 + (C_w - C_i)T \quad (\text{A.3})$$

表される。すなわち、 $\lambda_T$  は、 $T$   $^\circ\text{C}$  の純氷  $1\text{ g}$  をまず  $0^\circ\text{C}$  まで暖め、 $0^\circ\text{C}$  で溶かし、溶けた水の温度をまた  $T$   $^\circ\text{C}$  まで下げるのに必要な熱量に等しい。比熱は  $1\text{ g}$  の物質の温度を  $1^\circ\text{C}$  上昇させるのに必要な熱量で定義されるので、(A.2) から海水の比熱は、

$$C_{si} = C_i m_i + C_b m_b - \lambda_T \frac{dm_i}{dT} \quad (\text{A.4})$$

と書ける。

海氷  $1\text{ g}$  中のブライン  $m_b\text{ g}$  は、 $m_w\text{ g}$  の水に  $m_s\text{ g}$  の塩類<sup>\*2</sup> が溶けてできているとする。このとき、

$$m_i + m_b = m_i + m_w + m_s = 1 \quad (\text{A.5})$$

<sup>\*2</sup> $m_s$  は海氷中の塩類の質量分率であり、塩分量  $S$  (単位はパーミル) とは、

$$S = m_s \times 1000$$

の関係がある。

である。比熱の中に現れるブライン中の水の質量  $m_w$  を  $m_s$  を使って書くために、塩分の質量比

$$\gamma = \frac{m_s}{m_w} \quad (\text{A.6})$$

を導入すれば、 $m_w$  は、

$$m_w = \frac{m_s}{\gamma} \quad (\text{A.7})$$

と書ける。同様にして、純粋の質量  $m_i$  は、

$$m_i = 1 - m_s - \frac{m_s}{\gamma} \quad (\text{A.8})$$

と書ける。

ブラインの比熱  $C_b$  は、塩分量が増加すると小さくなり、温度が下がるとわずかに大きくなる。したがって、ブラインの比熱を

$$C_b = C_w - \beta(S, T) \quad (\text{A.9})$$

の形式で書くことができる。

(A.4) に (A.5), (A.7), (A.8), (A.9) を代入すれば、

$$C_{si} = C_i - \lambda_0 \frac{dm_i}{dT} + (C_w - C_i) \left( \frac{m_s}{\gamma} - T \frac{dm_i}{dT} \right) + (C_w - C_i - \beta)m_s - \beta \frac{m_s}{\gamma} \quad (\text{A.10})$$

を得る。さらに、 $m_s$  が  $T$  に依存しないことに注意すれば、純氷の変化量は、

$$\frac{dm_i}{dT} = -\frac{dm_w}{dT} = -\frac{d}{dT} \left( \frac{m_s}{\gamma} \right) = \frac{m_s}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{dT}$$

と  $m_s$  と  $\gamma$  を用いて書き表されるので、(A.10) は、

$$C_{si} = C_i - \lambda_0 \frac{m_s}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{dT} + (C_w - C_i) \frac{m_s}{\gamma} \left( 1 - \frac{T}{\gamma} \frac{d\gamma}{dT} \right) + (C_w - C_i - \beta)m_s - \beta \frac{m_s}{\gamma} \quad (\text{A.10})$$

となる。

温度  $T^\circ\text{C}$  を結氷温度とするような平衡濃度にあるブラインの質量比  $\gamma$  と  $T$  には、

$$T = -\alpha\gamma \quad (\text{A.11})$$

のような線形の関係が成り立つことが知られている。  $-8.2^\circ\text{C}$  以上の温度範囲を考えると、比例定数  $\alpha$  は 54.11 に取られる。(A.11) を (A.10) に代入すれば、

$$C_{si} = C_i + \lambda_0 \alpha \frac{m_s}{T^2} + (C_w - C_i - \beta)m_s + \alpha \beta \frac{m_s}{T} \quad (\text{A.10})$$

を得る。今考える温度範囲では、右辺 3,4 項目の寄与は 2 項目に比べて小さい(Ono, 1967) ので無視すれば、海氷の比熱は、

$$C_{si} = C_i + \lambda_0 \mu \frac{S}{T^2} \quad (\text{A.10})$$

と書ける。ただし、 $m_s$  を塩分量  $S$  で書き直し、 $\mu = \alpha \times 1000$  と置き直した。

## 関連図書

Gary A Maykut and Norbert Untersteiner.

Some results from a time-dependent thermodynamic model of sea ice.

*Journal of Geophysical Research*, 76(6):1550–1575, 1971.

Nobuo Ono.

Specific heat and heat of fusion of sea ice.

*Physics of snow and ice*, 1:599–610, 1967.

Albert J Semtner Jr.

A model for the thermodynamic growth of sea ice in numerical investigations of climate.

*Journal of Physical Oceanography*, 6(3):379–389, 1976.

N Untersteiner.

On the mass and heat budget of arctic sea ice.

*Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie, Serie A*, 12(2):151–182, 1961.

Michael Winton.

A reformulated three-layer sea ice model.

*Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 17(4):525–531, 2000.